2016.01.05. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^2(x-5)^3$ szélsőértékeit a $[-1, 3]$ halmazon. *7pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n - 3 \cdot n^5}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{2n-3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *33pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{2t}}{\sqrt{t}}\, dt\ , \qquad \text{(ii)} \int_1^\infty \frac{dz}{z^2+3z+2}\ , \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{2t-1}{t-t^2+2}\, dt\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Az E számhalmaznak a -1 supremuma. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konkáv a $[1,5]$–on. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**