2016.01.19. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 3x$ függvény deriváltját az $x = -2$ helyen. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3-1} - \sqrt{n^2+2n}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^{n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2-2s+2}, \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^0 \frac{1}{t^2-3t}dt, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 e^{-xy}\ dy\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A c szám korlátja az $\{x_n\}$ sorozatnak. *5pt*

(ii) $s(t)$ konvex $[-1, 2]$–on. *5pt*

(iii) A korlátos H számhalmaz infimuma. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.01.19. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5}{n^2+3} = 2.$ *6pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = \arcsin x$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját, továbbá becsüljük meg $\arcsin 1/2$ értékét. *9pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{v^2}{(1+2v^3)^{11}}\, dv, \qquad \text{(ii)} \int_1^\infty \frac{du}{u^3+u^2}, \qquad \text{(iii)} \int_1^2 y\ln(2+3y)\, dy\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő. *5pt*

(ii) A $h(x)$ függvény lineárisan approximálható a 2 pontban. *5pt*

(iii) A $\{c_n\}$ sorozat részsorozata a $\{b_n\}$ sorozatnak. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{t\to 2^-} g(t) = 3$. *5pt*

(v) A Lagrange–féle maradéktag (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**