2016.12.13. Kalkulus I. NÉV:......................................

A csoport EHA:......................................

`FELADATOK:`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{3n+2}{2n-9}$ sorozatot. Továbbá adjuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket is. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^3+n+5}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{2n-3}\right)^{2n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5-x)$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_{-2}^{1} \frac{z^2}{\sqrt[3]{z^3+8}}\,dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^3 \frac{2q-1}{3q+2}\,dq, \qquad \text{(iii)} \int_0^\infty ue^{-u^2/2}\,du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (x_n) sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az $f(y)$ függvény differenciálható a -3 pontban. *5pt*

(iii) $g(t)$–nek helyi maximuma van a_0–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{p \to -3^+} h(p) = -5$. *5pt*

(v) A korlátos D számhalmaz supremuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**