2017.01.03. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 2,\ a_n = \sqrt{6a_{n-1} - 5}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 5^{n-3} - (-1)^n}{n^3 - 4 \cdot 2^n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \cdot e^{-1/x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \sqrt[3]{t} \ln t \; dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{1+4u}{u^2+1} \; du, \qquad \text{(iii)} \int_0^3 \frac{z^3 - 2z + 1}{\sqrt{z}} \; dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A $\{b_n\}$ sorozat konvergens. *5pt*

(ii) A $g(t)$ függvény lineárisan approximálható a -2 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek helyi maximuma van az $x_0 = a$ pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{y \to -1^-} h(y) = -1$. *5pt*

(v) Integrálközép. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**