

FELADATOK:

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 3$, $a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}$ ($n > 1$) rekurzív sorozatot. 10pt

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: 10pt

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n+1}), \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^n - (-1)^n}{3^n - 4 \cdot 2^n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \cdot e^{-1/x^2}$ függvényt. 20pt

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: 25pt

$$(i) \int_0^1 \sqrt[3]{t} \ln t dt, \quad (ii) \int_0^1 \frac{1+4u}{u^2+1} du.$$

Segédlet:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), & \int \frac{1}{x+a} dx &= \ln|x+a| + C, \quad (x \neq -a) \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C, & \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \operatorname{arctg} x + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1), \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx &= \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, & \int \frac{1}{\sin x} dx &= \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C. \end{aligned}$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

- (i) Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens. 5pt
- (ii) Az $f(x)$ függvény differenciálható a -2 pontban. 5pt
- (iii) Az $f(x)$ függvény folytonos az 1 pontban. 5pt
- (iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$. 5pt
- (v) A korlátos E számhalmaz infimuma. 5pt

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**