2014.01.07. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ függvénynek az $x_0=-1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenesének egyenletét. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}-1}{\sqrt[3]{n^4-2n+3}},\qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-n}{3n+4}\right)^{2n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{x^2}}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^{\sqrt{\pi}} 3u\sin u^2 du,\qquad \text{(ii)}\ \int_2^{\infty}\frac{3}{v^2+v-2}dv.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1),\qquad \int\frac{1}{x+a}dx=\ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int\cos x dx=\sin x+C,\qquad \int\sin x dx=-\cos x+C,\qquad \int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+C,$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg} x+C,\qquad \int\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg} x+C,$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C,\qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,\qquad \int\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke -1. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható a 3 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény monoton csökkenő az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 4} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény integrálfüggvénye. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2014.01.07. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n^2+1}{1-3n+2n^2} = \infty$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-n+2} - \sqrt{n^2+3n+1}), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sin\frac{2}{n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x+2-3\sqrt[3]{(x+2)^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_e^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^3 \frac{y+1}{y^2-y-2} dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton növő. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konvex az I intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**