

FELADATOK:

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 1$, $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ ($n > 1$) rekurzív sorozatot. 10pt

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: 10pt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8^n - 3 \cdot 5^n}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{2n-3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln |x|$ függvényt. 20pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 25pt

$$(i) \int_0^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt, \quad (ii) \int_1^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 3z + 2}.$$

Segédlet:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), & \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, & \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, & \int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C. \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

- (i) Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos. 5pt
- (ii) Az E számhalmaznak a -2 supremuma. 5pt
- (iii) Az $f(x)$ függvénynek konkáv a $[3, 5]$ -on. 5pt
- (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$. 5pt
- (v) Darboux-féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érní. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 - e^2} + 2x$ függvénynek az $x = e$ pontba húzott érintőegyenésének az egyenletét. 5pt

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: 10pt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n^3}{\pi - 2^{3n}}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{x^2 - 1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3\sqrt{x^2}$ függvényt. 15pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 35pt

$$(i) \int_0^1 \frac{x+1}{x^2-6x+9} dx, \quad (ii) \int_1^e s \ln s ds, \quad (iii) \int_2^3 \frac{t}{\sqrt[3]{t^2-4}} dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

- (i) Az $\{a_n\}$ sorozat konvergál -2 -hez. 5pt
- (ii) Az $f(x)$ függvénynek helyi maximuma van 1 -ben. 5pt
- (iii) Az $f(x)$ függvény differenciálható a c pontban. 5pt
- (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$. 5pt
- (v) Az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos a $[-2, 3]$ -on. 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgálható!**