2014.01.28. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+1}{2n^2-1} = \frac{3}{2}$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n+3} - \sqrt{n^2+3n-1}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-2}\right)^{n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-1/x}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt\ , \qquad \text{(ii)} \int_1^{\infty} \frac{5}{u^2+3} du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek a–ban helyi minimuma van. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény Riemann-integrálható $[a, b]$-n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.01.28. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját, segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{3/2}$ értékét és a hiba nagyságát. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt[n]{2}}{1-\sqrt[n]{8}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-4}\right)^{1+2n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 z \operatorname{arctg} z\,dz\ , \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható az 1 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növő az I intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az E korlátos számhalmaz supremuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**