2017.01.17. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ függvénynek az $x_0 = -1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenesének egyenletét. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}-1}{\sqrt[3]{n^4-2n+3}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-n}{3n+4}\right)^{2n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{x^2}}$ függvényt. *18pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\sqrt{\pi}} 3u \sin u^2 \, du, \qquad \text{(ii)} \int_1^3 \frac{z+1}{z^2-z-2}\, dz, \qquad \text{(iii)} \int_2^\infty \frac{3}{v^2+v+2}\, dv.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke -1. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható a 3 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény monoton csökkenő az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Integrálfüggvény. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**