2015.12.22. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 3,\ a_n = \dfrac{3a_{n-1}+2}{a_{n-1}+2}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[7]{2-x}$ függvénynek az $a = 1$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját, majd ennek segítségével becsüljük meg $\sqrt[7]{2}$ értékét. *10pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty (\lambda + x)e^{-\lambda x}\, dx \quad (\lambda \geq 0), \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{2}{y^2+6y+9}\, dy, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\, dt.$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{x_n\}$ sorozat felülről korlátos. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat. *5pt*

(iii) A $h(x)$ függvény konvex az $[1, 4]$ intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrál. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**