2015.01.13. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n+1}{3-n+2n^2} = \infty$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3}-1}{1-\sqrt[n]{9}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \frac{x}{e^x(1-x)}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)} \int_2^3 \frac{u^3+u+1}{u^2-1}\, du, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty v e^{1-v^2}\, dv\ .$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 3. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ szigorúan monoton csökken a $[0,2]$–on. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek inflexiós pontja van az $x=-2$ helyen. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\infty$. *5pt*

(v) Az integrálható $f(x)$ függvény integrálközepe a $[c,d]$–on. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.01.13. Kalkulus I. NÉV:..................................

B csoport EHA:..................................

`FELADATOK:`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-3}{3n-11}$ sorozatot. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n-\sqrt[3]{n^4+3}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)^{n+3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi} p \sin p \; dp, \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^{0} t^2(t^3+1)^7 \; dt, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{y+1}{\sqrt{y}} \; dy.$$

Segédlet:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. *5pt*

(ii) A -3 alsó korlátja $f(x)$–nek. *5pt*

(iii) Az E halmaz megszámlálhatóan végtelen. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux-féle alsó integrál. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**