2015.01.20. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 5,\ a_n = \dfrac{3a_{n-1}+2}{a_{n-1}+2}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *12pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[7]{2-x}$ függvénynek az $a = \beta$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját. *8pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \ln x^2$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 (\lambda+1)e^{-\lambda x}\, dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty \frac{2}{y^2+6y+9}\, dy, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 t\sin(t+2)\, dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konvex az $[1,5]$ intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrál. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.20. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Lineáris transzformációk segítségével ábrázoljuk az $f(x) = \ln(3-2x)$ függvényt. *5pt*

2. Definíció szerint és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3}{n-2n^2} = -\dfrac{1}{2}$. *10pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi/4} \sin^2 t \, dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{y^3+1}{2-y}\, dy, \qquad \text{(iii)} \int_1^\infty \frac{z+2}{z^2+2z+2}\, dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) Az E halmaznak a 3 infimuma. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek helyi minimuma van $x = 2$–ben. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$. *5pt*

(v) Cauchy–féle maradéktag. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**