2017.01.31. Kalkulus I. NÉV:....................................

A csoport EHA:....................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2x^3$ függvény globális maximumát, minimumát a $[-1, \sqrt{8}]$ intervallumon. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^3}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3n^4}{n^3 + 4^n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x} \ln|x|$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\sqrt{\pi}} u^2 \sin u \; du, \qquad \text{(ii)} \int_1^3 \frac{z^3+1}{z^2+2z+1} \; dz, \qquad \text{(iii)} \int_e^{\infty} \frac{1}{v \ln^2 v} \; dv.$$

Segédlet:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat konvergál 3-hoz. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos a $(-3, 2]$ intervallumon. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konvex az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**