2015.01.27. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n^2+4}{3-2n}$ sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ függvény szélsőértékeit a $[0, 1]$ halmazon. *5pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{3}{2z^2+3z+1}\,dz, \qquad \text{(ii)} \int_e^\infty \frac{1}{u\ln^2 u}\,du, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{v^2+v-2\sqrt{v}}{\sqrt{v}}\,dv.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A -1 szám felső korlátja az (a_n) sorozatnak. *5pt*

(ii) A 2 szám torlódási pontja az (a_n) sorozatnak. *5pt*

(iii) f folytonos a $[-2,3)$–on. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az $[a,b]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.27. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 5,\ a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}\ \ (n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^{n+1}}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1}\right)^{1-2n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x} \ln x$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^{\pi/2} (t+1)\cos t\ dt, \qquad \text{(ii)}\ \int_4^{\infty} \frac{z-2}{\sqrt{z^2-4z+3}}\ dz, \qquad \text{(iii)}\ \int_1^2 \frac{2y^2+y}{1-2y}\ dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos a 2 pontban. *5pt*

(iii) $f(x)$ lineárisan approximálható a–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$. *5pt*

(v) Az E számhalmaz felsőhatár–tulajdonságú. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**