

## FELADATOK:

1. Határozzuk meg az  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$  függvénynek az  $a = 0$  pont körüli harmadrendű Taylor-féle polinomját, segítségével becsüljük meg  $\sqrt[3]{3}$  értékét. 8pt

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: 8pt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt[n]{2}}{1 - \sqrt[n]{8}}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{3n-4} \right)^{1-2n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az  $f(x) = x + e^{-1/x}$  függvényt. 15pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 34pt

$$(i) \int_0^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt, \quad (ii) \int_0^{\pi/2} v \operatorname{arctg} v dv, \quad (iii) \int_0^1 \frac{3z+1}{1-z^2} dz.$$

Segédlet:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A  $\{b_n\}$  sorozat alulról korlátos. 5pt

(ii)  $a_0$  torlódási pontja az  $\{a_n\}$  sorozatnak. 5pt

(iii) Az  $f(x)$  függvénynek helyi minimuma van az  $x_0 = 2$  pontban. 5pt

(iv) A környezetes definíció alapján  $\lim_{y \rightarrow \infty} U(y) = -\infty$ . 5pt

(v) Darboux-féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**