2019.01.22. Kalkulus II. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Oldjuk meg az $y'' - y' - 6y = 2x - e^{-2x}$ differenciálegyenletet. *20pt*
2. Határozzuk meg a $\lim\limits_{(x,y)\to A} \dfrac{x^3 - 2xy + 1}{x^2y - xy^2}$ határértéket, ahol

   a) $A = (0,0)$, b) $A = (\infty, -3)$, c) $A = (1, -\infty)$, d) $A = (\infty, \infty)$. *20pt*
3. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény $(x-2)^2 + y^2 = 1$ feltétel melletti szélsőértékeit. *25pt*
4. Határozzuk meg $\displaystyle\int\int_H (e^{-y^2} + 2xy)\, dxy$ értékét, ahol H a $(0,0)$, $(-2,2)$ és $(2,2)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx$$