

2017.12.12.

Kalkulus II. / Matematika 2.

NÉV:.....

A csoport

KÓD:.....

1. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x, y) = x^2\sqrt{1-2y}$ függvény parciális deriváltjait a $P(-1, -3)$ pontban. 20pt

2. Oldjuk meg: $2y'' + (y')^3y = 0$, $y(1) = 1, y'(1) = 4$. 20pt

3. Határozzuk meg $\int_L (2x - y) dx + x \cos y dy$ értékét, ahol L a $(3, 2) \rightarrow (1, -2)$ pontokat összekötő szakasz. 20pt

4. Határozzuk meg

$$\int_H \int \frac{1-2y}{x+2} dxy$$

értékét, ahol H a $(-1, 0), (1, -4)$ és $(1, 6)$ pontok által kijelölt háromszög. 30pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2017.12.19.

Kalkulus II. / Matematika 2.

NÉV:.....

A csoport

KÓD:.....

1. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x, y) = 2x^2 - 3xy$ függvény $P(-1, 2)$ pontbeli, $u(3, -4)$ irányban vett deriváltját. 20pt
2. Oldjuk meg: $x^2 dy + [(1 - 2x)y - x^2] dx = 0$. 20pt
3. Oldjuk meg: $xy'' = (\ln y' - \ln x)y'$. 25pt
4. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 4y$ függvény szélsőérték helyeit és értékeit is a $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. 25pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx$$

1. Határozzuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow A} \frac{x^2y + 3xy^2}{x^2 + y^2}$ határértéket, ahol
a) $A = (0, 0)$, b) $A = (-\infty, 2)$, c) $A = (-1, -\infty)$, d) $A = (\infty, -\infty)$. 20pt
2. Oldjuk meg: $(x + 1)y' = \frac{y}{x}$, $y(2) = 1$. 20pt
3. Határozzuk meg $\int_L (2x + y) dx - (x - y^2) dy$ értékét, ahol L a $P(2, 0)$ középpontú, 3 sugarú körív $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$ pontjait negatív irányban köti össze. 25pt
4. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_1^2 \frac{3e^{-x^2/2}}{x^3} dx$ értékét. 25pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx$$

2018.01.09.

Kalkulus II. / Matematika 2.

NÉV:.....

A csoport

KÓD:.....

1. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{5^n n^2} (2x-3)^{n-2}$ sort. 20pt
2. Oldjuk meg: $(2xe^y - \frac{1}{x}) dx = (2y - x^2 e^y) dy$, $y(1) = 0$. 20pt
3. Határozzuk meg az $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ függvény szélsőértékeit. 25pt
4. Határozzuk meg $\int \int_H (e^{-x^2} + xy) dx dy$ értékét, ahol H a $(0, 0)$, $(3, 3)$ és $(3, -3)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. 25pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx$$

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet: $(1 - x^2)y'' + 3x^2y' = 0$. 20pt
2. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét: 20pt

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n-1} - 4 \cdot 5^{n+1}}{4^{3n+1}}, \quad (b) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{9}{n^2 - n - 2}.$$

3. Határozzuk meg az $\int_L x(1-y)dx + y^2dy$ integrál értékét, ahol L a $(0, 1)$ középpontú, $r = 2$ sugarú, negatív irányítású körvonal $A(0, 3)$ és $B(0, -1)$ pontjait összekötő körív. 25pt
4. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 2xy + y^3$ függvény szélsőértékeit a $(0, -1)$, $(2, 3)$ és $(0, 3)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. 25pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx$$

2018.01.23.

Kalkulus II. / Matematika 2.

NÉV:.....

A csoport

KÓD:.....

1. Oldjuk meg az $xe^{\frac{y}{x}} + y - xy' = 0$, $y(1) = 0$ kezdetiérték-problémát. 20pt
2. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a $f(x, y) = 3x + \sqrt{xy} - 1/y$ függvény $f'_x(1, 4)$ és $f'_y(8, 2)$ parciális deriváltjait. 20pt
3. Határozzuk meg az $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 3^n} (2x-1)^{n-3}$ függvénysor konvergenciatartományát. 20pt
4. Határozzuk meg $\int_H \int \frac{xy}{y+2} dx dy$ értékét, ahol H az $(0, -1)$, $(-2, 2)$ és $(0, 3)$ pontok által kijelölt háromszög. 30pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx$$

2018.01.30.

Kalkulus II. / Matematika 2.

NÉV:.....

A csoport

KÓD:.....

1. Oldjuk meg az $y'' - y' - 2y = e^{2x} + 3x + 2$ differenciálegyenletet. 20pt
2. Határozzuk meg az $f(x, y) = xy + 2x - \ln(x^2y)$ függvény szélsőértékeit. 25pt
3. Határozzuk meg az $\int_L \ln(x + 3) dx - \frac{x}{y + 1} dy$ integrál értékét, ahol L a $(2, 3) \rightarrow (6, 5)$ pontokat összekötő szakasz. 25pt
4. Konvergensek-e a következő számsorok:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{3^n - 2n - 2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n + 3)}{(2n + 1)!}.$$

20pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n, \quad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx$$