Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Műszaki matematika 2

Gyakorlati jegyzet

Készítette:
Bogya Norbert, Dudás János, Fülöp Vanda

Utoljára módosítva: 2021. szeptember 22.

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Lektorálta: Szabó Tamás

Grafikai szerkesztő: Tekeli Tamás

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014, „A Szegedi Tudományegyetem oktatási és szolgáltatási teljesítményének innovatív fejlesztése a munkaerő-piaci és a nemzetközi verseny kihívásaira való felkészülés jegyében”.

Tartalomjegyzék

Előszó

Ezt a jegyzetet a teljesség igényével állítottuk össze a műszaki informatikus hallgatóknak tartott Műszaki matematika 2. tárgy gyakorlati részéhez.

Az első 13 fejezetet a gyakorlati óráknak megfelelően alakítottuk ki. Minden egyes részben 3 alfejezetben – Házi feladat, Videók, Kvízek – ismételjük át, egészítjük ki, mélyítjük el, majd kérjük számon az adott gyakorlat anyagát. Részletes megoldások ismertetésével kezdünk, ezt követően további példákon keresztül, több mint 250 videó segítségével fejlesztjük a hallgatók megoldási készséget, végezetül lehetőséget biztosítunk az önértékelésre, a felkészültségük ellenőrzésére.

Biztosak vagyunk abban, hogy a gyakorlaton való aktív részvétel és ezen jegyzet feladatainak megoldása után a hallgató képes matematikai modellek azonosítására, rendszerbe foglalására, emlékezetébe vési és így felismeri a feladattípusokat, felidézi a lehetséges megoldásokat, meghatározza a helyes eljárást és megvalósítja azt. Készségeinek fejlesztése mellett olyan képesség birtokába kerül, melyek segítségével tisztán és egyértelműen elmagyarázza, kifejti eredményét.

A jegyzetben szereplő nevek mindegyike az MTA által jóváhagyott, anyakönyvezhető keresztnév.

A készítők

1.

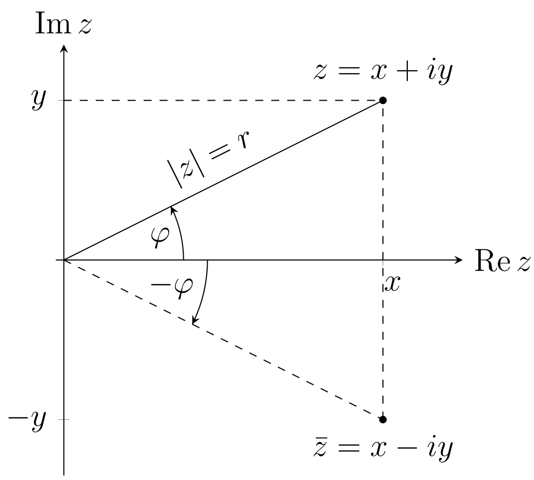
Komplex számok, komplex sorozatok

Házi feladatok

Komplex számok

Egy z komplex szám

- *algebrai alakja:* $z = x + iy$, *ahol* $x, y \in \mathbb{R}$;
- *valós része:* $\operatorname{Re} z = x$;
- *képzetes része:* $\operatorname{Im} z = y$;
- *abszolút értéke:* $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- *argumentuma:*
  $\operatorname{Arg} z = \varphi$, *ahol* $-\pi < \varphi \leq \pi$;
  $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$, *ahol* $k \in \mathbb{Z}$;
- *trigonometrikus alakja:*
  $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$;
- *exponenciális alakja:* $z = re^{i\varphi}$;
- *konjugáltja:* $\overline{z} = x - iy$
  $= r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = re^{-i\varphi}$.



Megjegyzés. A $z = 0$ komplex szám argumentuma nem értelmezett, és definíció szerint mindhárom alakja $z = 0$. ✠

1. Feladat. A $z_1 = 1 + 2i$ és $z_2 = -3 - 4i$ komplex számok esetén határozzuk meg a következő kifejezések értékét ($k = 1,\ 2$).

(a) $\operatorname{Re} z_k$ (b) $\operatorname{Im} z_k$ (c) $\bar{z}_k$ (d) $|z_k|$

Megoldás.

(a) $\operatorname{Re}(1 + 2i) = 1$, $\operatorname{Re}(-3 - 4i) = -3$

(b) $\operatorname{Im}(1 + 2i) = 2$, $\operatorname{Im}(-3 - 4i) = -4$

(c) $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$, $\overline{-3 - 4i} = -3 + 4i$,

(d) $|1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$,
$|-3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

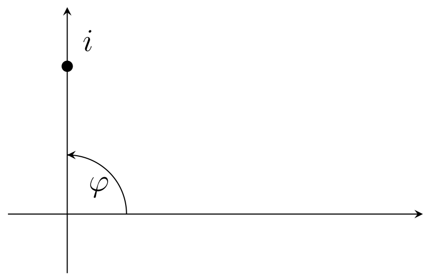
2. Feladat. Határozzuk meg a következő komplex számok argumentumát, $\operatorname{Arg} z$-t.

(a) i (b) $2+i$ (c) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (d) $-2-3i$

Megoldás.

(a) Az i szám a képzetes tengely pozitív felén található, így

$$\operatorname{Arg}(i)=\frac{\pi}{2}.$$



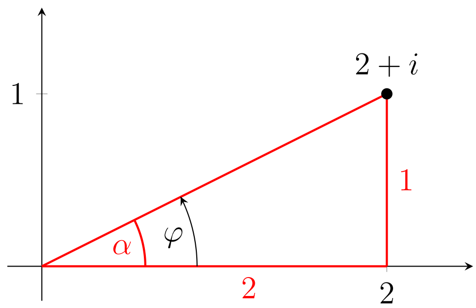
Megjegyzés. Hasonlóan kapjuk, hogy $\operatorname{Arg}(1)=0$, $\operatorname{Arg}(-1)=\pi$ és $\operatorname{Arg}(-i)=-\frac{\pi}{2}$. ✠

(b) Vegyük fel a pontot és rajzoljuk be a piros háromszöget. Ekkor

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

így

$$\operatorname{Arg}(2+i)=\alpha=\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

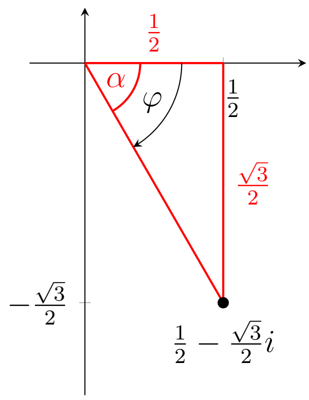


(c) A piros háromszög alapján

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}, \quad \alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},$$

és ekkor

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\varphi=-\alpha=-\frac{\pi}{3}.$$

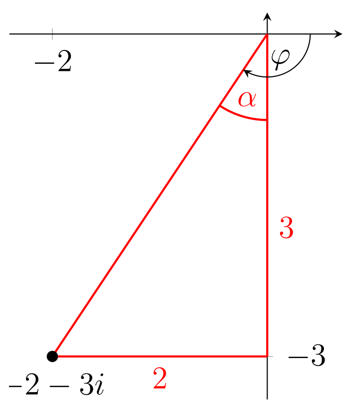


(d) Ebben az esetben

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}, \quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{3},$$

ezért

$$\operatorname{Arg}(-2-3i)=\varphi=-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$
$$=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}.$$



3. Feladat. Írjuk át a következő komplex számokat a másik két alakba:

(a) $z_1 = 1 + i$ és $\bar{z}_1$,
(b) $z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$,
(c) $z_3 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Megoldás.

(a) A z_1 szám az algebrai alakban adott. Az ábra alapján

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{2}\,,$$

továbbá $\varphi = \alpha$ és

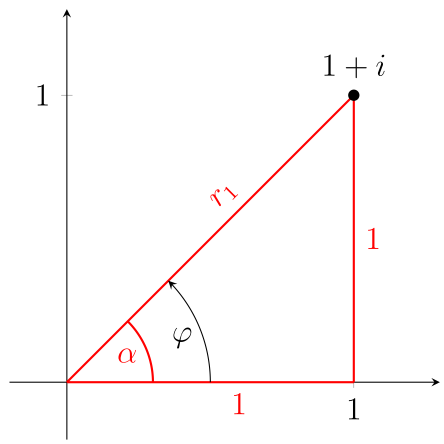
$$\operatorname{tg}\alpha = 1\,, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

miatt

$$\operatorname{Arg} z_1 = \varphi = \frac{\pi}{4}\,.$$

Tehát z_1 másik két alakja:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\,.$$



Innen a konjugált szám alakjai:

$$\bar{z}_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\,.$$

(b) Az exponenciális alak ismert, ebből az $r_2 = 2$ és $\varphi_2 = -\dfrac{\pi}{3}$ értékek leolvashatóak, továbbá

$$\begin{aligned} z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i} &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

(c) A trigonometrikus alakból, a (b) rész alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} z_3 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) &= 3e^{\frac{2}{3}\pi i} \\ &= 3e^{\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)i} = 3e^{\pi i}e^{-\frac{\pi}{3}i} = 3\cdot(-1)\cdot\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\,. \end{aligned}$$

4. Feladat. A $z_1 = 3 + 4i$ és $z_2 = 5 - 2i$ komplex számok esetén adjuk meg az alábbi értékeket algebrai alakban:

(a) $2z_1 + z_2$,
(b) $z_1 z_2$,
(c) z_2^2,
(d) $z_2 \cdot (\bar{z}_2 - 2\operatorname{Im} z_1)$,
(e) $\dfrac{z_2}{z_1}$.

Megoldás. Algebrai alakban megadott komplex számok összeadását és szorzását úgy végezzük el, ahogy azt betűs kifejezéseknél megtanultuk, figyelve arra, hogy $i^2 = -1$. Ezek alapján

(a)
$$2z_1 + z_2 = 2(3+4i) + 5 - 2i = 6 + 8i + 5 - 2i = (6+5) + (8-2)i = 11 + 6i\,,$$

(b)
$$z_1 \cdot z_2 = (3+4i)(5-2i) = 15 - 6i + 20i - 8i^2 = 15 + 14i + 8 = 23 + 14i\,.$$

(c) A pozitív egész kitevős hatványozás is szorzás, így

$$z_2^2 = (5-2i)^2 = (5-2i)(5-2i) = 25 - 10i - 10i + 4i^2 = 25 - 20i - 4 = 21 - 20i\,.$$

MEGJEGYZÉS. Magasabb hatványok meghatározása meglehetősen hosszadalmas számolással jár. ✠

(d)
$$z_2 \cdot (\bar{z}_2 - 2\,\mathrm{Im}\, z_1) = (5-2i)\cdot(5+2i-2\cdot 4) = (5-2i)(-3+2i)$$
$$= -15 + 10i + 6i - 4i^2 = -15 + 16i + 4 = -11 + 16i$$

(e) Ha a tört nevezőjében komplex szám szerepel, akkor bővítünk a nevező konjugáltjával. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5-2i}{3+4i} = \frac{5-2i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{7-26i}{25} = \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i\,.$$

5. Feladat. A $z_1 = \sqrt{3} - i$ és $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ komplex számok exponenciális alakjának segítségével határozzuk meg a következő műveletek eredményét:

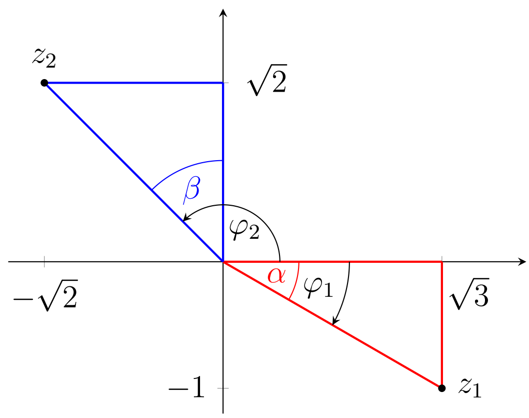
(a) $\bar{z}_1 \cdot z_2$, (b) z_2^7, (c) $\dfrac{z_1^{14}}{z_2}$.

Megoldás. Először meghatározzuk a két komplex szám exponenciális alakját. Jól láthatóan $|z_1| = 2$ és $|z_2| = 2$. Mivel

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{és} \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1\,,$$

amiből
$$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{\pi}{4}\,,$$

ezért
$$\varphi_1 = -\alpha = -\frac{\pi}{6} \quad \text{és} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{3}{4}\pi\,.$$



Tehát az exponenciális alakok a következők:

$$z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} \quad \text{és} \quad z_2 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}\,.$$

A műveleteket a hatványozás jól ismert azonosságai alapján végezzük el. Ugyanakkor figyeljünk arra, hogy a végeredmény $re^{i\varphi}$ alakjában a φ szögnek $-\pi$ és π közé kell esnie.

(a)
$$\bar{z}_1 \cdot z_2 = \overline{2e^{-\frac{\pi}{6}i}} \cdot 2e^{\frac{3}{4}\pi i} = 2e^{\frac{\pi}{6}i} \cdot 2e^{\frac{3}{4}\pi i} = 4e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3}{4}\pi\right)i} = 4e^{\frac{11}{12}\pi i}$$
a végső alak, mert $-\pi < \dfrac{11}{12}\pi \leq \pi$.

(b)
$$z_2^7 = \left(2e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^7 = 2^7\left(e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^7 = 2^7 e^{7\cdot\frac{3}{4}\pi i} = 2^7 e^{\frac{21}{4}\pi i} = 2^7 e^{\left(6\pi-\frac{3}{4}\pi\right)i} = 2^7 e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

(c)
$$\frac{z_1^{14}}{z_2} = \frac{\left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)^{14}}{2e^{\frac{3}{4}\pi i}} = \frac{2^{14}e^{-\frac{14}{6}\pi i}}{2e^{\frac{3}{4}\pi i}} = 2^{13}e^{-\frac{37}{12}\pi i} = 2^{13}e^{-\left(4\pi-\frac{11}{12}\pi\right)i} = 2^{13}e^{\frac{11}{12}\pi i}$$

Az exponenciális alakban adott $z = re^{i\varphi}$ komplex szám n–edik gyökei:
$$\omega_k = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$
ahol $\sqrt[n]{r}$ a szokásos, valós számokon értelmezett gyökvonás.

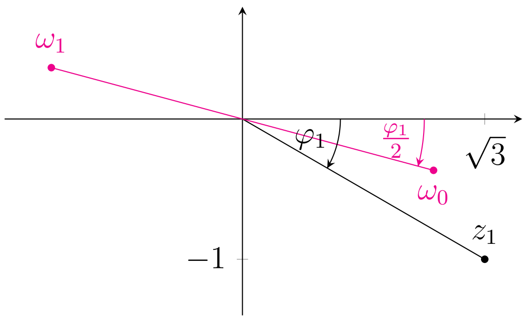
MEGJEGYZÉS. Egy nem nulla komplex számnak n darab különböző n–edik gyöke van. ✠

6. Feladat. A $z_1 = \sqrt{3} - i$ és $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ exponenciális alakjának segítségével határozzuk meg:

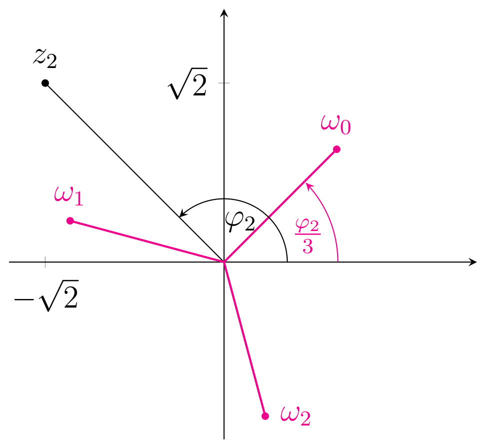
(a) z_1 négyzetgyökeit, (b) z_2 köbgyökeit.

Megoldás. A gyökök meghatározásához írjuk át exponenciális alakba a komplex számokat. Az előző feladat alapján $z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ és $z_2 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

(a) A fenti összefüggést $n = 2$–re alkalmazva kapjuk z_1 négyzetgyökeit:
$$\omega_k = \sqrt{2}e^{\frac{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2}i} = \sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{12}+k\pi\right)i},$$
ahol $k = 0, 1$, azaz
$$k=0: \qquad \omega_0 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i},$$
$$k=1: \qquad \omega_1 = \sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)i} = \sqrt{2}e^{\frac{11}{12}\pi i}.$$



(b) Hasonlóan a $z_2 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$ köbgyökei
$$\omega_k = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}i} = \sqrt[3]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi k\right)i},$$
ahol $k = 0,\ 1,\ 2$, tehát
$$\omega_0 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{4}i},$$
$$\omega_1 = \sqrt[3]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi\right)i} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{11}{12}\pi i},$$
$$\omega_2 = \sqrt[3]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\pi\right)i} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{19}{12}\pi i} = \sqrt[3]{2}e^{-\frac{5}{12}\pi i}.$$



7. Feladat. Írjuk fel gyöktényezős alakban a $z^3 + i$ kifejezést.

Megoldás. Első lépésben meghatározzuk a

$$z^3 + i = 0$$

egyenlet gyökeit. Átrendezve:

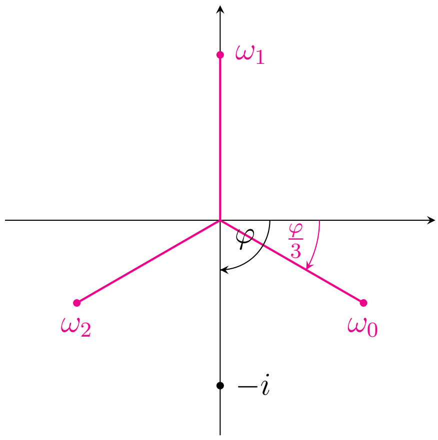
$$z^3 = -i\,.$$

Tehát

$$-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

köbgyökeit keressük, amelyek

$$\omega_k = e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i}, \quad k = 0,\,1,\,2\,.$$



Így a három gyök:

$$\omega_0 = e^{-\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,,$$
$$\omega_1 = e^{\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi\right)i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i\,,$$
$$\omega_2 = e^{\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}\pi\right)i} = e^{\frac{7}{6}\pi i} = e^{-\frac{5}{6}\pi i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,.$$

Ekkor a keresett gyöktényezős alak $(z-\omega_0)(z-\omega_1)(z-\omega_2)$, azaz

$$z^3 + i = \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z-i)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\,.$$

Komplex sorozatok

A komplex z_n sorozat határértéke vagy egy z_0 komplex szám, vagy végtelen, vagy nem létezik. A komplex z_n sorozat határértéke végtelen, ha a valós $|z_n|$ sorozat határértéke végtelen.

8. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $z_n = \dfrac{4 - n^2 i}{3n^2 - 2ni}$

(b) $z_n = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)^n$

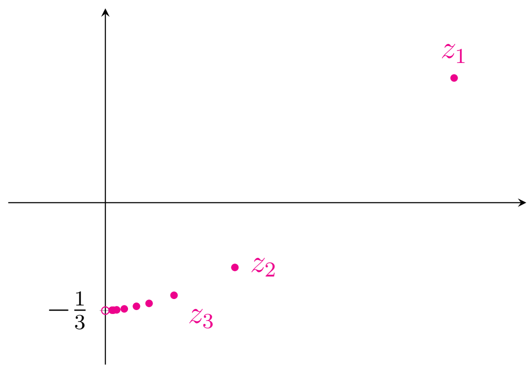
(c) $z_n = \dfrac{i - n^3}{2n^2 + ni}$

(d) $z_n = n \cdot \dfrac{i^n}{2 + \frac{1}{n}i}$

Megoldás. A komplex sorozatok határértékét hasonlóan vizsgájuk, mint a valós sorozatokét.

(a) A domináns tagok kiemelésével kapjuk, hogy z_n konvergens:

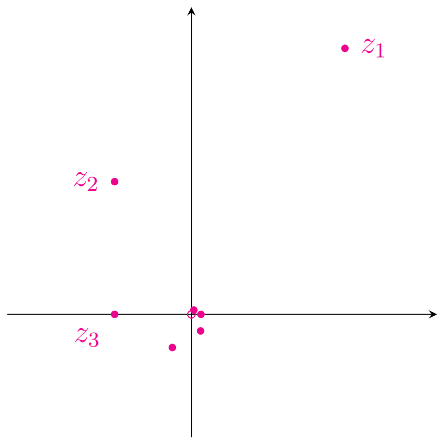
$$z_n = \frac{4 - n^2 i}{3n^2 - 2ni} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{\frac{4}{n^2} - i}{3 - \frac{2i}{n}} = \frac{\frac{4}{n^2} - i}{3 - \frac{2}{n}i} \to \frac{-i}{3} = -\frac{1}{3}i\,.$$

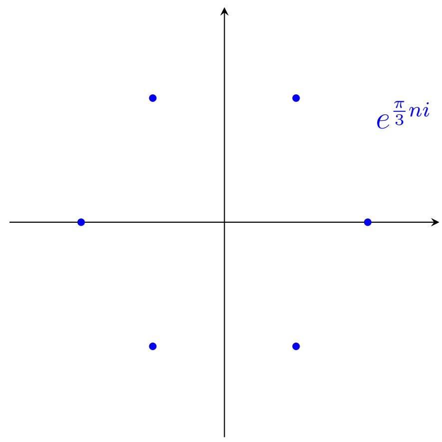


(b) A hatványozás miatt áttérünk az exponenciális alakra:

$$z_n = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^n = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{\pi}{3}ni} \to 0\,,$$

mivel $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, a második tényező pedig $\left|e^{\frac{\pi}{3}ni}\right| = 1$ alapján korlátos.





Megjegyzés. Az $e^{\frac{\pi}{3}ni}$ kifejezés az egységsugarú körvonal hat pontját, a $z^6 = 1$ gyökeit adja meg. Így a $d_n = e^{\frac{\pi}{3}ni}$ sorozatnak *hat* torlódási pontja van, ezért d_n határértéke nem létezik. ✠

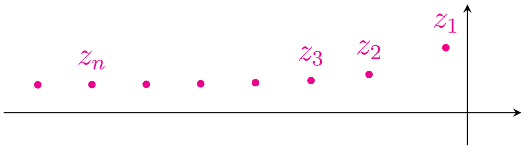
(c) A domináns tagokat kiemelve kapjuk, hogy

$$z_n = \frac{i - n^3}{2n^2 + ni} = \frac{n^3}{n^2} \cdot \frac{\frac{i}{n^3} - 1}{2 + \frac{1}{n}i} = n \cdot \frac{\frac{i}{n^3} - 1}{2 + \frac{1}{n}i}\,.$$

Az első tényező végtelenhez tart, a második pedig $-\frac{1}{2}$-hez. Komplex sorozat határértéke azonban nem lehet $-\infty$. Ekkor a $|z_n|$ valós sorozatot kell vizsgálnunk:

$$|z_n| = \left|n \cdot \frac{\frac{i}{n^3} - 1}{2 + \frac{1}{n}i}\right| = n \cdot \frac{\left|\frac{i}{n^3} - 1\right|}{\left|2 + \frac{1}{n}i\right|} = n \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{n^6} + 1}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}} \to \text{„}\infty \cdot \frac{1}{2}\text{''} = \infty\,,$$

tehát a z_n sorozat határértéke ∞.



(d) A (b) feladathoz hasonlóan a sorozat második szorzótényezője

$$\frac{i^n}{2+\frac{1}{n}i}$$

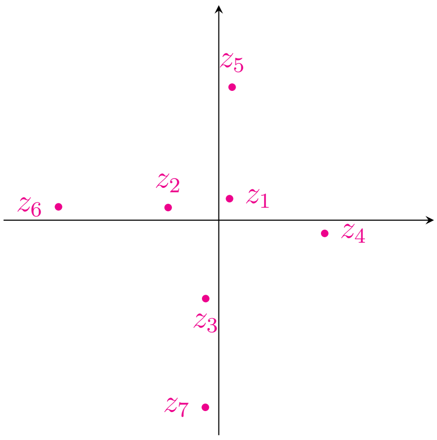
nem konvergens, négy torlódási pontja van:

$$\frac{1}{2}\,,\ \ \frac{1}{2}i\,,\ \ -\frac{1}{2}\,,\ \ -\frac{1}{2}i\,.$$

Ugyanakkor

$$|z_n| = \left| n \cdot \frac{i^n}{2+\frac{1}{n}i} \right| = n \cdot \frac{|i^n|}{\left|2+\frac{1}{n}i\right|} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} \to \text{„}\infty \cdot \frac{1}{2}\text{”} = \infty$$

alapján $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.



Videók

Komplex számok

1. Feladat. Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 3 - i$. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét.

(a) $\operatorname{Re} z_i$
(b) $\operatorname{Im} z_i$
(c) $\bar{z}_i$
(d) $|z_i|$
(e) $z_1 + 3z_2$
(f) $z_2 - \operatorname{Im} z_1$
(g) $\bar{z}_1 z_2$
(h) $\operatorname{Im} z_2 \cdot z_1^2$
(i) $\dfrac{i\bar{z}_2}{z_1}$
(j) $\dfrac{\operatorname{Re} z_1}{z_2}$

Megoldás.

(a) $\operatorname{Re} z_1 = 3, \quad \operatorname{Re} z_2 = 3$
(b) $\operatorname{Im} z_1 = 2, \quad \operatorname{Im} z_2 = -1$
(c) $\bar{z}_1 = 3 - 2i, \quad \bar{z}_2 = 3 + i$
(d) $|z_1| = \sqrt{13}, \quad |z_2| = \sqrt{10}$
(e) $12 - i$
(f) $1 - i$
(g) $7 - 9i$
(h) $-5 - 12i$
(i) $\dfrac{3}{13} + \dfrac{11}{13}i$
(j) $\dfrac{9}{10} + \dfrac{3}{10}i$

2. Feladat. Adjuk meg a következő komplex számokat trigonometrikus és exponenciális alakban is.

(a) $z_1 = 3 + 2i$
(b) $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$
(c) $\bar{z}_2$

Megoldás.

(a) $\sqrt{13}(\cos 0,58 + i \sin 0,58) = \sqrt{13}e^{0,58i}$

(b) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

(c) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

3. Feladat. Adjuk meg a következő komplex számokat a másik két alakban.

(a) $z_3 = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right), \quad \dfrac{1}{z_3}$
(b) $z_4 = 2e^{\frac{11}{3}\pi i}$

Megoldás.

(a) $3e^{-\frac{\pi}{4}i} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{3}{\sqrt{2}}i, \quad \dfrac{1}{3}e^{\frac{\pi}{4}i} = \dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(b) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

A következő feladatokban adott z_i komplex számok esetén határozzuk meg a következő kifejezések értékét.

4. Feladat. $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

(a) $z_1 \cdot z_2$ (b) z_1^3 (c) z_2^3

Megoldás. YouTube

(a) $\sqrt{6}-\sqrt{2}+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i$ (b) 8 (c) $-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$

5. Feladat. $z_1=-1+\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

(a) $\dfrac{z_1}{z_2^3}$ (b) $z_2^3 \cdot \operatorname{Im} z_2$ (c) $i \cdot z_1$

Megoldás. YouTube

(a) $\dfrac{1}{4}e^{-\frac{7}{12}\pi i}$ (b) $8\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ (c) $2e^{-\frac{5}{6}\pi i}$

6. Feladat. $z_1=1+\sqrt{3}i$, $z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$, $z_3=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ és $z_4=-i$.

(a) z_1^2 (b) z_1^3 (c) z_1^4 (d) z_2^3 (e) z_3^3 (f) z_4^3

Megoldás. YouTube

(a) $4e^{\frac{2}{3}\pi i}$ (b) $8e^{\pi i}$ (c) $16e^{\frac{4}{3}\pi i}$ (d) i (e) i (f) i

7. Feladat. $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}i$, $z_2=-i$.

(a) $\sqrt{z_1}$ (b) $\sqrt{z_2}$

Megoldás. YouTube

(a) $w_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{12}i}$, $\quad w_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{11}{12}\pi i}$ (b) $w_0=e^{-\frac{\pi}{4}i}$, $\quad w_1=e^{\frac{3}{4}\pi i}$

8. Feladat. $z_1=-1+i$, $z_2=-5$.

(a) $\sqrt[3]{z_1}$ (b) $\sqrt[4]{z_2}$

Megoldás. YouTube

(a) $w_0=\sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\quad w_1=\sqrt[6]{2}e^{\frac{11}{12}\pi i}$, $\quad w_2=\sqrt[6]{2}e^{-\frac{5}{12}\pi i}$

(b) $w_0=\sqrt[4]{5}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\quad w_1=\sqrt[4]{5}e^{\frac{3}{4}\pi i}$, $\quad w_2=\sqrt[4]{5}e^{-\frac{3}{4}\pi i}$, $\quad w_3=\sqrt[4]{5}e^{-\frac{1}{4}\pi i}$

9. Feladat. Írjuk fel szorzat alakban a következő kifejezéseket.

(a) $z^2 - 2$
(b) $z^2 + 3$
(c) $z^2 + i$
(d) $z^2 + i \cdot z$
(e) $z^2 - 6z + 10$

Megoldás.

(a) $\left(z - \sqrt{2}\right)\left(z + \sqrt{2}\right)$

(b) $\left(z - \sqrt{3}i\right)\left(z + \sqrt{3}i\right)$

(c) $\left(z - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

(d) $z(z + i)$

(e) $(z - 3 - i)(z - 3 + i)$

10. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket.

(a) $z^3 + 8 = 0$
(b) $z^4 + 1 = 0$
(c) $z^3 - i = 0$

Megoldás.

(a) $w_0 = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), \quad w_1 = -2, \quad w_2 = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

(b) $w_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i, \quad w_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i, \quad w_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i, \quad w_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

(c) $w_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{1}}{2}i, \quad w_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{1}}{2}i, \quad w_2 = -i$

Komplex sorozatok

A következő feladatokban adjuk meg a z_n sorozat határértékét.

11. Feladat. $z_n = \dfrac{n + 2i}{3n - i}$

Megoldás. $\dfrac{1}{3}$

12. Feladat.

(a) $z_n = \dfrac{2+ni}{3n+5i}$ (b) $z_n = \dfrac{ni-3n}{\sqrt{n}+2ni}$ (c) $z_n = \dfrac{3\sqrt{n^3}-2\pi i}{n-n^2 i}$

Megoldás.

(a) $\dfrac{i}{3}$ (b) $\dfrac{i-3}{2i}$ (c) 0

13. Feladat.

(a) $z_n = \dfrac{5n+n^2 i^n}{n^2+2\sqrt{ni}}$ (b) $z_n = \dfrac{5n+ni^n}{n^2+2\sqrt{ni}}$ (c) $z_n = \dfrac{5n+n^2 i^n}{n+2\sqrt{ni}}$

Megoldás.

(a) $\nexists$ (b) 0 (c) ∞

14. Feladat.

(a) $z_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ (b) $z_n = (1-i)^n$

Megoldás.

(a) 0 (b) ∞

15. Feladat. $z_n = \left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n$

Megoldás. e^i

Kvízek

A csoport

1. Feladat. Adjuk meg a $z_n = \dfrac{2n^2 - n^3 \cdot i^{2n}}{5n^3 - \sqrt[3]{n}i}$ sorozat határértékét.

2. Feladat. Algebrai alakban adjuk meg a $z^3 = i$ egyenlet megoldásait.

B csoport

1. Feladat. Algebrai alakban adjuk meg a $\left(\sqrt{3} + i\right)^{14}$ számot.

2. Feladat. Exponenciális alakban adjuk meg a $z = 2 + 2i$ komplex szám köbgyökeit.

C csoport

Feladat. Algebrai alakban adjuk meg az $\dfrac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3} - i\right)^2}$ számot.

D csoport

Feladat. Határozzuk meg a $z_n = \dfrac{3n - (5n+1)i}{2n - ni}$ sorozat határérték. Adjuk meg a határérték algebrai és exponenciális alakját is.

Kvízek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása.

$$z_n = \frac{2n^2 - n^3 \cdot i^{2n}}{5n^3 - \sqrt[3]{n}i} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{\frac{2}{n} - i^{2n}}{5 - \frac{i}{n^{8/3}}} = 1 \cdot \frac{\frac{2}{n} - (-1)^n}{5 - \frac{i}{n^{8/3}}}$$

A $(-1)^n$ sorozat felváltva vesz fel -1 és $+1$ értékeket. Tehát

$$z_{2n} = \frac{\frac{2}{n} - 1}{5 - \frac{i}{n^{8/3}}} \to -\frac{1}{5}, \qquad \text{valamint} \qquad z_{2n+1} = \frac{\frac{2}{n} - (-1)}{5 - \frac{i}{n^{8/3}}} \to 1 \cdot \frac{-(-1)}{5} = \frac{1}{5}.$$

Ezért a z_n sorozatnak nincs határértéke. 1 pt

2. Feladat megoldása. Mivel $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$, így

$$z^3 = i = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$$

alapján a megoldások

$$\omega_k = \sqrt[3]{1} \cdot e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i} = e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)i}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,$$ 2 pt

azaz

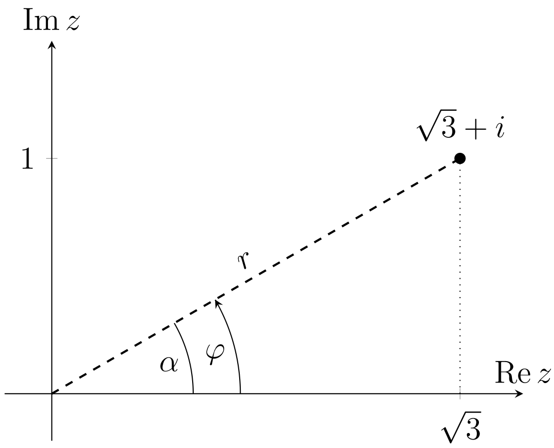
- $\omega_0 = e^{\frac{\pi}{6}i} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$
- $\omega_1 = e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\cdot 1\right)i} = e^{\frac{5}{6}\pi i} = e^{\pi i - \frac{\pi}{6}i} = e^{\pi i}e^{-\frac{\pi}{6}i} = -1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $\omega_2 = e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\cdot 2\right)i} = e^{\frac{3}{2}\pi i} = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i.$ 3 pt

B csoport

1. Feladat megoldása.

Az ábra alapján

$$r = \left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$



és

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{amiből} \quad \varphi = \alpha = \frac{\pi}{6},$$

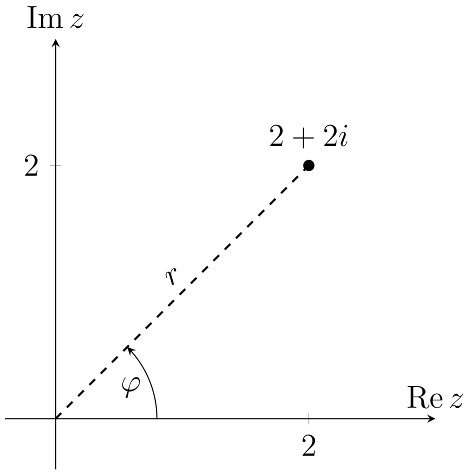
tehát $z = re^{\varphi i} = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$. Így

1 pt

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{14} = \left(2e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^{14} = 2^{14}e^{\frac{14\pi}{6}i} = 2^{14}e^{\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)i} = 2^{14}e^{\frac{\pi}{3}i}$$
$$= 2^{14}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^{14}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{13} + 2^{13}\sqrt{3}i\,.$$

2. Feladat megoldása. Az ábra alapján

$$r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}\,, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$



és így

$$z = re^{\varphi i} = \sqrt{8}e^{\frac{\pi}{4}i}\,.$$

2 pt

Felhasználva, hogy

$$\omega_k = \sqrt[3]{\sqrt{8}e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}i}}, \quad k = 0,\ 1,\ 2;$$

azt kapjuk, hogy

- $\omega_0 = \sqrt[3]{\sqrt{8}e^{\frac{\frac{\pi}{4}}{3}i}} = \sqrt[6]{8}e^{\frac{\pi}{12}i}$,
- $\omega_1 = \sqrt[3]{\sqrt{8}e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}i}} = \sqrt[6]{8}e^{\frac{9}{12}\pi i}$,
- $\omega_2 = \sqrt[3]{\sqrt{8}e^{\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}i}} = \sqrt[6]{8}e^{\frac{17}{12}\pi i} = \sqrt[6]{8}e^{\left(2\pi-\frac{7}{12}\pi\right)i} = \sqrt[6]{8}e^{-\frac{7}{12}\pi i}$.

3 pt

C csoport

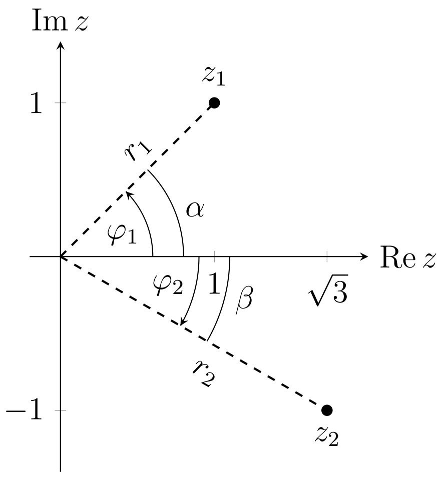
Feladat megoldása. A

$$z_1 = 1 + i = r_1 e^{i\varphi_1}$$

és

$$z_2 = \sqrt{3} - i = r_2 e^{i\varphi_2}$$

jelölésekkel élve, az ábra alapján kapjuk, hogy



$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,, \quad r_2 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

valamint

$$\operatorname{tg}\alpha = 1 \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

1 pt

Ezek alapján

$$\varphi_1 = \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{és} \quad \varphi_2 = -\beta = -\frac{\pi}{6}\,.$$

Így

$$z_1 = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i} \quad \text{és} \quad z_2 = 2 e^{-\frac{\pi}{6} i}\,,$$

2 pt

tehát

$$z_1^4 = \left(\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{4\frac{\pi}{4} i} = 4e^{\pi i} \quad \text{és} \quad z_2^2 = \left(2e^{-\frac{\pi}{6} i}\right)^2 = 2^2 e^{2\left(-\frac{\pi}{6}\right) i} = 4e^{-\frac{\pi}{3} i}\,.$$

Ezért

$$\frac{z_1^4}{z_2^2} = \frac{4e^{\pi i}}{4e^{-\frac{\pi}{3} i}} = e^{\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) i} = e^{\pi i} e^{\frac{\pi}{3} i} = -1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\,.$$

3 pt

D csoport

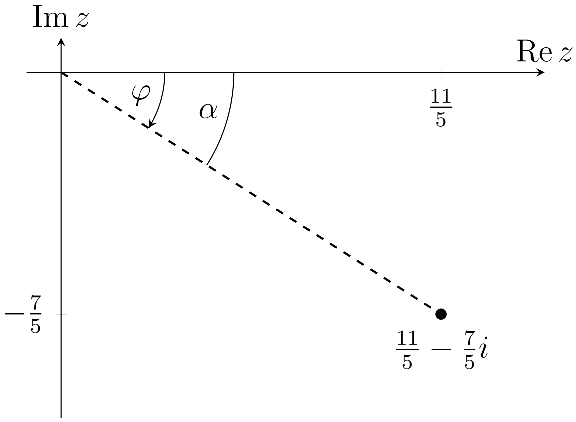
Feladat megoldása.

$$z_n = \frac{3n-(5n+1)i}{2n-ni} = \frac{n}{n}\cdot\frac{3-\left(5+\frac{1}{n}\right)i}{2-i} = \frac{3-\left(5+\frac{1}{n}\right)i}{2-i} \to \frac{3-5i}{2-i}$$ 1 pt

Az algebrai alak:

$$z = \frac{3-5i}{2-i} = \frac{3-5i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} = \frac{6+3i-10i+5}{4-(-1)} = \frac{11-7i}{5} = \frac{11}{5}-\frac{7}{5}i\,.$$ 2 pt

Az exponenciális alak:



$$r = |z| = \sqrt{\frac{121}{25}+\frac{49}{25}} = \sqrt{\frac{170}{25}} = \frac{\sqrt{170}}{5}\,,$$

valamint az ábra alapján

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{7}{11}$$

és

$$\varphi = \operatorname{Arg}(z) = -\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{7}{11}\,.$$

Tehát

$$z = re^{i\varphi} = \frac{\sqrt{170}}{5}e^{-i\operatorname{arctg}\frac{7}{11}}\,.$$ 3 pt

2.

Komplex sorok, görbék

Házi feladatok

Komplex sorok

1. Feladat. Abszolút konvergens–e a $\sum \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^n}{2^n\left(n^3+n\right)}$ számsor?

Megoldás. A $\sum |z_n|$ sor egy pozitív tagú valós számsor. Az általános tag határértékére kapjuk, hogy

$$|z_n| = \frac{|\sqrt{3}-i|^n}{2^n\left(n^3+n\right)} = \frac{2^n}{2^n\left(n^3+n\right)} = \frac{1}{n^3+n} = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to 0\,,$$

tehát további vizsgálat szükséges. Az összehasonlító kritérium alapján

$$\sum |z_n| \sim \sum \frac{1}{n^3}\,.$$

Mivel $\sum \frac{1}{n^3}$ konvergens, ezért $\sum |z_n|$ is az, így az eredeti sor abszolút konvergens.

2. Feladat. Tekintsük a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3i)^n n}{n^2-1}(2z-1+i)^{n-3}$$

paraméteres számsort.

(a) Határozzuk meg és ábrázoljuk is azon z paraméterek halmazát, melyek esetén a sor abszolút konvergens.
(b) Hogyan viselkedik a sor a $z=1$ paraméter érték esetén?
(c) Hogyan viselkedik a sor a $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$ pontban?

Megoldás.

(a) A sorozat első néhány tagját kiírva kapjuk, hogy

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3i)^n n}{n^2-1}(2z-1+i)^{n-3} = \frac{18i^2}{3}(2z-1+i)^{-1} + \frac{81i^3}{8} + \frac{3^4\cdot 4i^4}{15}(2z-1+i) + \ldots\,,$$

ezért $2z-1+i=0$, azaz $z=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ esetén a sor nincs értelmezve, tehát a paraméter értéke nem lehet ez a szám.

Az abszolút konvergenciához vizsgáljuk a $\sum |z_n|$ sort. Ekkor

$$|z_n| = \left|\frac{(3i)^n n}{n^2-1}(2z-1+i)^{n-3}\right| = \frac{3^n n}{n^2-1}|2z-1+i|^{n-3}\,,$$

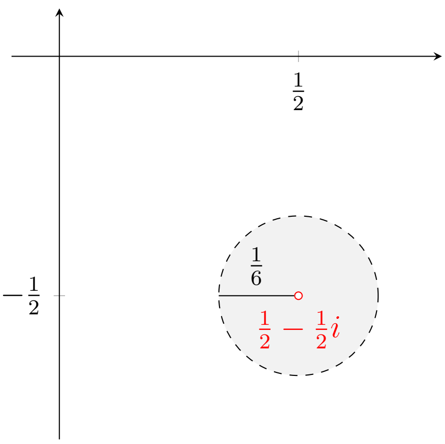
és

$$\begin{aligned}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} &= |z_{n+1}|\cdot\frac{1}{|z_n|} = \frac{3^{n+1}(n+1)}{(n+1)^2-1}\cdot|2z-1+i|^{n-2}\cdot\frac{n^2-1}{3^n n}\cdot\frac{1}{|2z-1+i|^{n-3}}\\ &= 3\cdot\frac{n^2-1}{(n+1)^2-1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot|2z-1+i|\\ &= 3\cdot\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\cdot|2z-1+i| \to 3|2z-1+i|\,.\end{aligned}$$

Így, a hányados kritérium alapján a sor abszolút konvergens, ha

$$\begin{aligned}3|2z-1+i| &< 1\\ |2z-1+i| &< \frac{1}{3}\\ \left|z-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right| &< \frac{1}{6}\,,\end{aligned}$$

azaz az $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ középpontú $\frac{1}{6}$ sugarú körlap belsejében, kivéve a kör középpontját, ahol a sor nincs értelmezve. A sor ezen a körlapon kívül divergens.



A körvonalon, azaz $|2z-1+i|=\frac{1}{3}$ esetén további vizsgálat szükséges. Ekkor

$$\sum |z_n| = \sum \frac{3^n n}{n^2-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} = \sum \frac{3^n n}{n^2-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \sum \frac{3^3 n}{n^2-1}\,,$$

és

$$|z_n| = \frac{n}{n^2}\cdot\frac{3^3}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{3^3}{1-\frac{1}{n^2}} \to 0\,.$$

Innen, az összehasonlító teszt alapján kapjuk, hogy

$$\sum |z_n| \sim \sum \frac{1}{n}\,.$$

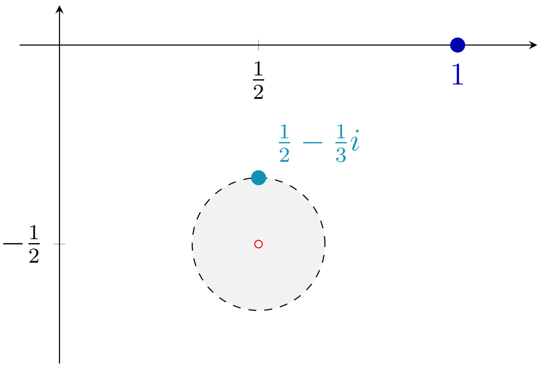
A $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért a vizsgált sor nem abszolút konvergens a körvonalon.

(b) A $z = 1$ pont jól láthatóan a körön kívül található, így itt a sor divergens.

(c) A $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ pont távolsága a kör középpontjától

$$\left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right| = \left| \frac{1}{6}i \right| = \frac{1}{6},$$

ami pontosan a kör sugara. Tehát ez a pont a körvonalon van, ahol tudjuk, hogy a sor nem abszolút konvergens. Így vizsgálnunk kell a $\sum z_n$ sor konvergenciáját.



A paraméter értékét behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum z_n &= \sum \frac{(3i)^n n}{n^2 - 1} \left(2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i \right) - 1 + i \right)^{n-3} = \sum \frac{3^n i^n n}{n^2 - 1} \left(\frac{i}{3} \right)^{n-3} \\ &= \sum \frac{3^n i^n n}{n^2 - 1} \cdot \frac{i^n}{3^n} \cdot \left(\frac{i}{3} \right)^{-3} = \sum \frac{n \left(i^2 \right)^n}{n^2 - 1} \left(\frac{3}{i} \right)^3 \\ &= \sum \frac{n \cdot (-1)^n}{n^2 - 1} \cdot 27i = 27i \sum (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}. \end{aligned}$$

A

$$\sum (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}$$

sor egy valós alternáló sor. Ellenőrizzük a Leibniz–kritérium feltételeit. Az $a_n = \dfrac{n}{n^2 - 1}$ sorozat pozitív és

$$a_n = \frac{n}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} \to 0.$$

Továbbá $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ deriváltja

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{\left(x^2 - 1 \right)^2} = \frac{-x^2 - 1}{\left(x^2 - 1 \right)^2} < 0,$$

ezért a_n monoton csökkenő. Emiatt az alternáló sor, és így az $27i$–szerese is konvergens. Tehát a körvonalon elhelyezkedő $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ pontban a sor feltételesen konvergens.

3. Feladat. A geometriai sor ismeretében adjuk meg a következő sorok összegét, továbbá határozzuk meg és ábrázoljuk is a konvergencia tartományok belsejét.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(3-4i)^{n+1}}(z+1-3i)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4i)^{n-1}}{(z+1-3i)^n}$

Megoldás.

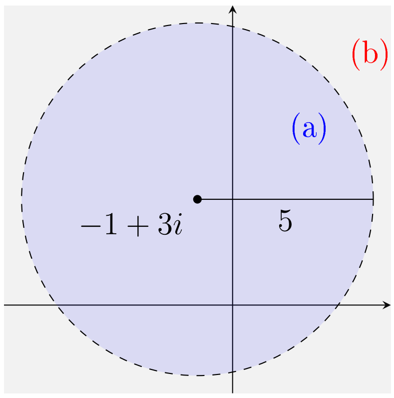
(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(3-4i)^{n+1}}(z+1-3i)^n = \frac{-1}{3-4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1-3i}{3-4i}\right)^n = \frac{-1}{3-4i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1-3i}{3-4i}}$$
$$= \frac{-1}{3-4i-(z+1-3i)} = \frac{1}{z-2+i},$$

ha

$$\left|\frac{z+1-3i}{3-4i}\right| < 1$$
$$\frac{|z+1-3i|}{5} < 1$$
$$|z-(-1+3i)| < 5\,,$$

azaz a $-1+3i$ középpontú 5 sugarú körön belül.



(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4i)^{n-1}}{(z+1-3i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-4i)^n}{(z+1-3i)^{n+1}} = \frac{1}{z+1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-4i}{z+1-3i}\right)^n$$
$$= \frac{1}{z+1-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{3-4i}{z+1-3i}} = \frac{1}{z+1-3i-(3-4i)} = \frac{1}{z-2+i}\,,$$

ha

$$\left|\frac{3-4i}{z+1-3i}\right| < 1$$
$$\left|\frac{z+1-3i}{3-4i}\right| > 1$$
$$|z-(-1+3i)| > 5\,,$$

ami éppen az előző $-1+3i$ középpontú 5 sugarú körön kívül eső rész.

MEGJEGYZÉS. Vegyük észre, hogy a két különböző (a) és (b) sor összegképlete azonos. ✠

A geometriai sor összegképlete alapján érvényes az alábbi összefüggés:

$$\frac{1}{1-\zeta} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n\,, & \text{ha } |\zeta| < 1\,, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\zeta^n}\,, & \text{ha } |\zeta| > 1\,. \end{cases}$$

4. Feladat. A fenti összefüggés segítségével adjuk meg az $\dfrac{1}{z+1+2i}$ kifejezést $z+2-i$ egész kitevős hatványainak összegeként.

Megoldás. Első lépésben a nevezőben kialakítjuk a $(z+2-i)$–t

$$\frac{1}{z+1+2i} = \frac{1}{(z+2-i)-1+3i}\,,$$

majd a maradékot kiemeljük

$$\frac{1}{z+1+2i} = \frac{1}{-1+3i} \cdot \frac{1}{\frac{z+2-i}{-1+3i}+1} = \frac{1}{-1+3i} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z+2-i}{-1+3i}\right)}\,,$$

azaz kialakítottuk az $\dfrac{1}{1-\zeta}$ alakot, ahol $\zeta = -\dfrac{z+2-i}{-1+3i} = \dfrac{z+2-i}{1-3i}$. Alkalmazva a fenti összefüggést, kapjuk, hogy

- Ha $|\zeta| < 1$, azaz a $-2+i$ középpontú, $\sqrt{10}$ sugarú körön belül

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1+2i} &= \frac{1}{-1+3i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2-i}{1-3i}\right)^n = \frac{1}{-(1-3i)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2-i)^n}{(1-3i)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(1-3i)^{n+1}} (z+2-i)^n\,. \end{aligned}$$

- Ha $|\zeta| > 1$, azaz a $-2+i$ középpontú, $\sqrt{10}$ sugarú körön kívül pedig

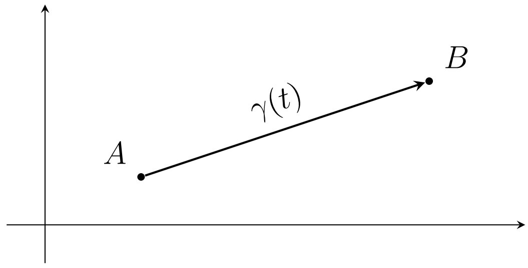
$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1+2i} &= \frac{1}{-1+3i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\left(\frac{z+2-i}{1-3i}\right)^n} = \frac{1}{-(1-3i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(1-3i)^n}{(z+2-i)^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3i)^{n-1}}{(z+2-i)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-3i)^{n-1} (z+2-i)^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(1-3i)^{n+1}} (z+2-i)^n\,. \end{aligned}$$

Komplex görbék

Szakasz paraméterezése

Az A pontból B pontba mutató szakasz egy lehetséges paraméterezése

$$\gamma(t) = [A, B] = A + t(B - A)\,, \quad 0 \le t \le 1\,.$$



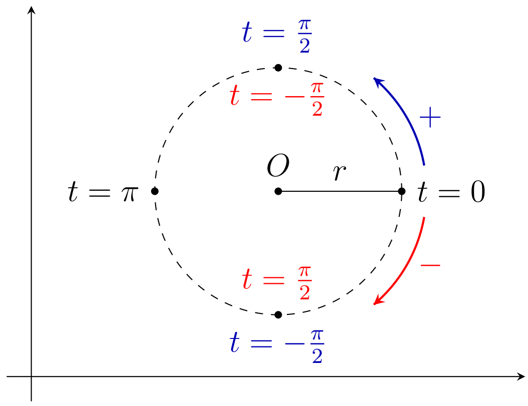
Körív paraméterezése

Az O középpontú, r sugarú körvonal egy paraméterezése, pozitív irányítás esetén

$$\gamma^+_{O,r} = O + re^{it}\,, \quad -\pi < t \le \pi\,,$$

negatív irányítás esetén

$$\gamma^-_{O,r} = O + re^{-it}\,, \quad -\pi < t \le \pi\,.$$



5. Feladat. Paraméterezzük a γ görbét,

(a) ahol γ a $-i$ pontból a $-2 + i$ pontba mutató szakasz,
(b) ahol γ a $\gamma^-_{0,1}$ körvonal i pontjából az 1 pontba, majd a $\gamma^+_{1+2i,2}$ körvonal 1 pontjából a $3 + 2i$–be megy.

Megoldás.

(a) A szakasz kezdőpontja $-i$, végpontja pedig $-2 + i$, így a paraméterezés

$$\gamma(t) = [-i, -2 + i] = -i + t(-2 + i - (-i)) = -i + t(-2 + 2i)\,, \quad 0 \le t \le 1\,.$$

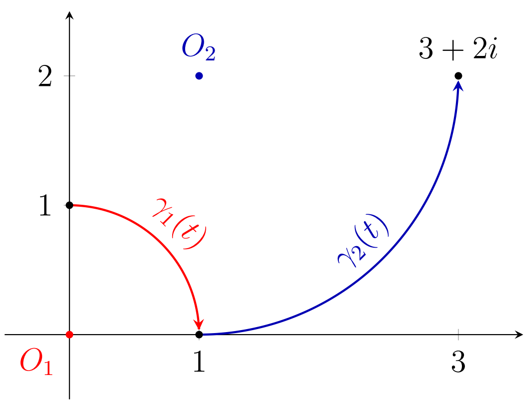
(b) Most $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cup \gamma_2(t)$ és a két rész egymástól függetlenül paraméterezhető.
A γ_1 görbe középpontja O_1, az origó, sugara $r_1 = 1$ és negatív az irányítása, ezért a paraméterezés

$$\gamma_1(t) = \gamma^-_{0,1}(t) = 0 + 1 \cdot e^{-it} = e^{-it}\,,$$

ahol az ábra alapján $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le 0$.
Hasonlóan, γ_2 esetén $O_2 = 1 + 2i$, $r_2 = 2$ és pozitív az irányítás, így

$$\gamma_2(t) = \gamma^+_{1+2i,2}(t) = 1 + 2i + 2e^{it}\,,$$

ahol $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le 0$.



6. Feladat. Határozzuk meg a $\gamma(t) = 2i + t(3-i) - 2t^3e^{it}$ görbe deriváltját a $t_0 = 0$ helyen.

Megoldás. A megoldást a valós függvényeknél megszokott t változó szerinti deriválással kapjuk.

$$\gamma'(t) = \left(2i + t(3-i) - 2t^3e^{it}\right)' = (3-i) - 6t^2e^{it} - 2t^3ie^{it}$$

A $t = 0$ helyettesítéssel élve

$$\gamma'(0) = 3 - i\,.$$

7. Feladat. Határozzuk meg a következő integrálok értékét algebrai alakban.

(a) $\displaystyle\int_0^1 2i + t(3-i)\;dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-it}\;dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|-ie^{-it}\right|\;dt$

Megoldás. A görbe deriválásához hasonlóan, az integrálást is a valós függvényeknél megszokott módon végezzük el.

(a)

$$\int_0^1 2i + t(3-i)\;dt = \left[2it + (3-i)\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2i + \frac{(3-i)}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-it}\;dt = \left[\frac{e^{-it}}{-i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[ie^{-it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = ie^{-i\frac{\pi}{2}} - ie^{-i\cdot 0} = i\cdot(-i) - i = 1 - i$$

(c) Mivel rögzített t esetén e^{-it} az origó középpontú egységsugarú körvonal egy pontja, így

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|-ie^{-it}\right|\;dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\;dt = [\,t\,]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Megjegyzés. Míg a (b) rész végeredménye egy komplex szám, addig a (c) részben egy valós számot kapunk, ami éppen a $\gamma(t) = e^{-it},\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ görbe ívhossza. ✠

Videók

Komplex sorok

1. Feladat. Vizsgáljuk a $\sum \frac{2n-3i}{n^3+1}$ számsor konvergenciáját.

Megoldás. Konvergens.

2. Feladat. Vizsgáljuk a következő számsorok konvergenciáját.

(a) $\sum \frac{2n-3}{n+5}\left(\frac{2-5i}{3}\right)^n$

(b) $\sum \frac{2n-3}{n+5}\left(\frac{3}{2-5i}\right)^n$

Megoldás.

(a) Divergens.

(b) Konvergens.

3. Feladat. Határozzuk meg és ábrázoljuk azon z paraméter értékek halmazát, melyek esetén a következő sor konvergens lesz, és adjuk is meg e pontok esetén a sor összegét.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right)^{n-3}$$

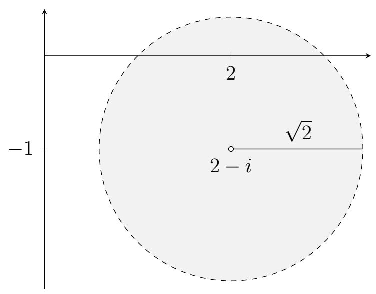
Megoldás.

A sor konvergens, ha

$$|z-(2-i)| < \sqrt{2}\,, \text{ és } z \neq 2-i\,,$$

összege:

$$\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right)^{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-2+i}{1+i}}\,.$$



4. Feladat. Ábrázoljuk azon z értékek halmazát, melyek esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n+1}}{2n^2-1}(z+5-i)^{n-1}$$

sor konvergens.

Megoldás.

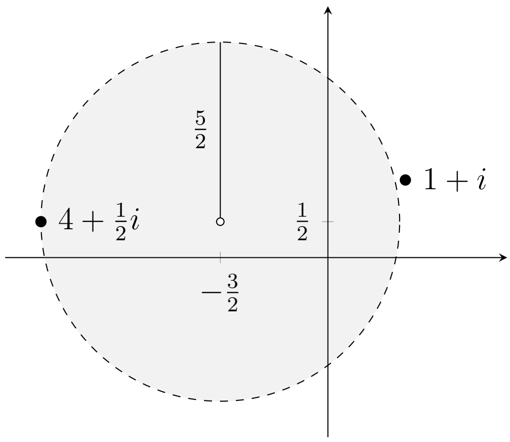
5. Feladat. Ábrázoljuk azon z értékek halmazát, melyek esetén a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+3-i)^{n-2}}{5^n\sqrt{2n-1}}$$

sor konvergens. Hogyan viselkedik a sor a $z = -4 + \dfrac{1}{2}i$ és a $z = 1 + i$ pontokban?

Megoldás.

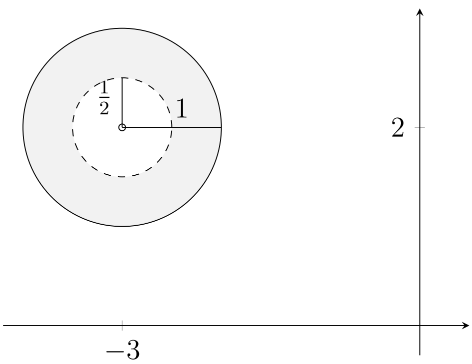
A $z = -4 + \dfrac{1}{2}i$ pontban feltételesen konvergens,
a $z = 1 + i$ pontban pedig divergens.



6. Feladat. Ábrázoljuk azon z értékek halmazát, melyek esetén a következő sor konvergens.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+3}(z+3-2i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3}{2^n-5}(z+3-2i)^{-n}$$

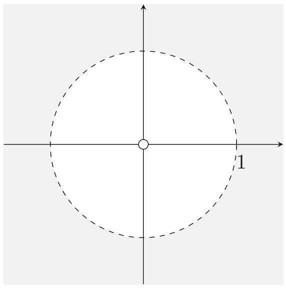
Megoldás.



7. Feladat. Ábrázoljuk azon z értékek halmazát, melyek esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ sor konvergens lesz. Határozzuk meg a sor összegét is ezen z értékek esetén.

Megoldás.

A sor összege: $-\frac{1}{1-z}$, ha $|z| > 1$



8. Feladat. Adjuk meg a $\frac{1}{z+2-3i}$ kifejezést $z+1+2i$ egész kitevős hatványainak összegeként.

Megoldás.

$$\frac{1}{z+2-3i} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-5i)^{n+1}}(z+1+2i)^n, & \text{ha} \quad |z-(-1-2i)| < \sqrt{26} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(1-5i)^{n-1}(z+1+2i)^{-n}, & \text{ha} \quad |z-(-1-2i)| > \sqrt{26} \end{cases}$$

9. Feladat. Adjuk meg a $\frac{1}{z+\alpha}$ kifejezést $z+\beta$ egész kitevős hatványainak összegeként.

Megoldás.
Ha $\alpha = \beta$, akkor $\frac{1}{z+\alpha} = (z+\beta)^{-1}$.
Ha $\alpha \neq \beta$,

$$\frac{1}{z+\alpha} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(\beta-\alpha)^{n+1}}(z+\beta)^n, & \text{ha} \quad |z-(-\beta)| < |\beta-\alpha|, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(z+\beta)^n}, & \text{ha} \quad |z-(-\beta)| > |\beta-\alpha| \end{cases}$$

Komplex görbék

10. Feladat. Paraméterezzük a következő görbéket.

(a) A -1 pontból az i pontba, majd az i pontból az $1-i$ pontba mutató tört szakasz.
(b) A γ_1 és γ_2 negyedkörívek csatlakoztatásával keletkező görbét, ahol γ_1 a $\gamma^{-}_{0,1}$ körvonal -1 pontjából az i pontba megy, és γ_2 a $\gamma^{-}_{2+i,2}$ körvonal i pontjából a $2+3i$ pontba megy.

Megoldás. YouTube

(a) $\gamma_1(t) = -1 + t(1+i), \quad 0 \le t \le 1$
$\gamma_2(t) = i + t(1-2i), \quad 0 \le t \le 1$

(b) $\gamma_1(t) = e^{-it}, \quad \pi \le t \le \frac{3}{2}\pi$
$\gamma_2(t) = 2 + i + 2e^{-it}, \quad \pi \le t \le \frac{3}{2}\pi$

11. Feladat. Határozzuk meg a következő görbék deriváltját a megadott helyen.

(a) $\gamma(t) = 3 + 5i + (2-3i)t, \quad \gamma'(2)$
(b) $\gamma(t) = 1 - 2it^2 + 3e^{it}, \quad \gamma'(0),\ \gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)$
(c) $\gamma(t) = te^{-2it}, \quad \gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Megoldás. YouTube

(a) $2-3i$ (b) $3i, \quad -2\pi i - 3$ (c) $-i - \frac{\pi}{2}$

12. Feladat. Határozzuk meg a következő integrálokat.

(a) $\displaystyle\int_0^1 3 + 5i + (2-3i)t\ dt$ (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} te^{2it}\ dt$

Megoldás. YouTube

(a) $3 + 5i + (2-3i)\cdot\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}i$

Kvízek

A csoport

Feladat. Határozzuk meg és ábrázoljuk is azon z értékek halmazát, melyek esetén a következő sor abszolút konvergens.

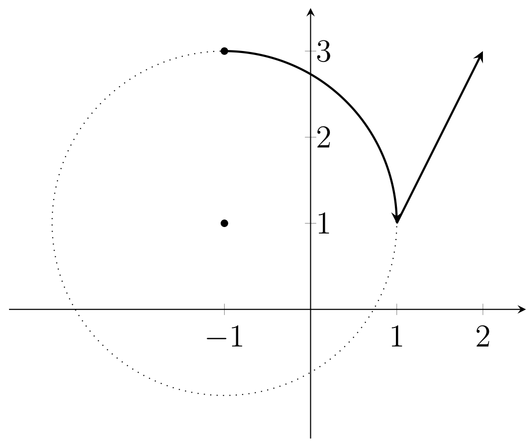
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n^5-2}}{2^n n^3}(3z+1-i)^{n-1}$$

B csoport

1. Feladat. Határozzuk meg és ábrázoljuk is azon z paraméter értékek halmazát, melyek esetén a következő sor abszolút konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n(2n+i)}{n^3}$$

2. Feladat. Adjuk meg az ábrán látható γ görbe paraméterezését.



C csoport

1. Feladat. Határozzuk meg a $\gamma(t) = ite^{-it}$ görbe $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma(t)\, dt$ integrálját algebrai alakban.

2. Feladat. Írjuk fel az $\dfrac{1}{2z+1-2i}$ kifejezést $z+3+i$ egész kitevős hatványainak összegeként.

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása. A sor első pár tagja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n^5-2}}{2^n n^3}(3z+1-i)^{n-1} = \frac{1}{2\cdot 1}(3z+1-i)^0 + \frac{\sqrt{94}}{4\cdot 8}(3z+1-i)^1 + \dots$$

azaz a sor minden z-re értelmezve van. Vizsgáljuk a $\sum |z_n|$ sort, ekkor

$$|z_n| = \left|\frac{\sqrt{3n^5-2}}{2^n n^3}(3z+1-i)^{n-1}\right| = \frac{\sqrt{3n^5-2}}{2^n n^3}|3z+1-i|^{n-1},$$

és

$$|z_{n+1}| \cdot \frac{1}{|z_n|} = \frac{\sqrt{3(n+1)^5-2}}{2^{n+1}(n+1)^3} \cdot |3z+1-i|^n \cdot \frac{2^n n^3}{\sqrt{3n^5-2}} \cdot \frac{1}{|3z+1-i|^{n-1}}$$

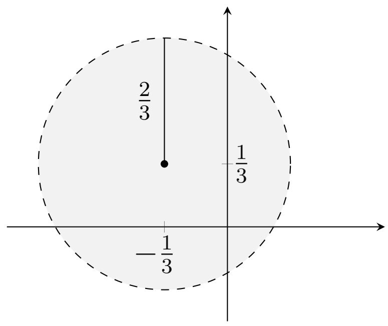
1 pt

$$= \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{\sqrt{3(n+1)^5-2}}{\sqrt{3n^5-2}} \cdot \frac{|3z+1-i|^n}{|3z+1-i|^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \cdot \frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^5}} \cdot \frac{\sqrt{3\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 - \frac{2}{n^5}}}{\sqrt{3-\frac{2}{n^5}}} \cdot |3z+1-i| \to \frac{1}{2}|3z+1-i|\,.$$

A sor abszolút konvergens, ha

$$\frac{1}{2}|3z+1-i| < 1$$
$$|3z-(-1+i)| < 2$$
$$\left|z-\left(-\frac{1}{3}+\frac{i}{3}\right)\right| < \frac{2}{3}\,.$$



2 pt

Divergens, ha

$$\left|z-\left(-\frac{1}{3}+\frac{i}{3}\right)\right| > \frac{2}{3}\,.$$

A körvonalon $|3z+1-i| = 2$, azaz

$$|z_n| = \frac{\sqrt{3n^5-2}}{2^n n^3} \cdot 2^{n-1} = \frac{\sqrt{3n^5-2}}{2n^3} = \frac{\sqrt{n^5}}{n^3} \cdot \frac{\sqrt{3-\frac{2}{n^5}}}{2} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{3-\frac{2}{n^5}}}{2} \to 0\,.$$

Így az összehasonlító kritérium alapján $\sum |z_n| \sim \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, ami divergens, tehát a függvénysor a körvonalon nem abszolút konvergens.

3 pt

B csoport

1. Feladat megoldása. A sorozat első pár tagja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n(2n+i)}{n^3} = \frac{(2+i)}{1}(z-3) + \frac{(4+i)}{2^3}(z-3)^2 + \dots$$

így a sor minden z–re értelmezett.

$$\begin{aligned}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} &= |z_{n+1}| \cdot \frac{1}{|z_n|} = \frac{|z-3|^{n+1} \cdot |2(n+1)+i|}{|(n+1)^3|} \cdot \frac{|n^3|}{|z-3|^n \cdot |2n+i|} \\ &= \frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{\sqrt{4(n+1)^2+1}}{\sqrt{4n^2+1}} \cdot \frac{|z-3|^{n+1}}{|z-3|^n} \\ &= \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2}} \cdot \frac{\sqrt{4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} \cdot |z-3| \to |z-3|\end{aligned}$$

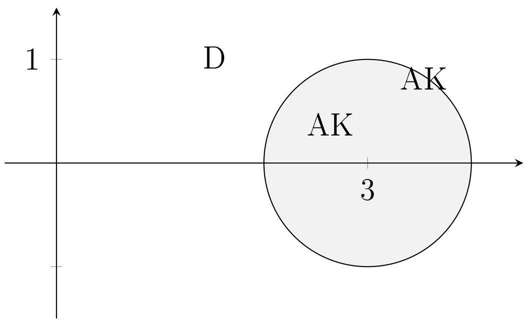
1 pt

miatt a sor abszolút konvergens, ha

$$|z-3| < 1\,,$$

és divergens, ha

$$|z-3| > 1\,.$$



A körvonalon, azaz $|z-3| = 1$ esetén

$$\begin{aligned}|z_n| &= \frac{1^n \cdot |2n+i|}{n^3} = \frac{\sqrt{4n^2+1}}{n^3} \\ &= \frac{n}{n^3} \cdot \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{1} = \frac{1}{n^2} \cdot \sqrt{4+\frac{1}{n^2}} \to 0\,,\end{aligned}$$

2 pt

továbbá

$$\sum |z_n| \sim \sum \frac{1}{n^2}\,.$$

Mivel a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, ezért a sor abszolút konvergens a körvonalon is.

2. Feladat megoldása. A görbét két részre bontjuk: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

- $\gamma_1(t) = -1 + i + 2e^{-it}, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le 0\,.$
- $\gamma_2(t) = (1+i) + t \cdot (2+3i-1-i) = 1+i+(1+2i)t, \qquad 0 \le t \le 1\,.$

3 pt

C csoport

1. Feladat megoldása. Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int \gamma(t)\,dt = \int \underbrace{it}_{f} \cdot \underbrace{e^{-it}}_{g'}\,dt = \underbrace{it}_{f} \cdot \underbrace{\frac{e^{-it}}{-i}}_{g} - \int \underbrace{i}_{f'} \cdot \underbrace{\frac{e^{-it}}{-i}}_{g}\,dt = -te^{-it} + \int e^{-it}\,dt = -te^{-it} + \frac{e^{-it}}{-i},$$

amiből

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma(t)\,dt &= \left[-te^{-it} + \frac{e^{-it}}{-i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{-i}\right) - \left(0 + \frac{e^0}{-i}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2}(-i) + \frac{-i}{-i} - \frac{1}{-i} = \frac{\pi}{2}i + 1 + \frac{1}{i} = \frac{\pi}{2}i + 1 - i = 1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)i\,.\end{aligned}$$

1 pt

2. Feladat megoldása.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2z+1-2i} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+\frac{1}{2}-i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+3+i-\frac{5}{2}-2i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{5}{2}-2i} \cdot \frac{1}{\frac{z+3+i}{-\frac{5}{2}-2i}+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{5}{2}-2i} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z+3+i}{-\frac{5}{2}-2i}\right)} = \frac{1}{-5-4i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+3+i}{\frac{5}{2}+2i}}\end{aligned}$$

2 pt

- Ha $\left|\frac{z+3+i}{\frac{5}{2}+2i}\right| < 1$, akkor

$$\frac{1}{2z+1-2i} = \frac{1}{-5-4i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+3+i}{\frac{5}{2}+2i}\right)^n = \frac{1}{-5-4i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{5}{2}+2i\right)^n}(z+3+i)^n\,.$$

- Ha $\left|\frac{z+3+i}{\frac{5}{2}+2i}\right| > 1$, akkor

$$\frac{1}{2z+1-2i} = \frac{1}{-5-4i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\left(\frac{z+3+i}{\frac{5}{2}+2i}\right)^n} = \frac{-1}{-5-4i} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}+2i\right)^n (z+3+i)^{-n}\,.$$

3 pt

3.

Komplex függvények

Házi feladatok

Komplex függvények

Az $f(z)$ komplex függvény felírható az

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

alakban, ahol az $u = u(x,y)$ és $v = v(x,y)$ valós értékű kétváltozós függvények a komplex $f(z)$ függvény valós, illetve képzetes részét jelölik. Továbbá

- $\sqrt{z} := \sqrt{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}}$, *a többértékű $z^{1/2}$ reláció főértéke,*
- $e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy}$,
- $\operatorname{Log} z := \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, *a többértékű $\log z$ reláció főértéke,*
- $\cos z := \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\qquad \sin z := \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$,
- $\operatorname{ch} z := \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$, $\qquad \operatorname{sh} z := \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$.

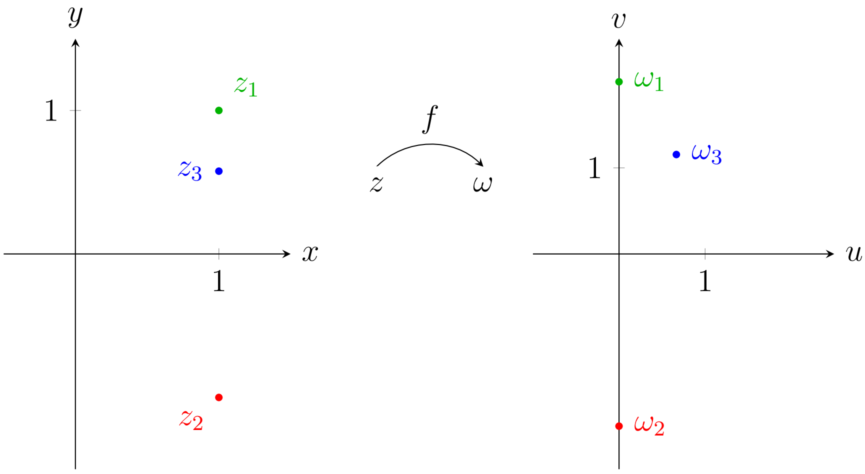
1. Feladat. Az $f(z) = z^2$ függvény esetén adjuk meg

(a) a $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)$, $z_3 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$ pontok képeit algebrai alakban és ábrázoljuk is azokat;
(b) a $z_4 = i$ és $z_5 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ pontokat összekötő γ_b szakasz képét;
(c) a $z_6 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{3}{8}\pi i}$ kezdő- és $z_7 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{5}{8}\pi i}$ végpontú, origó középpontú, $\sqrt[4]{2}$ sugarú, pozitív irányítású γ_c körív képét és ábrázoljuk is;
(d) a függvény valós és képzetes részét.

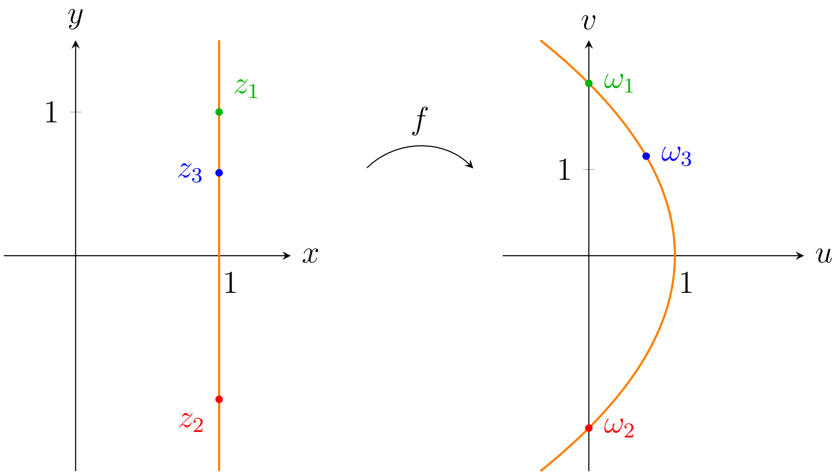
Megoldás.

(a) Mindhárom alak esetén egyszerűen meghatározható a képpont:

- $\omega_1 = f(z_1) = (1+i)^2 = 2i$,
- $\omega_2 = f(z_2) = 2\left(\cos\dfrac{-\pi}{2} + i\sin\dfrac{-\pi}{2}\right) = -2i$,
- $\omega_3 = f(z_3) = \dfrac{4}{3}e^{\frac{\pi}{3}i} = \dfrac{4}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}i$.



MEGJEGYZÉS. A z_i pontok egy egyenesre esnek, és ennek az egyenesnek a képe egy fekvő parabola.



✠

(b) Szakasz paraméterezéséhez az algebrai alakot használjuk; z_4 már ebben az alakban van, z_5–öt pedig átírjuk: $z_5 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i$. Tehát a $\gamma_b = [i, 2i]$ szakasz képét kell meghatározni. Ennek egy lehetséges paraméterezése

$$\gamma_b(t) = i + (2i - i)t = i + it\,, \quad \text{ahol} \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Így

$$f(\gamma_b(t)) = (i+it)^2 = i^2(1+t)^2 = -(1+t)^2\,, \quad \text{ahol} \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Megjegyzés. A kapott görbe a $[-1,-4]$ irányított szakasz egy lehetséges paraméterezése. ✠

(c) A körív egy paraméterezése

$$\gamma_c(t) = \sqrt[4]{2}e^{it}\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{3}{8}\pi \le t \le \frac{5}{8}\pi\,.$$

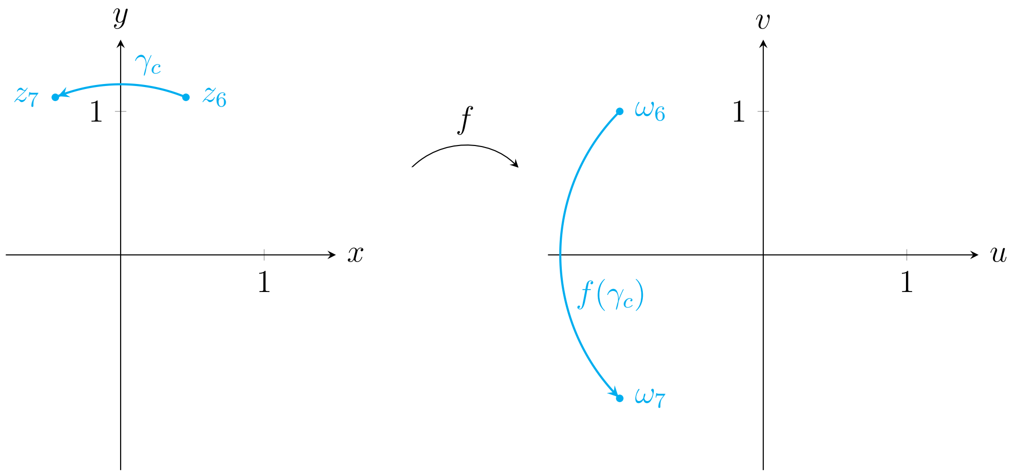
Így

$$f(\gamma_c(t)) = \left(\sqrt[4]{2}\right)^2 e^{2it}\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{3}{8}\pi \le t \le \frac{5}{8}\pi\,,$$

azaz

$$f(\gamma_c(s)) = \sqrt{2}e^{is}\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{3}{4}\pi \le s \le \frac{5}{4}\pi\,,$$

az origó középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú negyedkörív az $\omega_6 = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$ kezdőponttal és az $\omega_7 = \sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i} = \sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi i}$ végponttal.



(d) Az $f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ összefüggés alapján

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \text{és} \qquad v(x,y) = 2xy\,.$$

2. Feladat. A $g(z) = \sqrt{z}$ függvény esetén adjuk meg

(a) a $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$, $z_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$ pontok képeit;

(b) a $-1+i$ kezdő- és $-1-i$ végpontú, origó középpontú γ negyedkörív képét és ábrázoljuk is.

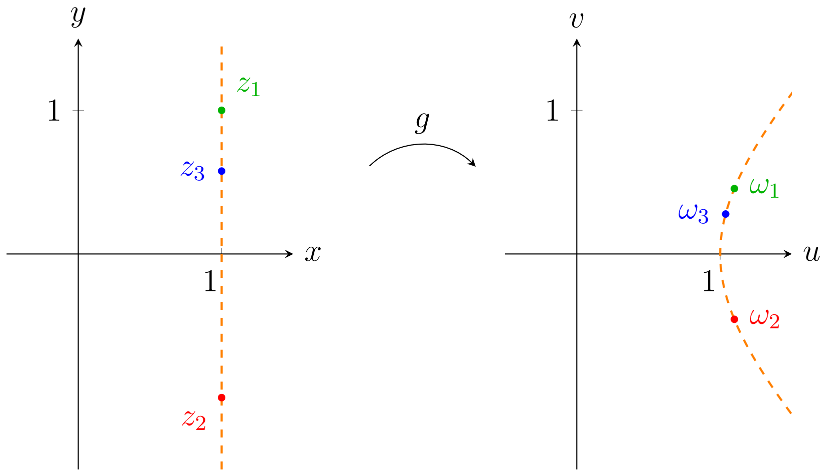
Megoldás.

(a) A képpontok megadásához az exponenciális alakot használjuk. Ezért

- $z_1 = 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ alapján $\omega_1 = g(z_1) = \sqrt{z_1} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{8}i}$;

- $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, így $\omega_2 = \sqrt[4]{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$;
- $z_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$ esetén $\omega_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}e^{\frac{\pi}{12}i}$.

MEGJEGYZÉS. A három ponton áthaladó egyenes $\sqrt{z}$ melletti képe egy hiperbola.



✠

(b) A $\sqrt{z}$ függvény definíciója miatt a γ görbét két részre kell bontani a negatív valós tengely mentén például a

$$\gamma_1(t) = \sqrt{2}e^{it}\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{3}{4}\pi \le t \le \pi\,,$$

valamint a

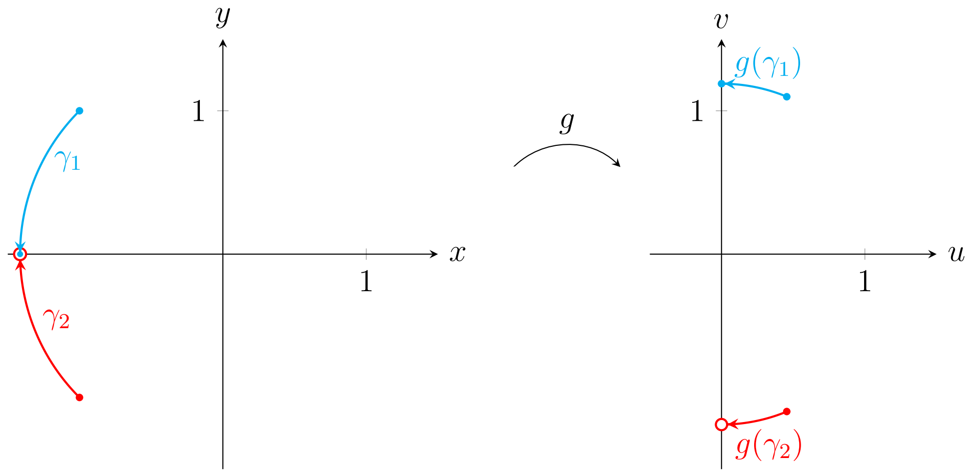
$$\gamma_2(t) = \sqrt{2}e^{-it}\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{3}{4}\pi \le t < \pi$$

görbére. Ekkor γ_1 képe

$$\begin{aligned} g(\gamma_1(t)) &= \sqrt[4]{2}e^{i\frac{t}{2}}\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{3}{4}\pi \le t \le \pi \\ &= \sqrt[4]{2}e^{is} = g_1(s)\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{3}{8}\pi \le s \le \frac{\pi}{2}\,, \end{aligned}$$

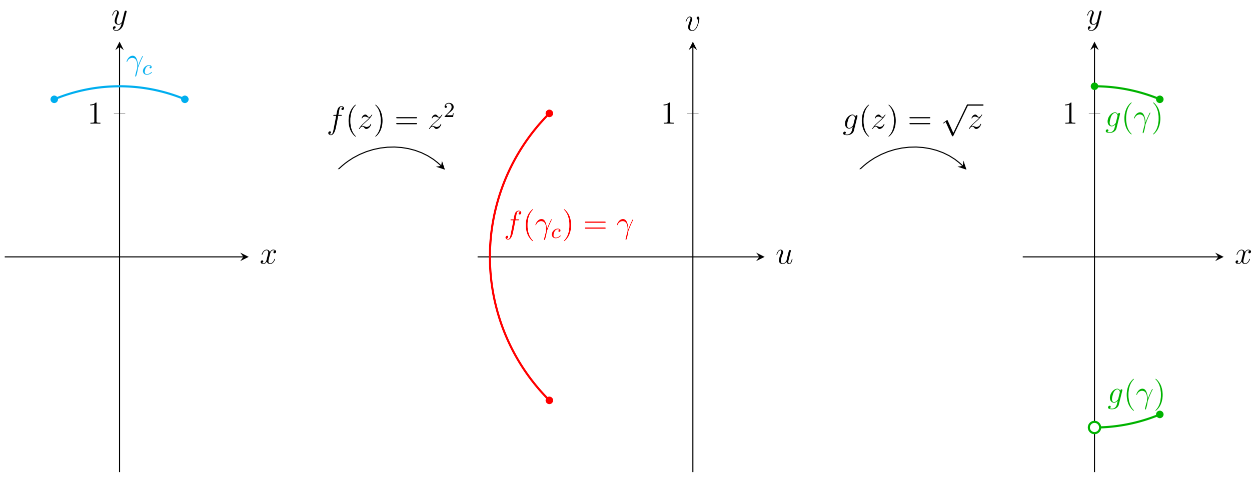
a γ_2 képe pedig

$$\begin{aligned} g(\gamma_2(t)) &= \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{t}{2}}\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{3}{4}\pi \le t < \pi \\ &= \sqrt[4]{2}e^{-is} = g_2(s)\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{3}{8}\pi \le s < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$



Megjegyzés. Jól láthatóan a $g(z) = \sqrt{z}$ függvény nem folytonos a negatív valós tengely mentén, hiszen a γ görbe képe szétesik két részre. ✠

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a γ görbe megegyezik az 1. feladat (c) részében szereplő γ_c görbe $f(z) = z^2$ melletti képével, azonban a $g(\gamma)$ és a γ_c különböznek. Ha a γ_c görbére egymás után végrehajtjuk a z^2 és a $\sqrt{z}$ leképezést, akkor nem az eredeti görbét kapjuk vissza.



✠

3. Feladat. Az $f(z) = e^{iz}$ esetén adjuk meg

(a) a $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$, $z_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$ pontok képéit;

(b) a $z_4 = -\pi i$, $z_5 = \frac{3}{2}\pi - \pi i$ pontokat összekötő szakasz képét és ábrázoljuk is;

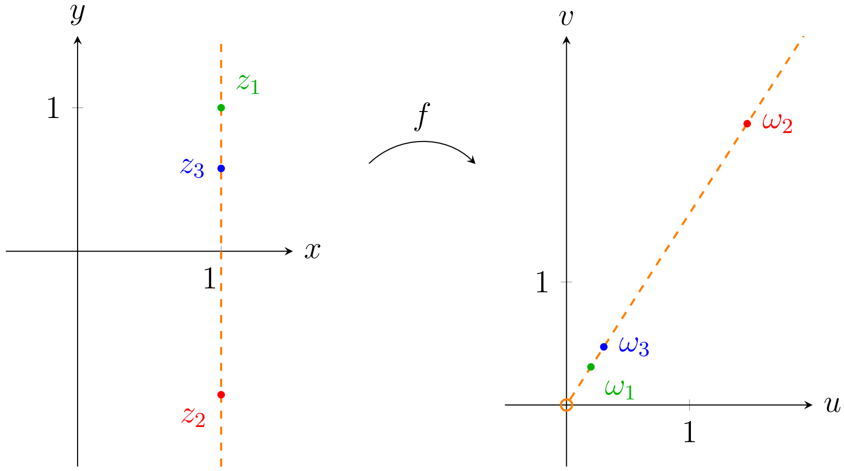
(c) a függvény valós és képzetes részét.

Megoldás. A képpontok meghatározásához az $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}e^{ix}$ összefüggés miatt az algebrai alakot használjuk.

(a) • A $z_1 = 1 + i$ képe $\omega_1 = f(z_1) = e^{-1}e^{i}$.

- A $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right) = 1 - i$ képe $\omega_2 = e^1 e^i$.
- A $z_3 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{6}i} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} i$ képe pedig $\omega_3 = e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} e^i$.

Megjegyzés. A három ponton áthaladó egyenes e^{iz} melletti képe egy origóból induló félegyenes.



✠

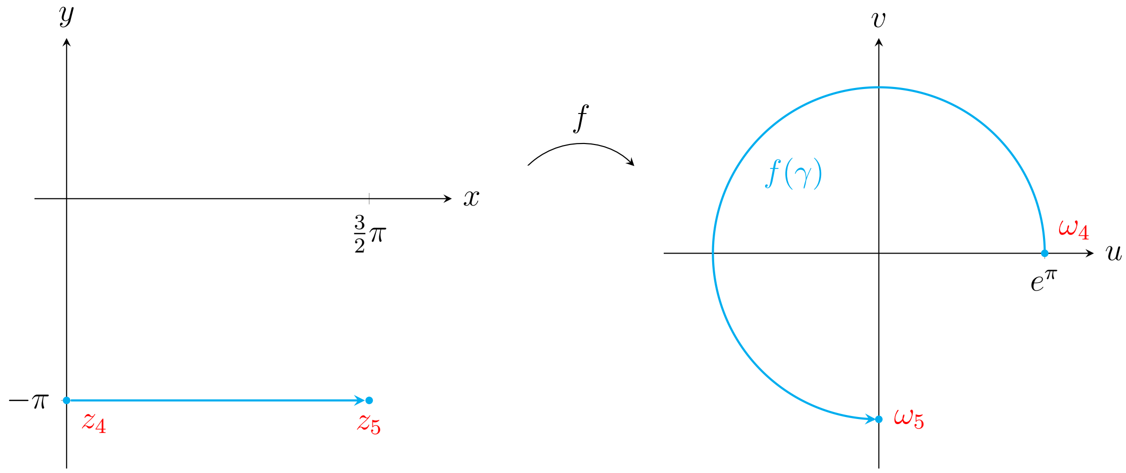
(b) A $z_4 = -\pi i$, $z_5 = \dfrac{3}{2}\pi - \pi i$ pontokat összekötő szakasz egy lehetséges paraméterezése:

$$\gamma(t) = \frac{3}{2}\pi t - \pi i\,, \quad \text{ahol} \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Így

$$f(\gamma(t)) = e^{i\frac{3}{2}\pi t} e^{i(-\pi i)} = e^{\pi} e^{\frac{3}{2}\pi t i}\,, \quad \text{ahol} \quad 0 \le t \le 1\,,$$

ami egy origó középpontú, e^{π} sugarú háromnegyed körív.



(c) Az

$$f(x + iy) = e^{-y} e^{ix} = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$$

összefüggés alapján
$$u(x,y) = e^{-y}\cos x \qquad \text{és} \qquad v(x,y) = e^{-y}\sin x\,.$$

4. Feladat. Az $f(z) = \operatorname{Log} z$ függvény esetén adjuk meg

(a) a $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$, $z_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$ pontok képeit;

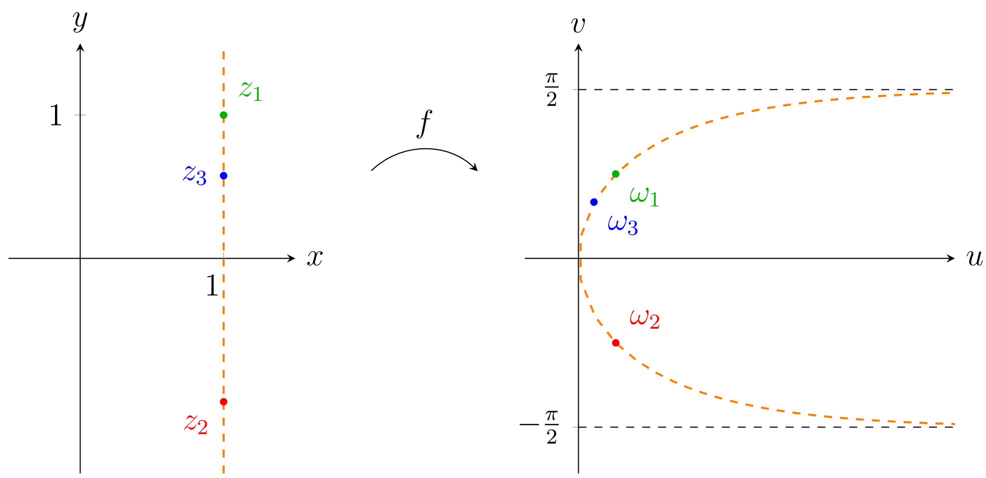
(b) a $z_4 = e^{\pi}$ kezdő– és $z_5 = e^{\pi+\frac{3}{2}\pi i}$ végpontú, origó középpontú háromnegyed körív képét és ábrázoljuk is.

Megoldás.

(a) A képpontok megadásához az exponenciális alakot használjuk, mivel ezekből jól látszik $|z|$ és $\operatorname{Arg} z$ értéke.

- A $z_1 = 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ pont képe $\omega_1 = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i\,;$
- a $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ képe $\omega_2 = \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i\,;$
- a $z_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$ képe pedig $\omega_3 = \ln\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}i\,.$

MEGJEGYZÉS. A három pont és a képpontok:



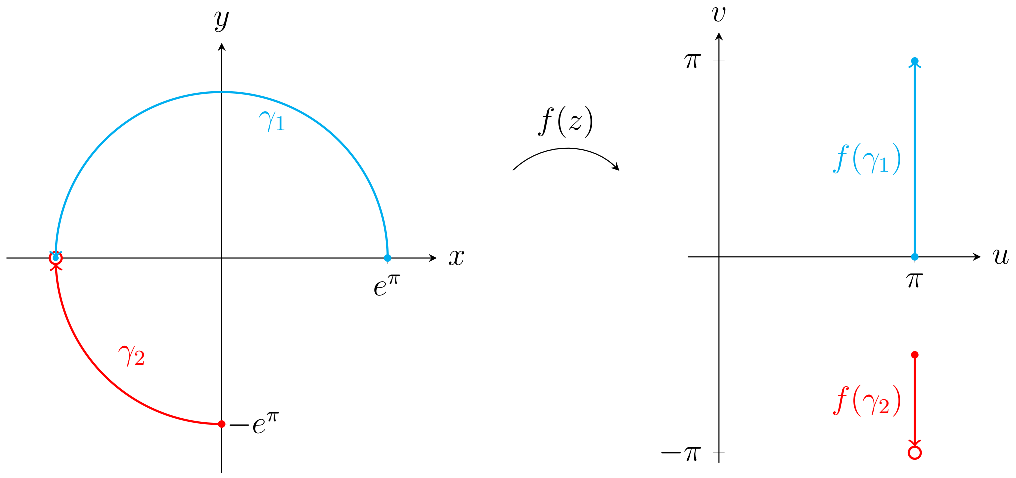
✠

(b) A $\operatorname{Log} z$ függvény definíciója miatt a görbét két részre kell bontani a negatív valós tengely mentén például a
$$\gamma_1(t) = e^{\pi}e^{it}\,, \quad \text{ahol} \quad 0 \le t \le \pi\,;$$
valamint a
$$\gamma_2(t) = e^{\pi}e^{-it}\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{\pi}{2} \le t < \pi$$
görbére. Ekkor γ_1 képe
$$\operatorname{Log}(\gamma_1(t)) = \pi + it\,, \quad \text{ahol} \quad 0 \le t \le \pi\,,$$

a γ_2 képe pedig

$$\operatorname{Log}(\gamma_2(t)) = \pi - it\,, \quad \text{ahol} \quad \frac{\pi}{2} \le t < \pi\,,$$

amelyek egy-egy szakasz paraméterezései.



Megjegyzés. Tehát a $\operatorname{Log} z$ függvény nem folytonos a negatív valós tengely mentén, hiszen az adott görbe képe szétesik két részre. ✠

5. Feladat. Adjuk meg a következő kifejezések algebrai alakját.

(a) $\sin 3i$ (b) $\log(2+i)$ (c) i^{-i}

Megoldás.

(a) A definíció alapján

$$\sin 3i = \frac{e^{3i^2} - e^{-3i^2}}{2i} = \frac{e^{-3} - e^{3}}{2i} = -\frac{1}{i}\cdot\frac{e^3 - e^{-3}}{2} = i\operatorname{sh} 3\,.$$

(b) Mivel $2 + i = \sqrt{5}e^{i\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}$, ezért

$$\operatorname{Log}(2+i) = \ln\sqrt{5} + i\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\,,$$

tehát

$$\log(2+i) = \operatorname{Log}(2+i) + 2k\pi i = \ln\sqrt{5} + i\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

(c) Tetszőleges b és tetszőleges, nem nulla a komplex szám esetén az

$$a^b := e^{b\log a}$$

összefüggéssel definiáljuk a hatványozást. Ezért

$$i^{-i} = e^{-i\log i}\,.$$

Mivel $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$, ezért

$$\log i = \ln 1 + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i = \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\,,$$

és így

$$i^{-i} = e^{-i\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i} = e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

MEGJEGYZÉS. Jól láthatóan az i^{-i} kifejezés végtelen sok valós értéket jelöl. ✠

6. Feladat. Írjuk fel gyöktényezős alakban a $\sqrt{3}z^2 + (1-\sqrt{3}i)z - i$ kifejezést.

Megoldás. Először meghatározzuk a

$$\sqrt{3}z^2 + (1-\sqrt{3}i)z - i = 0$$

másodfokú egyenlet megoldásait. A megoldóképlet alapján

$$z_{1,2} = \frac{-1+\sqrt{3}i \pm \sqrt{\left(1-\sqrt{3}i\right)^2 + 4\sqrt{3}i}}{2\sqrt{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}i \pm \sqrt{-2+2\sqrt{3}i}}{2\sqrt{3}}\,,$$

melyben a gyökfüggvény definíciója alapján

$$\sqrt{-2+2\sqrt{3}i} = \sqrt{4e^{\frac{2}{3}\pi i}} = 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 1+\sqrt{3}i\,.$$

Tehát a keresett gyökök

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i+1+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}} = i\,,$$

valamint

$$z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i-\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{3}} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Így a gyöktényezős alak

$$\sqrt{3}z^2 + (1-\sqrt{3}i)z - i = \sqrt{3}(z-i)\left(z+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (z-i)\left(\sqrt{3}z+1\right).$$

7. Feladat. Oldjuk meg a $\sin z = i$ egyenletet

(a) a definíció alapján,
(b) a $\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x$ trigonometrikus összefüggés alapján.

Megoldás.

(a) A $\sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ definícióból kiindulva, a $p = e^{iz}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{p - \frac{1}{p}}{2i} &= i \\ p - \frac{1}{p} &= 2i^2 \\ p^2 - 1 &= -2p \\ p^2 + 2p - 1 &= 0\,, \end{aligned}$$

ahonnan a gyökök:

$$p_1 = -1 + \sqrt{2} \qquad \text{és} \qquad p_2 = -1 - \sqrt{2}\,.$$

A $p = e^{iz}$ összefüggésből kapjuk, hogy $iz = \log p$.

- A $p_1 = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 > 0$ esetben

  $$iz = \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2k\pi i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

  azaz

  $$z = 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2} - 1\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- A $p_2 = -1 - \sqrt{2} = -(\sqrt{2} + 1)$ esetben

  $$iz = \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) + (\pi + 2k\pi)i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

  azaz

  $$z = (2k+1)\pi - i\ln\left(\sqrt{2} + 1\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

(b) A $\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x$ trigonometrikus összefüggés alapján

$$\sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x = i\,,$$

azaz

$$\sin x \operatorname{ch} y = 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{sh} y \cos x = 1\,.$$

Az első egyenletből, a $\operatorname{ch} y$ függvény pozitivitása miatt kapjuk, hogy $\sin x = 0$, azaz

$$x = n\pi\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Ezen pontokban $\cos x = (-1)^n$, ezért a második egyenletben az esetek szétválasztásával dolgozunk.

- Ha n páros, azaz $x = 2k\pi$, akkor $\cos x = 1$, így a második egyenletből kapjuk, hogy $\operatorname{sh} y = 1$. Az $A = e^y$ helyettesítéssel adódik, hogy

  $$1 = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{A - \frac{1}{A}}{2}\,,$$

  ahonnan

  $$A^2 - 2A - 1 = 0\,.$$

Az egyenlet megoldásai $A = 1 \pm \sqrt{2}$. Mivel $A = e^y > 0$, így csak a pozitív megoldással számolunk tovább.

$$e^y = 1 + \sqrt{2}$$
$$y = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Azaz

$$z = 2k\pi + i \ln\left(1 + \sqrt{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Ha n páratlan, azaz $x = (2k+1)\pi$, akkor $\cos x = -1$, így $\operatorname{sh} y = -1$. Ekkor

$$-1 = \frac{A - \frac{1}{A}}{2},$$

és az $A^2 + 2A - 1 = 0$ egyenlet egyetlen pozitív megoldása $A = -1 + \sqrt{2}$, így

$$y = \ln\left(-1 + \sqrt{2}\right).$$

Tehát

$$z = (2k+1)\pi + i \ln\left(-1 + \sqrt{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Megjegyzés. A feladat megoldása során az (a) részben azt kaptuk, hogy

$$z = 2k\pi - i \ln\left(\sqrt{2} - 1\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

vagy

$$z = (2k+1)\pi - i \ln\left(\sqrt{2} + 1\right), \quad k \in \mathbb{Z};$$

a (b) részben pedig

$$z = 2k\pi + i \ln\left(1 + \sqrt{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

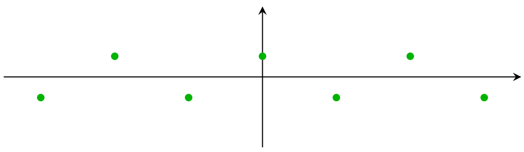
vagy

$$z = (2k+1)\pi + i \ln\left(-1 + \sqrt{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Természetesen a két megoldáshalmaz megegyezik, hiszen

$$-\ln\left(\sqrt{2} - 1\right) = \ln\left(\sqrt{2} - 1\right)^{-1} = \ln \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)} = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

A megoldáshalmaz néhány eleme a komplex számsíkon:



✠

Videók

Komplex függvények

1. Feladat. Határozzuk meg a következő pontok $f(z) = e^z$ melletti képét.

(a) $z = 2 - i$
(b) $z = -1 - \frac{\pi}{4}i$
(c) $3 + \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i, \; k \in \mathbb{Z}$

YouTube

Megoldás.

(a) $e^2 e^{-i}$
(b) $e^{-1}e^{-\frac{\pi}{4}i}$
(c) $e^3 e^{\frac{\pi}{3}i}$

2. Feladat. Határozzuk meg a következő görbék $f(z) = e^z$ melletti képét.

(a)
- $A = \{z \mid x \in \mathbb{R}, \; y = 0\}$
- $B = \left\{z \mid x \in \mathbb{R}, \; y = \frac{\pi}{4}\right\}$
- $C = \left\{z \mid x \in \mathbb{R}, \; y = -\frac{\pi}{3}\right\}$
- $D = \left\{z \mid x \in \mathbb{R}, \; y = \frac{2}{3}\pi\right\}$

(b)
- $A = \{z \mid x = 0, \; -\pi < y \leq \pi\}$
- $B = \{z \mid x = -2, \; -\pi < y \leq \pi\}$
- $C = \{z \mid x = 1, \; -\pi < y \leq \pi\}$

(c)
- $A = \{z \mid x = y, -\pi < x \leq \pi\}$

YouTube

Megoldás.

(a)
- $A: \; e^x$
- $B: \; e^x e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $C: \; e^x e^{-\frac{\pi}{3}i}$
- $D: \; e^x e^{\frac{2}{3}\pi i}$

(b)
- $A: \; e^{iy}$
- $B: \; e^{-2}e^{iy}$
- $C: \; e \cdot e^{iy}$

(c)
- $A: \; e^x e^{ix}$

3. Feladat.

(a) Oldjuk meg az $e^z = -2 + i$ egyenletet.
(b) Határozzuk meg $\log(1 - 5i)$ összes lehetséges értékét.
(c) Határozzuk meg $(-1)^i$ összes lehetséges értékét.

YouTube

Megoldás.

(a) $z = \log(-2 + i) = \ln\sqrt{5} + \left(\pi - \arctan\frac{1}{2} + 2k\pi\right)i, \; k \in \mathbb{Z}$
(b) $\ln\sqrt{26} + (-\arctan 5 + 2k\pi)\, i, \; k \in \mathbb{Z}$
(c) $e^{-\pi+2k\pi}, \; k \in \mathbb{Z}$

4. Feladat. Az $a^b := e^{b \log a}$ ($a \neq 0$) definíció alapján határozzuk meg a következő kifejezések összes lehetséges értékét.

(a) 2^3

(b) $3^{\frac{1}{2}}$

Megoldás.

(a) 8

(b) $\pm\sqrt{3}$

5. Feladat. A $\sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ definíció alapján határozzuk meg a következő halmazok $f(z) = \sin z$ melletti képét.

(a) $A = \{x \geq 0,\ y = 0\}$

(b) $B = \{x = 0,\ y \geq 0\}$

(c) $C = \left\{x = \dfrac{\pi}{2},\ y \geq 0\right\}$

Megoldás.

(a) $\sin x$

(b) $i \operatorname{sh} y$

(c) $\operatorname{ch} y$

6. Feladat. Oldjuk meg a $\cos z = -2$ egyenletet.

Megoldás. $z = \pi + 2k\pi + i \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

7. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenleteket és ábrázoljuk is a megoldáshalmazokat.

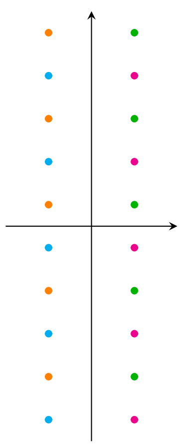
(a) $\operatorname{ch} z = i$

(b) $\operatorname{ch} z = -i$

Megoldás.

(a) $z_1 = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i, \quad z_2 = \ln\left(-1 + \sqrt{2}\right) - \left(\dfrac{\pi}{2} - 2k\pi\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}$

(b) $z_1 = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) - \left(\dfrac{\pi}{2} - 2k\pi\right) i, \quad z_2 = \ln\left(-1 + \sqrt{2}\right) + \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}$



Kvízek

A csoport

1. Feladat. Oldjuk meg a $\operatorname{ch} z = -2$ egyenletet.

2. Feladat. Határozzuk meg az $A = -\dfrac{\pi}{2} + \pi i$ kezdőpontú, $B = \dfrac{\pi}{2} + \pi i$ végpontú szakasz $f(z) = \dfrac{1}{e^{iz}}$ melletti képét, és ábrázoljuk is.

B csoport

1. Feladat. Adjuk meg a 2^{1-i} komplex hatvány azon értékét, melynek abszolút értéke 2.

2. Feladat. Adjuk meg és ábrázoljuk az origó középpontú, i kezdőpontú és 1 végpontú negatív irányítású körívet, valamint a körív $f(z) = \sqrt{-2iz}$ függvény melletti képét.

C csoport

Feladat. Adjuk meg és ábrázoljuk az origó középpontú, negatív irányítású egységkörvonal $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ kezdőpontú és -1 végpontú γ körív képét az $f(z) = (1+i)\operatorname{Log}(-z)$ függvény mellett.

Kvízek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása. A $\operatorname{ch} z := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ definícióban a $p = e^z$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \frac{p+\frac{1}{p}}{2} &= -2 \\ p + \frac{1}{p} &= -4 \\ p^2 + 1 &= -4p \\ p^2 + 4p + 1 &= 0 \\ p_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

1 pt

- Ha $p = -2 + \sqrt{3}$, azaz $e^z = -2 + \sqrt{3}$, akkor
$$z = \log\left(-2+\sqrt{3}\right) = \operatorname{Log}\left(-2+\sqrt{3}\right) + 2k\pi i = \ln\left(2-\sqrt{3}\right) + \pi i + 2k\pi i, \ \ k \in \mathbb{Z}\,.$$
- Ha $p = -2 - \sqrt{3}$, azaz $e^z = -2 - \sqrt{3}$, akkor
$$z = \log\left(-2-\sqrt{3}\right) = \operatorname{Log}\left(-2-\sqrt{3}\right) + 2k\pi i = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \pi i + 2k\pi i, \ \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

2 pt

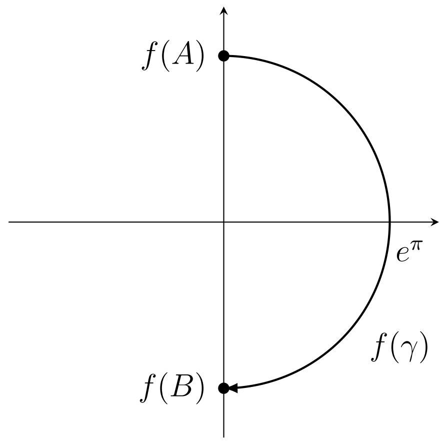
2. Feladat megoldása. A $\gamma(t) = [A, B]$ szakasz egy paraméterezése

$$\gamma(t) = A + (B-A)t = -\frac{\pi}{2} + \pi i + \left(\frac{\pi}{2} + \pi i - \left(-\frac{\pi}{2} + \pi i\right)\right) t = -\frac{\pi}{2} + \pi i + \pi t, \quad (0 \le t \le 1)\,.$$

Ekkor $f(z) = e^{-iz}$ miatt

$$f(\gamma(t)) = e^{-i\left(-\frac{\pi}{2}+\pi i+\pi t\right)} = e^{\frac{\pi}{2}i+\pi-\pi t i} = e^{\pi} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\pi t\right)}, \quad (0 \le t \le 1)\,.$$

Ez az origó középpontú, e^π sugarú, negatív irányítású körvonal $f(\gamma(0)) = e^\pi e^{\frac{\pi}{2}i} = e^\pi i$ és $f(\gamma(1)) = e^\pi e^{-\frac{\pi}{2}i} = -e^\pi i$ pontjait összekötő ív.



3 pt

B csoport

1. Feladat megoldása. Mivel

$$2^{1-i} = e^{(1-i)\log 2}$$

és

$$\log 2 = \operatorname{Log} 2 + 2k\pi i = \ln 2 + 2k\pi i\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

ezért

$$\begin{aligned} 2^{1-i} &= e^{(1-i)(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{\ln 2 + 2k\pi i - i\ln 2 + 2k\pi} \\ &= e^{\ln 2 + 2k\pi} \cdot e^{i2k\pi} \cdot e^{-i\ln 2} = 2e^{2k\pi} \cdot e^{-i\ln 2}\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

1 pt

Így

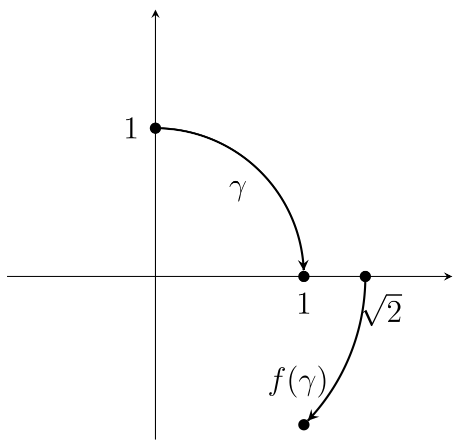
$$\left|2^{1-i}\right| = 2e^{2k\pi}\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,,$$

ami pontosan akkor lesz 2, ha $k = 0$, és ekkor

$$2^{1-i} = 2e^{-i\ln 2}\,.$$

2. Feladat megoldása. A körív paraméterezése

$$\gamma(t) = e^{-it}\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le 0\,.$$



2 pt

Mivel $-2i = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$, ezért

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= \sqrt{-2ie^{-it}} = \sqrt{2e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{-it}} \\ &= \sqrt{2e^{-\left(\frac{\pi}{2}+t\right)i}} = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\frac{\pi}{2}+t}{2}} \\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi+2t}{4}}\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le 0\,, \end{aligned}$$

ami az origó középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú, negatív irányítású körvonal

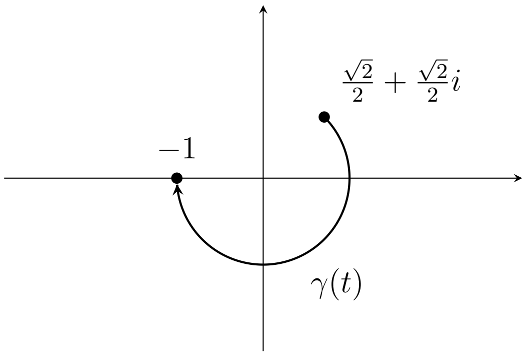
$$f(\gamma(-\pi/2)) = \sqrt{2} \quad \text{és} \quad f(\gamma(0)) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

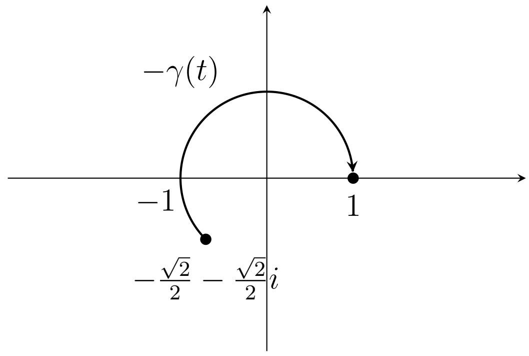
3 pt

pontjait összekötő körív.

C csoport

Feladat megoldása. Az $f(z)$ függvény összetett, a belső függvény a (-1)–gyel való szorzás, ami egy origó középpontú 180°–os forgatás.





A $-\gamma(t)$ görbét két részre bontjuk a -1 pont mentén, mert a $\operatorname{Log} z$ függvény nem folytonos a negatív valós tengely mentén:

$$l_1(t) = e^{-it}\,, \quad \frac{3\pi}{4} \leq t < \pi$$ 1 pt

és

$$l_2(t) = e^{-it}\,, \quad -\pi \leq t \leq 0\,.$$

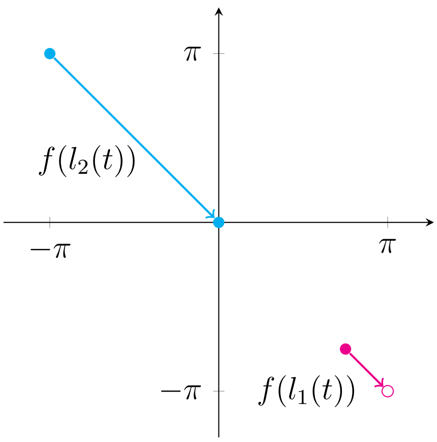
Ebből

$$f(l_1(t)) = (1+i)\operatorname{Log}(l_1(t)) = (1+i)\operatorname{Log}\left(e^{-it}\right) = (1+i)(-it) = t - it, \quad \frac{3\pi}{4} \leq t < \pi\,,$$

ez egy szakasz, kezdőpontja $\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}i$, végpontja $\pi - \pi i$, ami nyitott. 2 pt
Illetve

$$f(l_2(t)) = t - it\,, \quad -\pi \leq t \leq 0$$

is egy szakasz, kezdőpontja $-\pi + \pi i$, végpontja 0.



3 pt

4.

Lineáris törtfüggvények

Házi feladatok

Lineáris törtfüggvények

Lineáris törtfüggvénynek nevezzük az

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

alakú függvényeket, ahol $ad - bc \neq 0$.

- *Amennyiben $c = 0$, akkor a függvény lineáris és az*

$$f(z) = \alpha z + \beta\,, \quad \alpha \neq 0$$

  alakba írható.
- *Amennyiben $c \neq 0$, akkor a függvény az*

$$f(z) = \frac{\alpha}{z+\gamma} + \beta\,, \quad \alpha \neq 0$$

  alakra hozható.

1. Feladat. Az $f(z) = (1-i)z - 3 + i$ lineáris függvény esetén határozzuk meg a $z = 2 + 3i$ pont képét, majd vizsgáljuk, hogy milyen síkbeli transzformációnak felel meg a függvény.

Megoldás. A $z = 2 + 3i$ pont képe az

$$\omega = f(z) = (1-i)(2+3i) - 3 + i = 5 + i - 3 + i = 2 + 2i$$

pont.

- Ahogy azt láttuk, egy komplex számmal való szorzás a szám hosszával, azaz egy pozitív valós számmal vett szorzásnak, tehát egy origó középpontú *nyújtásnak/kicsinyítésnek*, és a szám szögével vett origó középpontú *forgatásnak* felel meg. Ezen transzformációk tetszőleges sorrendben elvégezhetők. Esetünkben $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, azaz

- ◦ a $\sqrt{2} > 1$ miatt ez nyújtást
- ◦ és $-\frac{\pi}{4}$ szöggel történő forgatást jelent.

- A komplex számok körében az összeadás egy *eltolásnak* felel meg, esetünkben ez
  - ◦ a $-3+i$ vektorral történik.

2. Feladat. Az $f(z) = \frac{1}{z}$ függvény esetén határozzuk meg a $z = 2+i$ pont képét, majd vizsgáljuk, hogy milyen síkbeli transzformációnak felel meg a függvény.

Megoldás. A $2+i$ pont képe

$$\omega = f(2+i) = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5} = \frac{1}{5}(2-i) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\,.$$

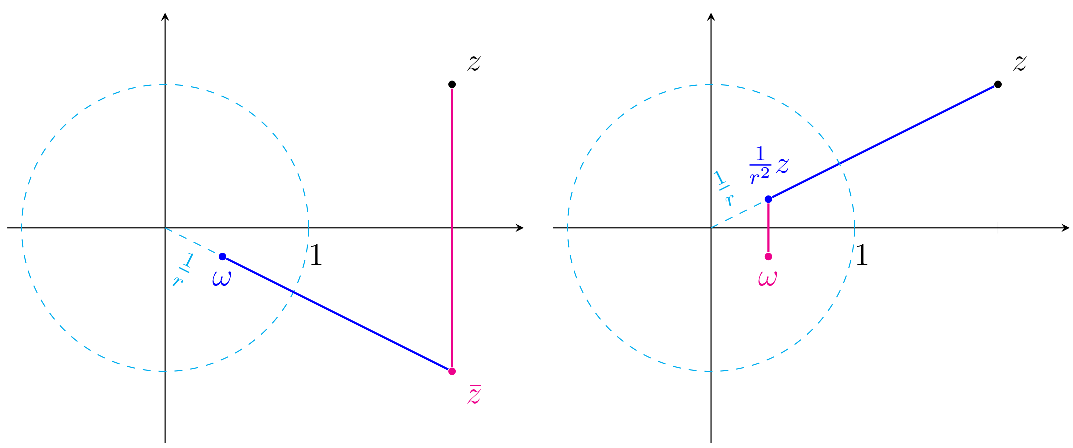
A $z = re^{i\varphi}$ exponenciális alak használatával

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \frac{1}{r^2}\cdot re^{-i\varphi} = \frac{1}{r^2}\bar{z}$$

alapján kapjuk, hogy a reciprok függvény

- egy x–tengelyre való tengelyes tükrözést és
- egy origó középpontú egységkörre való inverziót

jelent, melyeket tetszőleges sorrendben végezhetünk el.



MEGJEGYZÉS. Jól látható, hogy az inverzió és a tükrözés sorrendje felcserélhető. ✠

3. Feladat. Az $f(z) = \frac{2z-i}{iz-3+i}$ függvény esetén határozzuk meg a $z = 1-2i$ pont képét, majd adjuk meg, hogy milyen síkbeli transzformációnak felel meg a függvény.

Megoldás. Az $1-2i$ komplex szám képe

$$\begin{aligned}\omega = f(1-2i) &= \frac{2(1-2i)-i}{i(1-2i)-3+i} = \frac{2-5i}{-1+2i} \\ &= \frac{(2-5i)(-1-2i)}{5} = \frac{-12+i}{5} = -\frac{12}{5} + \frac{1}{5}i\,.\end{aligned}$$

A síkbeli transzformációk meghatározásához, $c = i \neq 0$ miatt a függvényt az

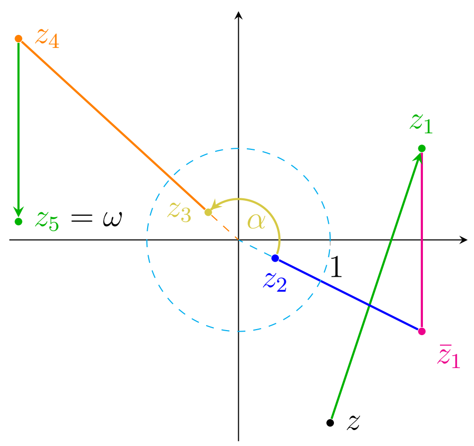
$$f(z) = \frac{\alpha}{z+\gamma} + \beta$$

alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z-i}{iz-3+i} = \frac{2}{i} \cdot \frac{z-\frac{i}{2}}{z-\frac{3}{i}+1} = -2i \cdot \frac{z-\frac{i}{2}}{z+3i+1} \\ &= -2i \cdot \left(1 + \frac{-1-\frac{7}{2}i}{z+1+3i}\right) = \frac{-7+2i}{z+1+3i} - 2i\,. \end{aligned}$$

Ez a következő transzformációk sorozatát jelenti:

- az $1+3i$ vektorral való eltolás (z_1),
- reciprokképzés, ami
  - az x tengelyre való tükrözés ($\bar{z}_1$),
  - és inverzió az egységkörre (z_2),
- a $-7+2i$ komplex számmal való szorzás, ami
  - egy origó középpontú $\alpha = \pi - \operatorname{arctg} \dfrac{2}{7}$ szögű forgatás (z_3),
  - és egy origó középpontú $\sqrt{53}$-szoros nyújtás (z_4),
- végül a $-2i$ vektorral való eltolás (z_5).

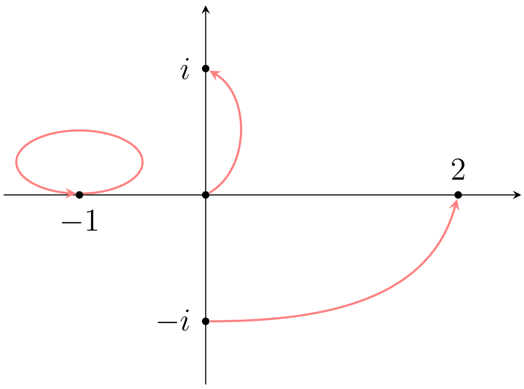


4. Feladat. Adjuk meg azt a lineáris törtfüggvényt amely a $0, -1$ és $-i$ pontokat rendre az $i, -1$ és 2 pontokba viszi.

Megoldás. Ekkor a

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto i\,, \\ -1 &\mapsto -1\,, \\ -i &\mapsto 2 \end{aligned}$$

hozzárendelések alapján a függvényre az $f(0) = i$, $f(-1) = -1$ és az $f(-i) = 2$ összefüggések érvényesek.



Így az

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

kifejezésbe helyettesítve kapjuk, hogy

(1) $f(0) = \dfrac{b}{d} = i$, azaz $d \neq 0$ és

$$b = id\,;$$

(2) $f(-1) = \dfrac{-a+b}{-c+d} = -1$, vagyis

$$b - a = c - d\,;$$

(3) $f(-i) = \dfrac{-ia+b}{-ic+d} = 2$, tehát

$$b - ia = 2d - 2ic\,.$$

A $b = id$ tulajdonság alapján a (2) és (3) összefüggés az

$$\begin{aligned} id - a &= c - d \\ id - ia &= 2d - 2ic \end{aligned}$$

alakot ölti. Ez utóbbi egyenletet i–vel megszorozva,

$$\begin{aligned} id - a &= c - d \\ -d + a &= 2id + 2c\,, \end{aligned}$$

és ezen egyenleteket összeadva,

$$id - d = c - d + 2id + 2c\,.$$

Rendezés után kapjuk, hogy

$$c = -\frac{i}{3}d\,.$$

Ezt az $id - a = c - d$ egyenletbe helyettesítve,

$$id - a = -\frac{i}{3}d - d$$

alapján elemi számolással adódik, hogy

$$a = \left(1 + \frac{4}{3}i\right)d\,.$$

Így a keresett lineáris törtfüggvény, $d \neq 0$ miatt

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\left(1+\frac{4}{3}i\right)dz + id}{-\frac{i}{3}dz + d} = \frac{\left(1+\frac{4}{3}i\right)z + i}{-\frac{i}{3}z + 1}\,.$$

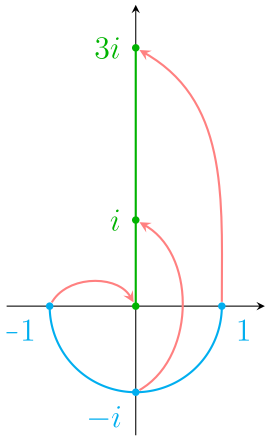
5. Feladat. Adjunk meg egy olyan lineáris törtfüggvényt, amely az egységkörvonal valós tengely alatti félkörívét a $[0, 3i]$ intervallumba viszi.

Megoldás. A lineáris törtfüggvény végpontot végpontba, belső pontot pedig belső pontba visz, továbbá a függvényt egyértelműen meghatározza három pont és azok képei. Ezek alapján a -1 és 1 pontoknak a 0 és $3i$ pontokat kell megfeleltetni (két lehetőség van), legyen például:

$$\begin{aligned} -1 &\mapsto 0\,, \\ 1 &\mapsto 3i\,. \end{aligned}$$

A belső pontok tetszőlegesek lehetnek, azaz a feladatnak végtelen sok megoldása van. Mi a következőt választjuk:

$$-i \mapsto i\,.$$



Így a függvénynek a következő összefüggéseket kell kielégítenie:

(1) $f(-1) = \dfrac{-a+b}{-c+d} = 0$, azaz $-a+b=0$, vagyis

$$b = a\,,$$

ezért, $ad - bc \neq 0$ miatt $a \neq 0$;

(2) $f(-i) = \dfrac{-ai+b}{-ci+d} = i$, vagyis

$$-ai + b = c + di\,,$$

(3) $f(1) = \dfrac{a+b}{c+d} = 3i$, tehát

$$a + b = 3ci + 3di\,;$$

A $b = a$ tulajdonság alapján a (2) és (3) összefüggés az

$$\begin{aligned} a - ai &= c + di \\ 2a &= 3ci + 3di \end{aligned}$$

alakot ölti. Az első egyenletet 3–mal megszorozva

$$\begin{aligned} 3a - 3ai &= 3c + 3di \\ 2a &= 3ci + 3di \end{aligned}$$

adódik, és ezen egyenleteket egymásból kivonva,

$$3ai - a = 3ci - 3c\,.$$

Rendezés után kapjuk, hogy

$$c = \frac{3i-1}{3i-3}a\,.$$

Ezt a $2a = 3ci + 3di$ egyenletbe helyettesítve

$$2a = \frac{3i-1}{i-1}ai + 3di\,,$$

ahonnan

$$3di = 2a - \frac{3i-1}{i-1}ai = \frac{2i-2}{i-1}a + \frac{3+i}{i-1}a = \frac{3i+1}{i-1}a\,,$$

azaz

$$d = \frac{3-i}{3i-3}a\,.$$

Így a keresett lineáris törtfüggvény, $a \neq 0$ miatt

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{az+a}{\frac{3i-1}{3i-3}az + \frac{3-i}{3i-3}a} = \frac{z+1}{\frac{3i-1}{3i-3}z + \frac{3-i}{3i-3}} \\ &= \frac{(3i-3)z + 3i - 3}{(3i-1)z + 3 - i}\,. \end{aligned}$$

Az $f(z)$ lineáris törtfüggvény határértékére vonatkozóan teljesül, hogy

- *amennyiben $c = 0$, akkor*
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty\,,$$
- *amennyiben $c \neq 0$, akkor*
$$\lim_{z\to -\frac{d}{c}} f(z) = \infty\,, \qquad \lim_{z\to\infty} f(z) = \frac{a}{c}\,.$$

Ezen tulajdonságok segítségével oldjuk meg a következő feladatot.

6. Feladat. Adjuk meg azt a lineáris törtfüggvényt amely az $A = \{x \leq -1,\ y = 0\}$ félegyenest a $B = \{x = 0,\ y \geq 1\}$ félegyenesbe viszi át.

Megoldás. Ebben az esetben mindkét félegyenest a "∞" ponttal lezárjuk, ezt tekintjük a másik végpontnak. Mivel a lineáris törtfüggvény végpontot végpontba visz, ezért például válasszuk a

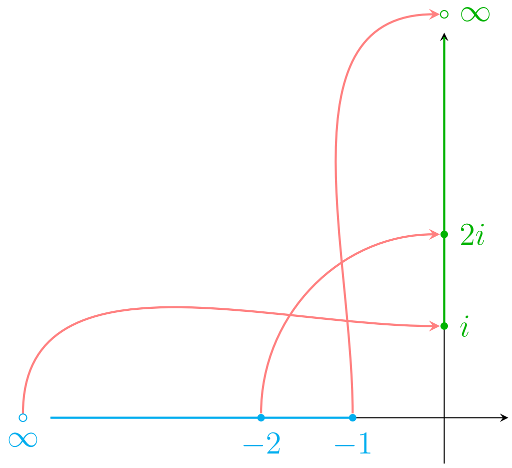
$$"\infty" \mapsto i\,,$$
$$-1 \mapsto "\infty"\,,$$

megfeleltetést, a belső pontok esetén pedig a

$$-2 \mapsto 2i\,,$$

hozzárendelést, azaz ekkor

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = i\,,\ \ \lim_{z\to -1} f(z) = \infty\,,\ \ f(-2) = 2i\,.$$



Ezek alapján $c \neq 0$, továbbá

(1) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = i$ miatt $\dfrac{a}{c} = i$, vagyis

$$a = ci\,;$$

(2) $\lim\limits_{z\to -1} f(z) = \infty$ alapján $-\dfrac{d}{c} = -1$, azaz

$$d = c\,;$$

(3) $f(-2) = \dfrac{-2a+b}{-2c+d} = 2i$, tehát

$$-2a + b = -4ci + 2di\,.$$

Az (1) és (2) összefüggés alapján a (3) egyenlet

$$-2ci + b = -4ci + 2ci\,,$$

amiből

$$b = 0\,.$$

Így a lineáris törtfüggvény, $c \neq 0$ miatt

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{ciz}{cz+c} = \frac{iz}{z+1}\,.$$

Videók

Lineáris törtfüggvények

1. Feladat. Határozzuk meg a következő pontoknak a megadott lineáris törtfüggvény melletti képeit, majd adjuk meg, hogy milyen síkbeli transzformációsorozatnak felel meg a függvény.

(a) $f(z) = 3z, \quad z_1 = 2 + i,\ z_2 = -1 + 2i$
(b) $f(z) = (3 - 4i)z, \quad g(z) = (4 + 3i)z, \quad z_1 = 2 + i$
(c) $f(z) = 1 - 2i + z, \quad z_1 = 2 + i,\ z_2 = -2 + 3i$
(d) $f(z) = 1 - 2i + (4 + 3i)z, \quad z_1 = 2 + i$

Megoldás. YouTube

(a) $f(z_1) = 6 + 3i,\ f(z_2) = -3 + 6i$; origó középpontú háromszoros nagyítás.
(b) $f(z_1) = 10 - 5i$; origó középpontú ötszörös nagyítás és $-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$–dal való forgatás,
$g(z_1) = 5 + 10i$; origó középpontú ötszörös nagyítás és $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$–del való forgatás.
(c) $f(z_1) = 3 - i,\ f(z_2) = -1 + i$; $1 - 2i$–vel való eltolás.
(d) $f(z_1) = 6 + 8i$; origó középpontú ötszörös nagyítás, $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$–del való forgatás, végül $1 - 2i$–vel való eltolás.

2. Feladat. Határozzuk meg a $z_1 = \dfrac{1}{2},\ z_2 = 3i,\ z_3 = 3 - i$ pontoknak az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ melletti képeit, majd adjuk meg, hogy milyen síkbeli transzformációsorozatnak felel meg a függvény.

Megoldás. YouTube

$f(z_1) = 2$; $f(z_2) = -\dfrac{1}{3}i$; $f(z_3) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10}i$; x–tengelyre való tükrözés, majd az origó középpontú, 1 sugarú körre vonatkozó inverzió.

3. Feladat. Határozzuk meg a $z_0 = -2 + i$ pontnak az $f(z) = \dfrac{iz + 2 - 3i}{3z - 6}$ melletti képét, majd adjuk meg, hogy milyen síkbeli transzformációsorozatnak felel meg a függvény.

Megoldás. YouTube

$f(z_0) = -\dfrac{27}{153} + \dfrac{57}{153}$; 2–vel való eltolás, x–tengelyre való tükrözés, az origó középpontú, 1 sugarú körre vonatkozó inverzió, origó középpontú, $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$–szoros nagyítás (kicsnyítés), $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$–del való forgatás, végül $\dfrac{i}{3}$–mal való eltolás.

4. Feladat. Adjuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely

(a) -1–et a 0–ba, i–t az 1–be viszi és $-i$–t helybenhagyja,
(b) -1–et a ∞–be viszi és i–t valamint $-i$–t helybenhagyja.

Megoldás.

(a) $f(z) = \dfrac{z+1}{1+i}$ (b) $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

5. Feladat. Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely az $[i, 4i]$ intervallumot az $[1, 3]$ intervallumba viszi.

Megoldás. Például $f(z) = \dfrac{5z-2i}{z+2i}$.

6. Feladat. Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely az $A = \{z \mid x = 0,\ y \leq -1\}$ halmazt a $B = \{z \mid y = 0,\ 1 \leq x \leq 3\}$ halmazba viszi.

Megoldás. Például $f(z) = 3 + \dfrac{2i}{z}$.

7. Feladat. Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely a $B = \{z \mid y = 0,\ 1 \leq x \leq 3\}$ halmazt az $A = \{z \mid x = 0,\ y \leq -1\}$ halmazba viszi.

Megoldás. Például $f(z) = \dfrac{2i}{z-3}$.

8. Feladat. Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely az $A = \{z \mid x = 0,\ y \leq -1\}$ halmazt a 2 középpontú, 1 sugarú kör első síknegyedbe eső félkörívébe viszi.

Megoldás. Például $f(z) = \dfrac{3z+3i-1}{z+i-1}$.

9. Feladat. Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely az $A = \{z \mid x^2+y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ halmazt a $B = \{z \mid y = 0,\ x \geq 1\}$ halmazba viszi.

Megoldás. Például $f(z) = \dfrac{(1-i)z+1+i}{z+1}$.

10. Feladat. Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely az $A = \{z \mid (x+1)^2+y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ halmazt a $B = \{z \mid x^2+y^2 = 1,\ x \geq 0\}$ halmazba viszi.

Megoldás. Például $f(z) = -iz - i$.

Kvízek

A csoport

1. Feladat. Határozzuk meg, hogy milyen síkbeli transzformációk sorozatát jelenti az $f(z) = (\sqrt{3} + i)z - 2 + i$ függvény.

.

2. Feladat. Adjuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a -1 pontot a 0 pontba, a 0 pontot az i pontba, és az i pontot az 1 pontba viszi.

B csoport

Feladat. Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely az origóból induló, $-1 + 2i$ ponton átmenő félegyenest a $2i$ pontból induló, $1 + 2i$ ponton átmenő félegyenesbe visz.

C csoport

Feladat. Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely az $A = \{z \mid x^2 + y^2 = 1,\ x \leq 0\}$ halmazt a $B = \{z \mid x = 2,\ y \geq -1\}$ halmazba viszi.

Kvízek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása. A $\sqrt{3}+i$ komplex szám esetén $r=\sqrt{3+1}=2$, $\operatorname{tg}\varphi = 1/\sqrt{3}$, így $\varphi=\pi/6$ alapján

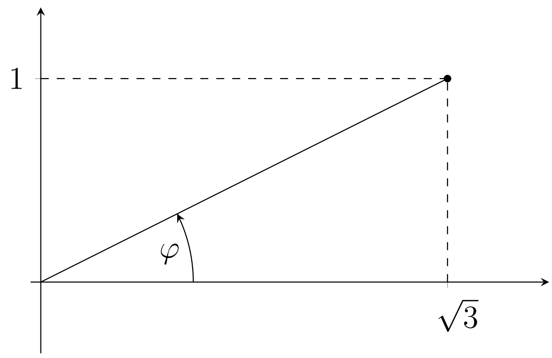
$$\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}\,,$$

azaz

$$f(z) = 2e^{i\pi/6}z + (-2+i)\,.$$

A transzformációsorozat:

- origó középpontú kétszeres nagyítás,
- origó középpontú forgatás $\pi/6$–tal,
- eltolás $-2+i$–vel.



1 pt

2. Feladat megoldása.
Ekkor

(1) $f(-1) = \dfrac{-a+b}{-c+d} = 0$, azaz

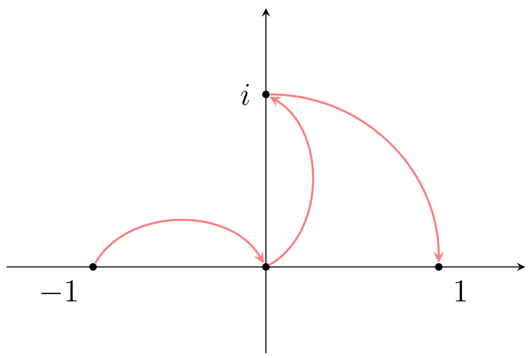
$$-a+b=0$$
$$b=a\,,$$

(2) $f(0) = \dfrac{b}{d} = i$, vagyis

$$b = di\,,$$

(3) $f(i) = \dfrac{ai+b}{ci+d} = 1$, tehát

$$ai+b = ci+d\,.$$



2 pt

A $b=a$ miatt a (2) összefüggésben $a=di$, azaz $d=-ai$. Ekkor a (3) összefüggésben

$$\begin{aligned} ai+a &= ci+(-ai) = ci-ai \\ 2ai+a &= ci \\ c &= 2a-ai\,. \end{aligned}$$

Így a keresett lineáris törtfüggvény

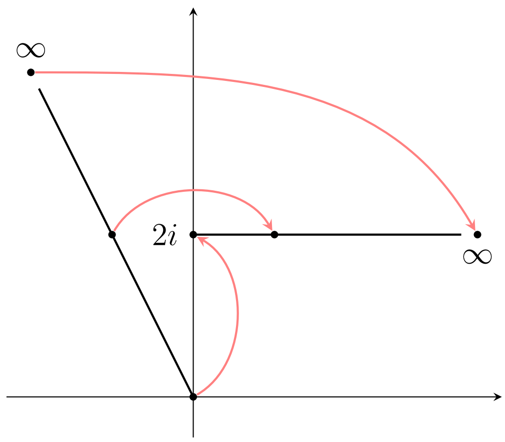
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+a}{(2a-ai)z-ai} = \frac{z+1}{(2-i)z-i}\,.$$

3 pt

B csoport

Feladat megoldása.
A megfeleltetés legyen például:

$$0 \mapsto 2i, \quad -1+2i \mapsto 1+2i, \quad \infty \mapsto \infty$$



Ekkor

(1) $f(0) = \dfrac{b}{d} = 2i$, vagyis

$$b = 2di\,.$$

(2) $f(-1+2i) = \dfrac{(-1+2i)a+b}{(-1+2i)c+d} = 1+2i$ 1 pt

(3) A $\infty \mapsto \infty$ tulajdonság azt jelenti, hogy

$$c = 0\,.$$

Így a (2) összefüggésben

$$\begin{aligned}\frac{(-1+2i)a+2di}{d} &= 1+2i \\ (-1+2i)a+2di &= (1+2i)d \\ (-1+2i)a+2di &= d+2di \\ (-1+2i)a &= d \\ a &= \frac{d}{-1+2i}\,.\end{aligned}$$ 2 pt

Tehát

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{d}{-1+2i}z+2di}{d} = \frac{z}{-1+2i}+2i\,.$$ 3 pt

C csoport

Feladat megoldása. A megfeleltetés legyen például:

$$i \mapsto \infty, \quad -1 \mapsto 2, \quad -i \mapsto 2-i\,.$$

Így

(1) $i \mapsto \infty$ miatt

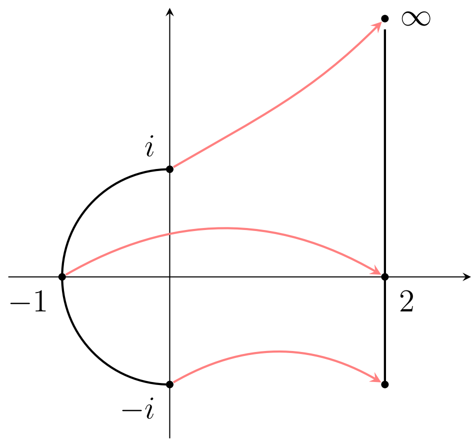
$$ci + d = 0$$
$$d = -ci\,,$$

(2) $f(-1) = \dfrac{-a+b}{-c+d} = 2$, azaz

$$-a+b = -2c+2d\,,$$

(3) $f(-i) = \dfrac{-ai+b}{-ci+d} = 2-i$, tehát

$$-ai+b = (2-i)(-ci+d)\,.$$



1 pt

Ekkor (1) alapján (2)–ben

$$-a+b = -2c-2ci\,,$$

(3)–ban

$$-ai+b = (2-i)(-ci-ci) = -4ci-2c\,.$$

2 pt

Ezen egyenletek kivonva egymásból:

$$-a+ai = 2ci$$
$$a(-1+i) = 2ci$$
$$a = \frac{2i}{-1+i}c$$

Így

$$b = -2c-2ci+a = -2c-2ci+\frac{2i}{-1+i}c = -2c-2ci+\frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}c$$
$$= -2c-2ci+\frac{2-2i}{2}c = -2c-2ci+c-ci = (-1-3i)c\,.$$

Tehát

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(1-i)cz+(-1-3i)c}{cz-ci} = \frac{(1-i)z-1-3i}{z-i}\,.$$

3 pt

5.

Derivált

Házi feladatok

Derivált

- *Ha az $f(z) = u(x,y)+iv(x,y) = u+iv$ komplex függvény differenciálható, akkor teljesülnek rá a Cauchy–Riemann egyenletek (CR7):*

$$u'_x = v'_y \quad \textit{és} \quad u'_y = -v'_x\,,$$

továbbá ekkor f deriváltja

$$f' = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y\,.$$

- *Ha a Cauchy–Riemann egyenletek mellett a parciális deriváltak folytonossága is teljesül, akkor a függvény differenciálható.*

1. Feladat. Definíció alapján határozzuk meg azon pontokat, ahol az $f(z) = z^2\bar{z}$ függvény differenciálható.

Megoldás. A derivált definíciója alapján

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\zeta\to 0}\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta} = \lim_{\zeta\to 0}\frac{(z+\zeta)^2\overline{(z+\zeta)}-z^2\bar{z}}{\zeta} \\ &= \lim_{\zeta\to 0}\frac{2z\bar{z}\zeta+\bar{z}\zeta^2+z^2\bar{\zeta}+2z\zeta\bar{\zeta}+\zeta^2\bar{\zeta}}{\zeta} = \lim_{\zeta\to 0}\left(2z\bar{z}+\bar{z}\zeta+z^2\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}+2z\bar{\zeta}+\zeta\bar{\zeta}z\right) \\ &= 2z\bar{z}+\lim_{\zeta\to 0}z^2\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}\,, \end{aligned}$$

mivel $\zeta\to 0$, ezért $\bar{\zeta}\to 0$ is teljesül. A $\lim\limits_{\zeta\to 0}z^2\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}$ határérték függ a z értékétől.

- Ha $z=0$, akkor

$$\lim_{\zeta\to 0}z^2\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} = \lim_{\zeta\to 0}0\cdot\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} = \lim_{\zeta\to 0}0 = 0\,,$$

és $2z\bar{z}=0$, tehát a függvény $z=0$–ban differenciálható és $f'(0)=0$.

- Ha $z \neq 0$, akkor $\lim\limits_{\zeta \to 0} z^2 \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} = z^2 \lim\limits_{\zeta \to 0} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta}$.
  - Ha ζ a valós tengely mentén tart 0–hoz, akkor $\bar{\zeta} = \zeta$, így
$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} = \lim_{\zeta \to 0} 1 = 1\,.$$
  - Amennyiben ζ a képzetes tengely mentén tart 0–hoz, akkor $\bar{\zeta} = -\zeta$, és így
$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} = \lim_{\zeta \to 0} (-1) = -1\,.$$

  Azaz a $\lim\limits_{\zeta \to 0} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta}$ határérték nem létezik, ezért ebben az esetben a függvény nem differenciálható.

Tehát az $f(z)$ függvény csak a $z = 0$ pontban differenciálható.

2. Feladat. A CR7 egyenletek alapján előbb határozzuk meg azon pontokat, ahol az $f(z) = z^2 \operatorname{Re} z$ függvény differenciálható, majd adjuk meg a deriváltat is.

Megoldás. Az
$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 x = (x^3 - xy^2) + 2x^2 yi$$
felbontás alapján a függvény valós és képzetes része
$$u = u(x, y) = x^3 - xy^2\,, \quad \text{valamint} \quad v = v(x, y) = 2x^2 y\,.$$
Az u és v parciális deriváltjai
$$u'_x = 3x^2 - y^2\,, \quad u'_y = -2xy\,, \quad v'_x = 4xy\,, \quad v'_y = 2x^2\,,$$
tehát a CR7 egyenletek alapján
$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y & \qquad\qquad u'_y &= -v'_x \\ 3x^2 - y^2 &= 2x^2 & -2xy &= -4xy \\ x^2 &= y^2 & xy &= 0 \end{aligned}$$
adódik. A második egyenlet miatt $x = 0$ vagy $y = 0$. Ha $x = 0$, akkor az első egyenletből $y = 0$ következik; hasonlóan $y = 0$ maga után vonja $x = 0$–t. Így a CR7 egyenleteket csak az $x = y = 0$ pont elégíti ki, tehát az $f(z)$ függvény csak a $z = 0$–ban lehet differenciálható. Mivel a parciális deriváltak minden x, y pontpár esetén folytonosak, ezért az $f(z)$ függvény valóban differenciálható is az origóban és a derivált értéke 0.

3. Feladat. A CR7 egyenletek alapján előbb határozzuk meg azon pontokat, ahol az $f(z) = (\operatorname{Re} z)^3 + (\operatorname{Im} z)^3 i$ függvény differenciálható, majd adjuk meg a deriváltat is.

Megoldás. Mivel $f(z) = (\operatorname{Re} z)^3 + (\operatorname{Im} z)^3 i = x^3 + y^3 i$, ezért

$$u = x^3 \quad \text{és} \quad v = y^3 \,.$$

A CR7 egyenletek alapján

$$\begin{aligned} u'_x &= v'_y & \qquad u'_y &= -v'_x \\ 3x^2 &= 3y^2 & 0 &= 0 \\ x^2 &= y^2 \\ |x| &= |y| \end{aligned}$$

Az első egyenletet azon pontok elégítik ki, melyre fennáll az $y = \pm x$ összefüggés, a második egyenletet pedig minden x, y pontpár kielégít. A parciális deriváltak folytonosak, ezért az $f(z)$ függvény csak az $x = y$ és az $x = -y$ egyenesek mentén differenciálható és a derivált

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = 3x^2 = 3\left(\operatorname{Re} z\right)^2 = v'_y - iu'_y = 3y^2 = 3\left(\operatorname{Im} z\right)^2 \,.$$

4. Feladat. A CR7 egyenletek alapján előbb határozzuk meg azon pontokat, ahol az $f(z) = \cos z$ függvény differenciálható, majd adjuk meg a deriváltat is.

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned} f(z) = \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x \cdot \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} + i \sin x \cdot \frac{e^{-y} - e^{y}}{2} \\ &= \cos x \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - i \sin x \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \,, \end{aligned}$$

ezért

$$u = \cos x \operatorname{ch} y \quad \text{és} \quad v = -\sin x \operatorname{sh} y \,.$$

A parciális deriváltak a következők:

$$u'_x = -\sin x \operatorname{ch} y \,, \quad u'_y = \cos x \operatorname{sh} y \,, \quad v'_x = -\cos x \operatorname{sh} y \,, \quad v'_y = -\sin x \operatorname{ch} y \,.$$

Jól láthatóan $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$, tehát a CR7 egyenletek teljesülnek minden x, y számpár esetén. Mivel a parciális deriváltak mindenhol folytonosak is, ezért a $\cos z$ függvény az egész komplex síkon differenciálható, és deriváltja

$$\begin{aligned} f'(z) = u'_x + iv'_x &= -\sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y = -\sin x \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - i \cos x \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{-e^{y}(\sin x + i \cos x) - e^{-y}(\sin x - i \cos x)}{2} = \frac{e^{y}(\cos x - i \sin x) - e^{-y}(\cos x + i \sin x)}{2i} \\ &= \frac{e^{y}e^{-ix} - e^{-y}e^{ix}}{2i} = \frac{e^{y-ix} - e^{-y+ix}}{2i} = \frac{e^{i(-x-iy)} - e^{i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\sin z \,. \end{aligned}$$

Harmonikus függvények

Egy $u(x,y)$ valós kétváltozós függvényt harmonikusnak nevezünk, ha $u''_{xx}+u''_{yy}=0$. A $v(x,y)$ függvényt az $u(x,y)$ harmonikus függvény harmonikus társának hívjuk, ha u és v kielégítik a CR7 egyenleteket.

5. Feladat. Ha az $u(x,y)=x^2-y^2+2x-3$ függvény harmonikus, adjuk meg a harmonikus társát.

Megoldás. Először megvizsgáljuk, hogy az u függvény harmonikus–e. Az elsőrendű parciális deriváltak

$$u'_x = 2x+2 \quad \text{és} \quad u'_y = -2y\,.$$

A (tiszta) másodrendűek pedig

$$u''_{xx} = 2 \quad \text{és} \quad u''_{yy} = -2\,,$$

így $u''_{xx}+u''_{yy}=0$ valóban, tehát u harmonikus. A CR7 egyenletek alapján az u harmonikus társára teljesülnek a következők:

$$v'_y = u'_x = 2x+2 \quad \text{és} \quad v'_x = -u'_y = 2y\,.$$

Ezek alapján integrálással kapjuk, hogy

$$v = \int v'_y\,dy = \int (2x+2)\,dy = 2xy+2y+C+g(x)$$

illetve

$$v = \int v'_x\,dx = \int 2y\,dx = 2xy+C+h(y)\,.$$

Tehát a keresett függvény

$$v = 2xy+2y+C\,.$$

6. Feladat. Ha az $v(x,y)=e^x\sin y$ függvény harmonikus, adjuk meg a harmonikus társát.

Megoldás. Mivel a parciális deriváltak

$$v'_x = e^x\sin y\,, \quad v'_y = e^x\cos y\,, \quad v''_{xx} = e^x\sin y \quad \text{és} \quad v''_{yy} = -e^x\sin y\,,$$

így $v''_{xx}+v''_{yy}=0$ alapján v harmonikus. Felírva a CR7 egyenleteket u–nak a következő összefüggéseket kell kielégítenie:

$$u'_x = v'_y = e^x\cos y \quad \text{és} \quad u'_y = -v'_x = -e^x\sin y\,.$$

Ezek alapján integrálással kapjuk, hogy

$$u = \int e^x\cos y\,dx = e^x\cos y + g(y) + C\,,$$

illetve

$$u = \int (-e^x\sin y)\,dy = e^x\cos y + h(x) + C\,.$$

Tehát a keresett társ

$$u = e^x\cos y + C\,.$$

Videók

Derivált

A következő feladatokban a Cauchy–Riemann egyenletek segítségével előbb határozzuk meg, hogy hol differenciálható az adott $f(z)$ függvény, majd ennek segítségével adjuk meg a deriváltat is.

1. Feladat. $f(z) = z^2$

Megoldás. Minden pontban differenciálható és $f'(z) = 2z$.

2. Feladat.

(a) $f(z) = e^z$

(b) $f(z) = \operatorname{Log} z$

Megoldás.

(a) Minden pontban differenciálható és $f'(z) = e^z$.

(b) Bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \mid x \le 0,\ y = 0\}$ esetén differenciálható és $g'(z) = \dfrac{1}{z}$.

3. Feladat. $f(z) = z|z|^2$

Megoldás. Csak a 0 pontban differenciálható és $f'(0) = 0$.

4. Feladat. $f(z) = z^2 \operatorname{Im} z$

Megoldás. Csak a 0 pontban differenciálható és $f'(0) = 0$.

5. Feladat. $f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2)$

Megoldás. Minden pontban differenciálható és $f'(z) = 3z^2 i$.

6. Feladat. (a) $f(z) = x^3 + (y-1)^3 i$ (b) $f(z) = x^3 - (y-1)^3 i$

Megoldás.

(a) Az $y = 1 \pm x$ esetén differenciálható és $f'(z) = 3(y-1)^2$.
(b) Csak a $z = i$ pontban differenciálható és $f'(i) = 0$.

7. Feladat. Határozzuk meg az $f(z) = \sin z$ függvény deriváltját formálisan, illetve a Cauchy–Riemann egyenletek segítségével is.

Megoldás. $f'(z) = \cos z$

Harmonikus–e az alábbi függvény? Amennyiben igen, határozzuk meg a harmonikus társát.

8. Feladat.

(a) $u = 2x(1-y)$ (b) $v = 2x(1-y)$

Megoldás.

(a) Harmonikus, és a harmonikus társa $v = 2y - y^2 + x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$.
(b) Harmonikus, és a harmonikus társa $u = y^2 - 2y - x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

9. Feladat. $u = x^2 - y^2 - 2x + 3$

Megoldás. Harmonikus, és a harmonikus társa $v = 2xy - 2y + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

10. Feladat. Milyen $\varphi(t)$ függvény esetén lesz az $u(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ függvény harmonikus?

Megoldás. $\varphi(t) = \ln |t| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Kvízek

A csoport

Feladat. Ha $u(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 3x - \sin x \operatorname{ch} y$ függvény harmonikus, adjuk meg a harmonikus társát.

B csoport

1. Feladat. Formálisan határozzuk meg az $f(z) = \operatorname{ch} z$ függvény deriváltját.

2. Feladat. A Cauchy–Riemann egyenletek segítségével előbb határozzuk meg azon pontokat, ahol az $f(x + iy) = x^2y + xy^2i$ függvény differenciálható, majd adjuk meg a deriváltat is.

C csoport

Feladat. A Cauchy–Riemann egyenletek segítségével határozzuk meg, hogy hol differenciálható az $f(z) = z^2|z|$ függvény, ha $z \neq 0$.

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása. Ekkor

$$u'_x = 2x - 3y - 3 - \cos x \operatorname{ch} y \qquad u'_y = -3x - 2y + 2 - \sin x \operatorname{sh} y\,,$$

és

$$u''_{xx} = 2 + \sin x \operatorname{ch} y \qquad u''_{yy} = -2 - \sin x \operatorname{ch} y\,,$$

így

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0\,,$$

tehát u harmonikus. 1 pt

A CR7 alapján

$$v'_y = u'_x = 2x - 3y - 3 - \cos x \operatorname{ch} y \quad \text{és} \quad v'_x = -u'_y = 3x + 2y - 2 + \sin x \operatorname{sh} y\,.$$

Azaz

$$v = \int v'_y\, dy = \int (2x - 3y - 3 - \cos x \operatorname{ch} y)\, dy = 2xy - \frac{3}{2}y^2 - 3y - \cos x \operatorname{sh} y + C + g(x)\,,$$

2 pt

illetve

$$v = \int v'_x\, dx = \int (3x + 2y - 2 + \sin x \operatorname{sh} y)\, dx = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - 2x - \cos x \operatorname{sh} y + C + h(y)\,.$$

Tehát a harmonikus társ

$$v = 2xy - \frac{3}{2}y^2 - 3y - \cos x \operatorname{sh} y + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C\,.$$

3 pt

B csoport

1. Feladat megoldása. A $\operatorname{ch} z$ függvény definíciója alapján

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

így

$$[\operatorname{ch} z]' = \frac{e^z + e^{-z} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z\,.$$ 1 pt

2. Feladat megoldása. Ekkor

$$u = x^2 y \qquad v = xy^2\,,$$

és

$$u'_x = 2xy \qquad\qquad v'_x = y^2$$
$$u'_y = x^2 \qquad\qquad v'_y = 2xy\,.$$

A CR7 alapján

$$u'_x = v'_y$$
$$2xy = 2xy\,,$$

ez azonosság, minden x, y pontpár kielégíti. 2 pt

$$u'_y = -v'_x$$
$$x^2 = -y^2$$
$$x^2 + y^2 = 0\,,$$

ez csak $x = y = 0$ esetén teljesül.

A parciális deriváltak folytonossága miatt az $f(z)$ függvény a $z = 0$–ban differenciálható. Továbbá

$$f' = u'_x + u'_y \cdot i = v'_y - v'_x \cdot i$$

és $u(0,0) = 0$, $v(0,0) = 0$ miatt

$$f'(0) = 0\,.$$ 3 pt

C csoport

Feladat megoldása. Ekkor

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2\sqrt{x^2+y^2} = (x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2} + 2ixy\sqrt{x^2+y^2}$$

alapján

$$u = u(x,y) = (x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,, \quad v = v(x,y) = 2xy\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Így

$$u'_x = 2x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x \qquad v'_x = 2y\sqrt{x^2+y^2} + \frac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x$$

$$u'_y = -2y\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y \qquad v'_y = 2x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y$$ 1 pt

tehát a CR7 alapján

$$\begin{aligned}
2x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x &= 2x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y \\
(x^2-y^2)x &= 2xy^2 \\
x^3 - 3xy^2 &= 0 \\
x(x^2-3y^2) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{vagy} \quad x^2 &= 3y^2
\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}
-2y\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y &= -2y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x \\
(x^2-y^2)y &= -2x^2y\,.
\end{aligned}$$ 2 pt

Ezen egyenletbe

- az $x=0$ értéket behelyettesítve $-y^3=0$, azaz $y=0$ adódik,
- az $x^2=3y^2$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
(3y^2-y^2)y &= -2\cdot 3y^2\cdot y \\
2y^3 &= -6y^3 \\
8y^3 &= 0\,,
\end{aligned}$$

  azaz $y=0$ és ezért $x=0$ adódik.

Tehát mindkét esetben nem origóban lévő pont nem lehet megoldás, azaz az origón kívüli pontokban f nem differenciálható. 3 pt

6.

Integrál

Házi feladatok

Integrál

- *Legyen f folytonos a γ görbén, és $z = \gamma(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Ekkor*

$$\int_\gamma f(z)\ dz := \int_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)\ dt\,.$$

- *Newton–Leibniz–tétel. Ha $f(z)$ primitív függvénye $F(z)$ és a γ görbe az a pontból a b pontba vezet, akkor*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = F(b) - F(a)\,.$$

- *Ha f differenciálható, akkor*

$$\oint_\gamma f(z)\ dz = 0\,.$$

- *Cauchy–féle integrálformula. Ha g differenciálható és a z_0 pont a γ görbe belsejében van, akkor*

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{g(z)}{z - z_0}\ dz\,.$$

- *Differenciálhányadosokra vonatkozó Cauchy–féle integrálformula. Ha g differenciálható és a z_0 pont a γ görbe belsejében van, akkor*

$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\ dz\,.$$

- *Reziduum formula. Ha g, h differenciálható, $g(z_0) = 0$, de $g'(z_0) \neq 0$, továbbá a z_0 pont a γ görbe belsejében van, és g–nek nincs másik zérushelye a γ beljesében, akkor*

$$\oint_{\gamma^+} \frac{h(z)}{g(z)}\ dz = 2\pi i \cdot \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$

1. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int_\gamma \left(\operatorname{Im} z + 3e^{iz} - 2\right)\, dz$$

komplex vonalintegrált, ahol a γ görbe az $1+i$ pontból a 2 pontba mutató szakasz.

Megoldás. A függvények folytonosak, így az integrál definiált. Az $\operatorname{Im} z$ függvény integrálját definíció szerint kell meghatározni. A $3e^{iz}-2$ függvény primitív függvénye ismert, így integrálját a Newton–Leibniz–tétel alapján számoljuk. Ezek alapján az integrált két részre bontjuk:

$$\int_\gamma \left(\operatorname{Im} z + 3e^{iz} - 2\right)\, dz = \int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz + \int_\gamma \left(3e^{iz} - 2\right)\, dz\,.$$

- Az első integrál meghatározásához paraméterezzük a görbét:

  $$z = \gamma(t) = [1+i, 2] = (1+i)(1-t) + 2t = 1 + t + (1-t)i\,, \qquad 0 \le t \le 1\,,$$

  így

  $$z'(t) = 1 - i \quad \text{és} \quad \operatorname{Im} z = 1 - t\,.$$

  Ekkor

  $$\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz = \int_0^1 (1-t)(1-i)\, dt = \left[(1-i)\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-i)\,.$$

- A második integrál

  $$\int_\gamma \left(3e^{iz} - 2\right)\, dz = \left[\frac{3e^{iz}}{i} - 2z\right]_{1+i}^{2} = \left[-3ie^{iz} - 2z\right]_{1+i}^{2} = -3ie^{2i} - 4 + 3ie^{i-1} + 2 + 2i\,.$$

Tehát

$$\int_\gamma \left(\operatorname{Im} z + 3e^{z} - 2\right)\, dz = -3ie^{2i} - 4 + 3ie^{i-1} + 2 + 2i + \frac{1}{2}(1-i)\,.$$

2. Feladat. Határozzuk meg az

$$\int_\gamma \left(2\bar{z} - z^2\right)\, dz$$

komplex vonalintegrált, ahol a γ görbe a $\gamma_{i,2}^{-}$ körív $2+i$ pontjából a $-i$ pontba megy.

Megoldás. A függvények folytonosak, és az előző feladathoz hasonlóan az integrált két részre bonjuk:

$$\int_\gamma \left(2\bar{z} - z^2\right)\, dz = \int_\gamma 2\bar{z}\, dz - \int_\gamma z^2\, dz\,.$$

- A z^2 függvény primitív függvénye ismert, így

  $$\int_\gamma z^2\, dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_{2+i}^{-i} = -\frac{2}{3} - \frac{10}{3}i\,.$$

- A második integrál meghatározásához paraméterezzük a görbét:
$$z = \gamma(t) = i + 2e^{-it}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$
Ekkor
$$z'(t) = -2ie^{-it} \quad \text{és} \quad \bar{z} = -i + 2e^{it}$$
alapján
$$\int_\gamma 2\bar{z}\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left(-i + 2e^{it}\right)\left(-2ie^{-it}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-4e^{-it} - 8i\right)\, dt$$
$$= \left[-4ie^{-it} - 8it\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -4 - 4\pi i + 4i\,.$$

Tehát
$$\int_\gamma \left(2\bar{z} - z^2\right)\, dz = -4 - 4\pi i + 4i + \frac{2}{3} + \frac{10}{3}i\,.$$

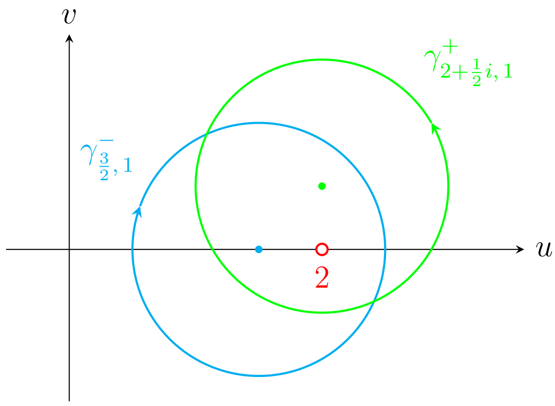
3. Feladat. Határozzuk meg az
$$\oint_\gamma \frac{\sin z}{z-2}\, dz$$
zárt görbe menti integrált, ha

(a) $\gamma = \gamma^+_{2+\frac{1}{2}i,\,1}$ (b) $\gamma = \gamma^-_{\frac{3}{2},\,1}$

Megoldás. A görbék zártak, a $z_0 = 2$ pont a görbéken belül található, és a $g(z) = \sin z$ függvény differenciálható. Így alkalmazhatjuk a Cauchy–féle integrálformulát.

(a) A $\gamma^+_{2+\frac{1}{2}i,\,1}$ görbe irányítása pozitív, így
$$\oint_{\gamma^+_{2+\frac{1}{2}i,\,1}} \frac{\sin z}{z-2}\, dz = 2\pi i \cdot g(2) = 2\pi i \cdot \sin 2\,.$$

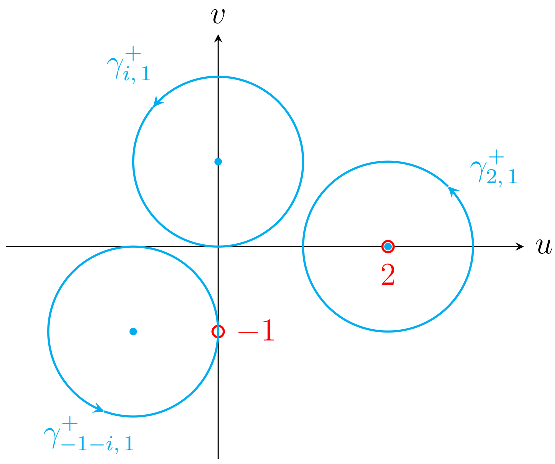
(b) Mivel $\gamma^-_{\frac{3}{2},\,1}$ irányítása negatív, ezért
$$\oint_{\gamma^-_{\frac{3}{2},\,1}} \frac{\sin z}{z-2}\, dz = -\oint_{\gamma^+_{\frac{3}{2},\,1}} \frac{\sin z}{z-2}\, dz$$
$$= -\oint_{\gamma^+_{2+\frac{1}{2}i,\,1}} \frac{\sin z}{z-2}\, dz = -2\pi i \cdot \sin 2\,.$$



4. Feladat. Határozzuk meg az
$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-2)(z+i)}\, dz$$
zárt görbe menti integrált, ha

(a) $\gamma = \gamma^+_{i,1}$ (b) $\gamma = \gamma^+_{2,1}$ (c) $\gamma = \gamma^+_{-1-i,1}$

Megoldás. Az $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+i)}$ függvény a $z_1 = 2$ és a $z_2 = -i$ pontokban nincs értelmezve, a sík többi pontjában differenciálható.



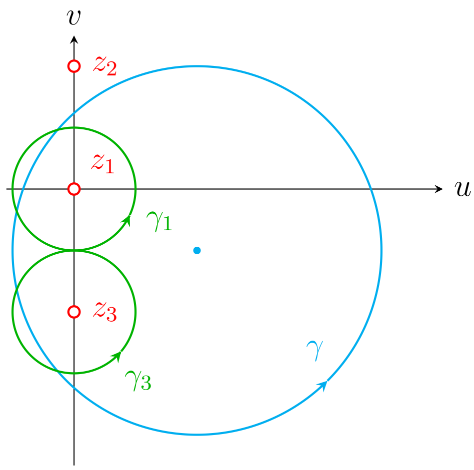
(a) Mivel az $f(z)$ függvény differenciálható a $\gamma^+_{i,1}$ görbén és a belsejében is, így
$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-2)(z+i)}\,dz = 0\,.$$

(b) Csak a $z_1 = 2$ pont van a $\gamma = \gamma^+_{2,1}$ görbe belsejében. Ezért az integrált átírva az
$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-2)(z+i)}\,dz = \oint_\gamma \frac{\frac{1}{z+i}}{z-2}\,dz$$
alakba, a számlálóban szereplő $g(z) = \dfrac{1}{z+i}$ függvény differenciálható a $\gamma^+_{2,1}$ görbén és a belsejében is, tehát alkalmazhatjuk a Cauchy–féle integrálformulát:
$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-2)(z+i)}\,dz = \oint_\gamma \frac{\frac{1}{z+i}}{z-2}\,dz = 2\pi i \cdot g(2) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2+i}\,.$$

(c) Mivel a $z_2 = -i$ pont rajta van a $\gamma^+_{-1-i,1}$ görbén, ahol az $f(z)$ függvény nincs értelmezve, az integrál nem értelmezhető.

5. Feladat. Határozzuk meg az
$$\oint_\gamma \frac{2z-3i}{z^4+4z^2}\,dz$$
integrált, ahol $\gamma = \gamma^+_{2-i,3}$

Megoldás. A $z^4 + 4z^2 = z^2(z-2i)(z+2i)$ felbontás alapján a kritikus pontok $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$ és $z_3 = -2i$. Mivel a z_1 és z_3 pontoknak a kör $2-i$ középpontjától vett távolsága $\sqrt{5} < 3$, a z_2 esetén pedig ez a távolság $\sqrt{13} > 3$, ezért csak a z_1 és z_3 pont található a körön belül. Tehát két kritikus pont is van a görbe belsejében, ezért az integrált felbontjuk két görbe menti integrál összegére:



$$\oint_\gamma = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_3}\,,$$

ahol γ_1–et és γ_3–at tetszőlegesen választjuk úgy, hogy ezen zárt görbék pozitív irányban kerüljék meg az adott kritikus pontot, azonban más kritikus pont ne legyen sem a belsejükben, sem a határukon, például $\gamma_1 = \gamma^+_{0,1}$ és $\gamma_3 = \gamma^+_{-2i,1}$. Ekkor

$$\oint_\gamma \frac{2z-3i}{z^4+4z^2}\,dz = \oint_\gamma \frac{2z-3i}{z^2(z-2i)(z+2i)}\,dz = \oint_{\gamma_3} \frac{\frac{2z-3i}{z^2(z-2i)}}{z+2i}\,dz + \oint_{\gamma_1} \frac{\frac{2z-3i}{z^2+4}}{z^2}\,dz\,.$$

- Az első integrál esetén a $g_3(z) = \dfrac{2z-3i}{z^2(z-2i)}$ függvény differenciálható a γ_3 görbe belsejében, így a Cauchy–féle integrálformulát a $z_0 = -2i$ értékkel alkalmazva kapjuk, hogy

$$\oint_{\gamma_3} \frac{\frac{2z-3i}{z^2(z-2i)}}{z+2i}\,dz = 2\pi i \cdot g_3(-2i) = 2\pi i \cdot \frac{2(-2i)-3i}{(-2i)^2(-2i-2i)} = -\frac{7}{8}\pi i\,.$$

- A második integrál esetén a $g_1(z) = \dfrac{2z-3i}{z^2+4}$ differenciálható a γ_1 belsejében, most azonban a z^2–nek a $z_0 = 0$ kétszeres gyöke, ezért a differenciálhányadosokra vonatkozó Cauchy–féle integrálformulát kell alkalmazni az $n = 1$ értékkel. Mivel

$$g_1'(z) = \frac{2\,(z^2+4)-(2z-3i)2z}{(z^2+4)^2},$$

ezért

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\frac{2z-3i}{z^2+4}}{z^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\cdot g_1'(0) = \pi i\,.$$

Tehát

$$\oint_\gamma \frac{2z-3i}{z^3+iz^2}\,dz = -\frac{7}{8}\pi i + \pi i = \frac{\pi}{8} i\,.$$

6. Feladat. Határozzuk meg az

$$\oint_\gamma \frac{z^2+iz}{\cos z}\,dz$$

integrált, ahol

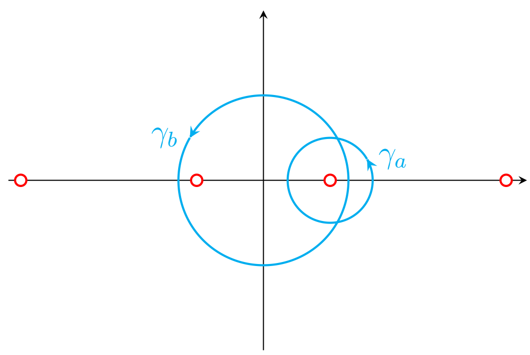
(a) $\gamma_a = \gamma^+_{\frac{\pi}{2},1}$ (b) $\gamma_b = \gamma^+_{0,2}$

Megoldás. A $\cos z$ zérushelyei $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ alakúak, ezért a a függvénynek mindkét görbe belsejében van kritikus pontja. Jól láthatóan az integrálformulák nem alkalmazhatóak, ezért ellenőrizzük a reziduum formula feltételeit. A

$$h(z) = z^2 + iz\,,\ g(z) = \cos z$$

függvények mindenhol differenciálhatóak, és

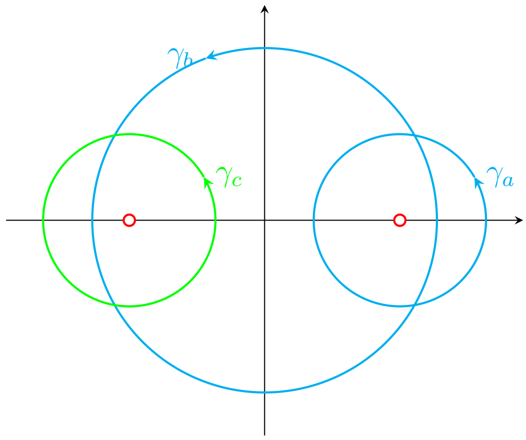
$$[g(z)]'_{\frac{\pi}{2}+k\pi} = -\sin z|_{\frac{\pi}{2}+k\pi} = (-1)^{k+1} \neq 0\,.$$



(a) A γ_a görbén belül csak a $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ pont található, így

$$\oint_{\gamma_a} \frac{z^2 + iz}{\cos z}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2\pi i \cdot \frac{\frac{\pi^2}{4} + i \cdot \frac{\pi}{2}}{-1}\,.$$

(b) A γ_b görbe belsejében két kritikus pont található, a $\dfrac{\pi}{2}$ és a $-\dfrac{\pi}{2}$. Az integrál meghatározása történhet például a $\gamma_c = \gamma^+_{-\frac{\pi}{2},1}$ és a γ_a segítségével, hiszen ezen körökön belül már csak egy-egy szinguláris pont található, a



$$\oint_{\gamma_b} = \oint_{\gamma_a} + \oint_{\gamma_c}$$

felbontás alapján.

Tehát az (a) rész eredményének ismeretében

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma_b} \frac{z^2 + iz}{\cos z}\, dz &= \oint_{\gamma_a} \frac{z^2 + iz}{\cos z}\, dz + \oint_{\gamma_c} \frac{z^2 + iz}{\cos z}\, dz \\
&= 2\pi i \cdot \frac{\frac{\pi^2}{4} + i \cdot \frac{\pi}{2}}{-1} + 2\pi i \cdot \frac{h\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{g'\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{\frac{\pi^2}{4} + i \cdot \frac{\pi}{2}}{-1} + 2\pi i \cdot \frac{\frac{\pi^2}{4} - i \cdot \frac{\pi}{2}}{1} \\
&= -2\pi i \cdot \frac{\pi^2 + 2\pi i}{4} + 2\pi i \cdot \frac{\pi^2 - 2\pi i}{4} = 2\pi^2\,.
\end{aligned}$$

Videók

Integrál

Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét.

1. Feladat. $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Re} z\ dz$, ahol γ a $\gamma_{0,1}^{+}$ körív $-i$ pontjából az 1 pontba megy.

Megoldás. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}i$

2. Feladat. $\displaystyle\int_\gamma z\ dz$, ahol γ a $\gamma_{0,1}^{-}$ körív 1 pontjából a -1 pontba megy.

Megoldás. 0

3. Feladat. $\displaystyle\int_\gamma \left(z^2-e^{iz}-i\operatorname{Im} z\right)\ dz$, ahol γ az $[1,i]$ irányított szakasz.

Megoldás.
$$-\frac{i}{3}+ie^{-1}-\frac{1}{3}-ie^{i}+\frac{1+i}{2}$$

4. Feladat. $\displaystyle\int_\gamma \left(|z|+\operatorname{sh}(3iz-2)\right)\ dz$, ahol γ a $\gamma_{0,2}^{-}$ körív -2 pontjából a $2i$ pontba megy.

Megoldás.
$$4i+4+\frac{\operatorname{ch}(6i+2)-\operatorname{ch} 8}{3}\cdot i$$

5. Feladat. $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z\ dz$, ahol $\gamma : \gamma_1\cup\gamma_2$ és

- γ_1 a $\gamma_{i,1}^{+}$ körív $-1+i$ pontjából a 0 pontba megy,
- γ_2 a $\gamma(t)=t+it^2$ görbe 0 pontjából az $1+i$ pontba megy.

Megoldás.
$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\pi i-\frac{\pi}{2}i-\frac{i}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}i$$

6. Feladat. $\displaystyle\oint_\gamma (2z+\bar{z})\ dz$, ahol

(a) γ az: i pontból a $-1-i$ pontba, majd az $-1-i$ pontból az $1-i$ pontba, végül az $1-i$ pontból az i pontba érkező tört szakasz;

(b) $\gamma=\gamma_{1+i,3}^{+}$

Megoldás.

(a) $4i$

(b) $18\pi i$

7. Feladat. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{z^2-4z}\,dz$, ahol

(a) $\gamma = \gamma^+_{1+i,1}$

(b) $\gamma = \gamma^+_{4,1}$

(c) $\gamma = \gamma^-_{0,1}$

Megoldás.

(a) 0

(b) $\dfrac{\pi}{2}i$

(c) $\dfrac{\pi}{2}i$

8. Feladat. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{z^3-9z}\,dz$, ahol

(a) $\gamma = \gamma^+_{0,1}$

(b) $\gamma = \gamma^-_{1,\frac{3}{2}}$

(c) $\gamma = \gamma^+_{1+i,3}$

(d) $\gamma = \gamma^+_{i,4}$

Megoldás.

(a) $-\dfrac{2}{9}\pi i$

(b) $\dfrac{2}{9}\pi i$

(c) $-\dfrac{1}{9}\pi i$

(d) 0

9. Feladat. $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz$, ahol $\gamma = \gamma^+_{1+i,2}$ és

(a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2+4}$,

(b) $f(z) = \dfrac{z^2+4}{\sin z}$.

Megoldás.

(a) $\dfrac{\pi}{2} i \operatorname{sh} 2$,

(b) $8\pi i$.

10. Feladat. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z}{z^3+i}\,dz$, ahol $\gamma = \gamma^+_{0,2}$.

Megoldás. 0

11. Feladat. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\operatorname{sh} z}{z^4-iz}\,dz$ integrált, ahol $\gamma = \gamma^+_{-\frac{i}{2},1}$.

Megoldás. $-\dfrac{2}{3}\pi i \sin 1$

12. Feladat. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\operatorname{ch} z}{(z+i)^3}\,dz$, ahol $\gamma = \gamma^-_{-1,2}$.

Megoldás. $-\pi i \cos 1$

13. Feladat. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^z}{z^4 - iz^2}\,dz,$ ahol $\gamma = \gamma^+_{1+i,2}$.

Megoldás. $\displaystyle -2\pi + 2\pi i \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}i - \sqrt{2}}$

YouTube

14. Feladat. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z^2 - 1 + 2zi)}\,dz,$ ahol $\gamma = \gamma^+_{1,2}$.

Megoldás. $4\pi + 2\pi(\operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1)$

YouTube

Kvízek

A csoport

Feladat. Határozzuk meg az

$$\int_\gamma \operatorname{Re} z \; dz$$

integrált, ha $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, ahol γ_1 a $\gamma_{i,2}^-$ körív $2+i$ pontjából a $-2+i$ pontba megy, γ_2 pedig a $[-2+i, i]$ irányított szakasz.

B csoport

Feladat. Határozzuk meg az

$$\oint_\gamma \left(2\bar{z} - z^2 + 5\sin z\right) \; dz\,,$$

integrált, ahol $\gamma = \gamma_{i,2}^+$.

C csoport

Feladat. Határozzuk meg az

$$\oint_\gamma \frac{5}{(z+3)^4(z-i)} \; dz$$

integrált, ahol

(a) $\gamma = \gamma_{0,\,2}^+$

(b) $\gamma = \gamma_{-3-i,\,2}^-$

D csoport

Feladat. Határozzuk meg az

$$\oint_\gamma \left(\frac{2z-i}{\sin(3z-3i)} + \frac{z+i}{z^3+i} \right) \; dz$$

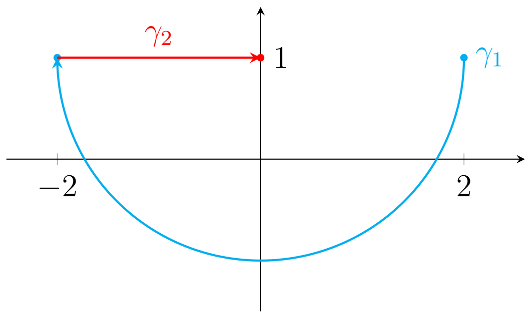
integrált, ahol $\gamma = \gamma_{i,\,1}^+$.

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása. Ekkor

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \operatorname{Re} z \, dz = \int_{\gamma_1} \operatorname{Re} z \, dz + \int_{\gamma_2} \operatorname{Re} z \, dz \,.$$



Az első integrál esetén
$z = \gamma_1(t) = i + 2(\cos t - i \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi,$
$z' = -2 \sin t - 2i \cos t$ és $\operatorname{Re} z = 2 \cos t$. 1 pt

Tehát

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \operatorname{Re} z \, dz &= \int_0^{\pi} 2 \cos t \cdot (-2 \sin t - 2i \cos t) \, dt = \int_0^{\pi} \left(-4 \cos t \sin t - 4i \cos^2 t\right) \, dt \\
&= \int_0^{\pi} (-2 \sin 2t - 2i(1 + \cos 2t)) \, dt = [\cos 2t - 2it - i \sin 2t]_0^{\pi} \\
&= \cos 2\pi - 2i\pi - i \sin 2\pi - (\cos 0 - i \sin 0) \\
&= 1 - 2\pi i - 1 = -2\pi i \,.
\end{aligned}$$
2 pt

A második integrál esetén

$$z = \gamma_2(t) = -2 + i + (i - (-2 + i))t = -2 + i + 2t, \quad 0 \leq t \leq 1 \,,$$

így $z' = 2$ és $\operatorname{Re} z = -2 + 2t$, ezért

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \operatorname{Re} z \, dz &= \int_0^1 (-2 + 2t) \cdot 2 \, dt = \int_0^1 (-4 + 4t) \, dt \\
&= \left[-4t + 2t^2\right]_0^1 = -4 + 2 = -2 \,.
\end{aligned}$$

Azaz

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \operatorname{Re} z \, dz = -2\pi i - 2 \,.$$
3 pt

B csoport

Feladat megoldása. Az integrált két részre bonjuk:

$$\oint_\gamma \left(2\bar{z} - z^2 + 5\sin z\right)\, dz = \oint_\gamma 2\bar{z}\, dz + \oint_\gamma \left(-z^2 + 5\sin z\right)\, dz\,.$$

A $-z^2 + 5\sin z$ függvény differenciálható, így

$$\oint_\gamma \left(-z^2 + 5\sin z\right)\, dz = 0\,.$$ 1 pt

A második integrál meghatározásához paraméterezzük a görbét:

$$z = \gamma(t) = i + 2e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Ekkor

$$z' = 2ie^{it} \quad \text{és} \quad \bar{z} = -i + 2e^{-it}$$ 2 pt

alapján

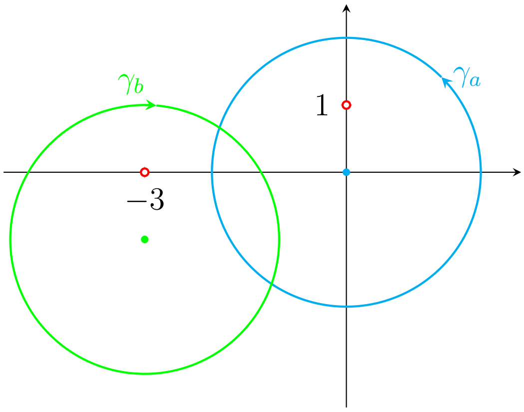
$$\begin{aligned}
\oint_\gamma 2\bar{z}\, dz &= \int_0^{2\pi} 2\left(-i + 2e^{-it}\right) \cdot 2ie^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} (4e^{it} + 8i)\, dt \\
&= \left[\frac{4e^{it}}{i} + 8it\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{4e^{i\cdot 2\pi}}{i} + 8i \cdot 2\pi\right) - \frac{4e^{i\cdot 0}}{i} \\
&= \frac{4}{i} + 16\pi i - \frac{4}{i} = 16\pi i\,.
\end{aligned}$$ 3 pt

C csoport

Feladat megoldása. Ekkor a szinguláris pontok a

$$(z+3)^4(z-i)=0$$

egyenletből: $z=-3$ és $z=i$.



(a) A $\gamma_a = \gamma^+_{0,2}$ kör esetén az i a görbén belül, -3 a görbén kívül található. Így 1 pt

$$\oint_{\gamma_a} \frac{5}{(z+3)^4(z-i)}\,dz = \oint_{\gamma_a} \frac{\frac{5}{(z+3)^4}}{z-i}\,dz = 2\pi i \left[\frac{5}{(z+3)^4}\right]_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{5}{(i+3)^4}\,.$$

(b) A $\gamma_b = \gamma^-_{-3-i,\,2}$ negatív irányítású, a -3 a belsejében, az i a görbén kívül van. Ezek alapján

$$\oint_{\gamma_b} \frac{5}{(z+3)^4(z-i)}\,dz = \oint_{\gamma_b} \frac{\frac{5}{z-i}}{(z+3)^4}\,dz = -\frac{2\pi i}{3!} \cdot \left[\frac{5}{z-i}\right]'''_{z=-3}\,.$$ 2 pt

A deriváltak

$$\left[\frac{5}{z-i}\right]' = \left[5(z-i)^{-1}\right]' = -5(z-i)^{-2}$$
$$\left[-5(z-i)^{-2}\right]' = 10(z-i)^{-3}$$
$$\left[10(z-i)^{-3}\right]' = -30(z-i)^{-4}\,.$$

Azaz

$$\left[\frac{5}{z-i}\right]'''_{z=-3} = \left[-30(z-i)^{-4}\right]_{z=-3} = \frac{-30}{(-3-i)^4}\,.$$

Így

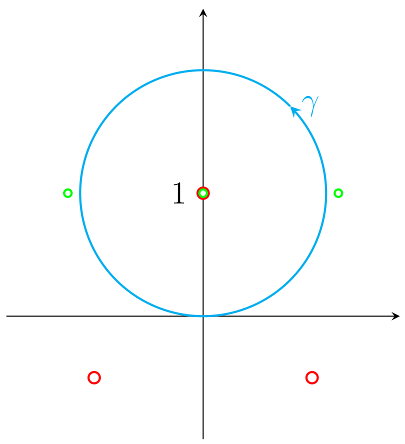
$$\oint_{\gamma_b} \frac{5}{(z+3)^4(z-i)}\,dz = -\frac{2\pi i}{3!} \cdot \frac{-30}{(-3-i)^4}\,.$$ 3 pt

D csoport

Feladat megoldása. A szinguláris pontok

- $$\begin{aligned} \sin(3z-3i) &= 0 \\ 3z-3i &= k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ z &= \frac{k}{3}\pi + i,\ k\in\mathbb{Z}\,, \end{aligned}$$

ez végtelen sok pont.



- $$\begin{aligned} z^3+i &= 0 \\ z^3 &= -i = e^{-\frac{\pi}{2}i} \\ z &= e^{-\frac{\pi}{6}i+\frac{2k\pi}{3}i},\ k\in\{0,1,2\} \end{aligned}$$

ez három pont. 1 pt

A γ belsejében csak az i található, ami mindkét megoldáshalmaznak eleme. Továbbá

$$[\sin(3z-3i)]'_{z=i} = 3\cos(3z-3i)|_{z=i} = 3\cos 0 = 3$$

és

$$[z^3+i]'_{z=i} = 3z^2|_{z=i} = 3i^2 = -3\,.$$ 2 pt

Így a reziduum formula alapján

$$\oint_\gamma \frac{2z-i}{\sin(3z-3i)}\,dz = 2\pi i\cdot\frac{2z-i|_{z=i}}{3\cos(3z-3i)|_{z=i}} = 2\pi i\cdot\frac{2i-i}{3}\,,$$

illetve

$$\oint_\gamma \frac{z+i}{z^3+i}\,dz = 2\pi i\cdot\frac{z+i|_{z=i}}{3z^2|_{z=i}} = 2\pi i\cdot\frac{i+i}{-3}\,,$$

tehát

$$\oint_\gamma\left(\frac{2z-i}{\sin(3z-3i)}+\frac{z+i}{z^3+i}\right)\,dz = 2\pi i\cdot\frac{2i-i}{3} + 2\pi i\cdot\frac{i+i}{-3}\,.$$ 3 pt

7.

Laurent–sor; Fourier–sor

Házi feladatok

Laurent–sor

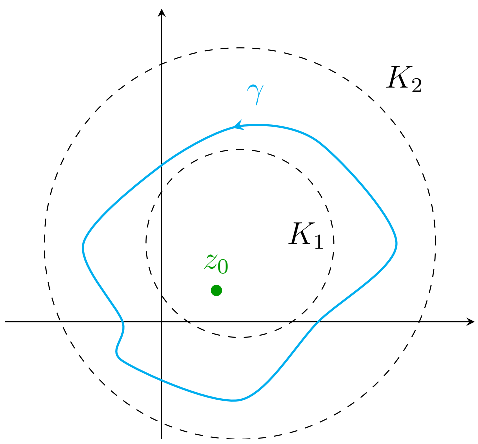
Ha az $f(z)$ függvény differenciálható a z_0 pont körüli (K_1, K_2) körgyűrűben, akkor e körgyűrűben a függvény Laurent–sorba fejthető a z_0 pont körül:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \,,$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

és γ a körgyűrűben haladó, a z_0 pontot pozitív irányban megkerülő, egyszerű zárt görbe.



1. Feladat. Határozzuk meg az $f(z) = \dfrac{1}{z+i}$ függvény $z_0 = 1 + i$ körüli Laurent–sorait.

Megoldás. A Laurent–sorokat nem a definíció alapján számoljuk. Törtfüggvények esetén ezeket a geometriai sor alapján kapott

$$\frac{1}{1-\zeta} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \,, & \text{ha } |\zeta| < 1 \,, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\zeta^n} \,, & \text{ha } |\zeta| > 1 \end{cases}$$

összefüggés segítségével határozzuk meg, amint azt a 2. fejezet 4. feladatában már gyakoroltuk.

A függvénynek egy szinguláris pontja van, a $-i$ pont, ez nem egyezik meg a kifejtés helyével. Ezért a nevezőben kialakítjuk a

$$z - z_0 = z - (1 + i) = z - 1 - i$$

kifejezést, majd a maradékot kiemeljük:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-1-i+1+2i} = \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1}{\frac{z-1-i}{1+2i}+1} = \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-1-i}{1+2i}\right)} .$$

Ekkor a második szorzótényező $\frac{1}{1-\zeta}$ alakú, ahol $\zeta = -\frac{z-1-i}{1+2i}$.

- Amennyiben $|\zeta| < 1$, azaz

$$\left|\frac{z-1-i}{1+2i}\right| = \frac{|z-(1+i)|}{\sqrt{5}} < 1$$
$$|z-(1+i)| < \sqrt{5}$$

alapján az $1+i$ középpontú, $\sqrt{5}$ sugarú körön belül a Laurent–sor

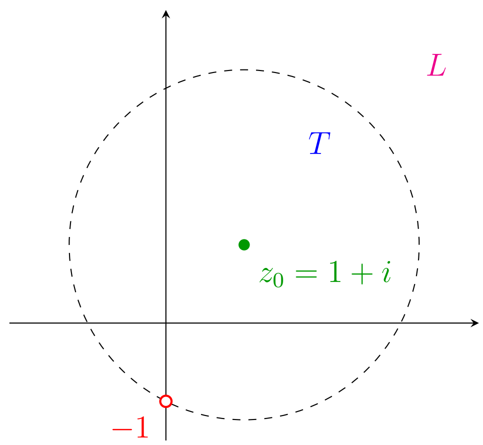
$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{1+2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1-i}{1+2i}\right)^n = \frac{1}{1+2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1-i)^n}{(1+2i)^n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}} (z-1-i)^n =: T ,$$

ami a függvény $1+i$ körüli Taylor–sora.

- Ha $|\zeta| > 1$, azaz az $1+i$ középpontú, $\sqrt{5}$ sugarú körön kívül a Laurent–sor

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{1+2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\left(-\frac{z-1-i}{1+2i}\right)^n} = \frac{1}{1+2i} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{-1}{\left(-\frac{z-1-i}{1+2i}\right)^{-n}}$$
$$= \frac{1}{1+2i} \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1) \cdot \left(-\frac{z-1-i}{1+2i}\right)^n = \frac{1}{1+2i} \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} \frac{(z-1-i)^n}{(1+2i)^n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(1+2i)^{n+1}} (z-1-i)^n =: L .$$

A függvény szinguláris pontja, a $-i$ pont a $z_0 = 1+i$ középpontú $\sqrt{5}$ sugarú körvonalon található. A körön belül T, a körön kívül az L Laurent–sor állítja elő a függvényt.



2. Feladat. Határozzuk meg az $f(z) = \frac{5}{(z+2)(z-i)}$ függvény $z_0 = -1-i$ körüli Laurent–sorait.

Megoldás. A függvénynek két szinguláris pontja van, a -2 és az i pont. Első lépésben elemi törtekre bontjuk a függvényt. A tört nevezője két különböző elsőfokú tényező szorzata, így a felbontás:

$$\frac{5}{(z+2)(z-i)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-i} = \frac{A(z-i)+B(z+2)}{(z+2)(z-i)}\,,$$

amiből

$$5 = A(z-i) + B(z+2)\,.$$

Az egyenletbe behelyettesítjük a nevező gyökeit.

- A $z=-2$ esetén $5 = A(-2-i)$, ahonnan

$$A = \frac{5}{-2-i} = \frac{5(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{5(-2+i)}{4+1} = -2+i\,.$$

- A $z=i$ esetén pedig $5 = B(i+2)$, ahonnan

$$B = \frac{5}{i+2} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(2-i)}{5} = 2-i\,.$$

Így

$$f(z) = \frac{5}{(z+2)(z-i)} = \frac{-2+i}{z+2} + \frac{2-i}{z-i}\,.$$

Az

$$f_1(z) = \frac{-2+i}{z+2}, \quad f_2(z) = \frac{2-i}{z-i}$$

függvényekre, amelyeknek már csak egy–egy szinguláris pontjuk van, alkalmazzuk az előző feladat gondolatmenetét.

- Az $f_1(z)$ függvény csak a -2 pontban nem differenciálható. Továbbá

$$f_1(z) = \frac{-2+i}{z+2} = \frac{-2+i}{z+1+i+1-i} = \frac{-2+i}{1-i}\cdot\frac{1}{\frac{z+1+i}{1-i}+1} = \frac{2-i}{-1+i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1+i}{-1+i}}\,,$$

ezért $\zeta_1 = \dfrac{z+1+i}{-1+i}$.

  - Ekkor $|\zeta_1|<1$ esetén, azaz a $|z+1+i| = \sqrt{2}$ körön belül Taylor–sort kapunk:

$$\frac{-2+i}{z+2} = \frac{2-i}{-1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1+i}{-1+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2-i}{(-1+i)^{n+1}}(z+1+i)^n =: T_1\,.$$

  - Amennyiben $|\zeta_1|>1$, azaz a $|z+1+i| = \sqrt{2}$ körön kívül

$$\frac{-2+i}{z+2} = \frac{2-i}{-1+i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\left(\frac{z+1+i}{-1+i}\right)^n} = \frac{2-i}{-1+i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)\left(\frac{z+1+i}{-1+i}\right)^n$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{-2+i}{(-1+i)^{n+1}}(z+1+i)^n =: L_1\,.$$

- Az $f_2(z)$ függvény csak az i pontban nem differenciálható. Továbbá

$$f_2(z) = \frac{2-i}{z-i} = \frac{2-i}{z+1+i-1-2i} = \frac{2-i}{-1-2i} \cdot \frac{1}{\frac{z+1+i}{-1-2i}+1} = \frac{-2+i}{1+2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1+i}{1+2i}}\,,$$

és így $\zeta_2 = \dfrac{z+1+i}{1+2i}$.

  - Ekkor $|\zeta_2| < 1$ esetén, azaz a $|z+1+i| = \sqrt{5}$ körön belül Taylor–sort kapunk:

$$\frac{2-i}{z-i} = \frac{-2+i}{1+2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1+i}{1+2i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2+i}{(1+2i)^{n+1}}(z+1+i)^n =: T_2\,.$$

  - Amennyiben $|\zeta_2| > 1$, azaz a $|z+1+i| = \sqrt{5}$ körön kívül

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{z-i} &= \frac{-2+i}{1+2i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\left(\frac{z+1+i}{1+2i}\right)^n} = \frac{-2+i}{1+2i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)\left(\frac{z+1+i}{1+2i}\right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2-i}{(1+2i)^{n+1}}(z+1+i)^n =: L_2\,.\end{aligned}$$

A fentiek alapján a függvény Laurent–sorai:

- amennyiben $|z+1+i| < \sqrt{2}$

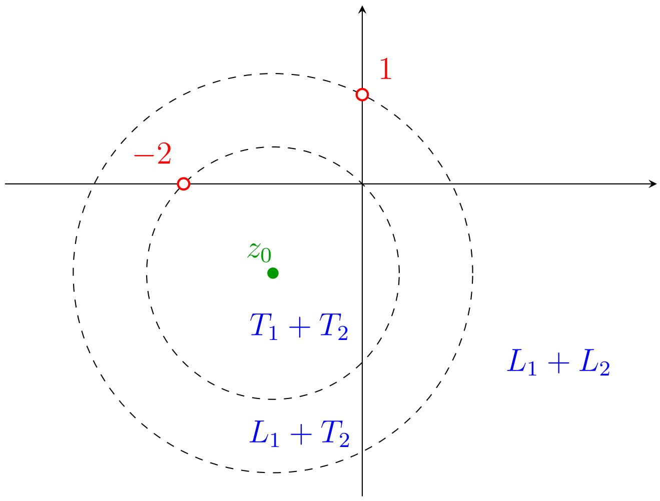
$$\begin{aligned}f(z) = T_1 + T_2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2-i}{(-1+i)^{n+1}}(z+1+i)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2+i}{(1+2i)^{n+1}}(z+1+i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2-i}{(-1+i)^{n+1}} + \frac{-2+i}{(1+2i)^{n+1}}\right)(z+1+i)^n\,;\end{aligned}$$

- a $\sqrt{2} < |z+1+i| < \sqrt{5}$ körgyűrűben

$$f(z) = L_1 + T_2 = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{-2+i}{(-1+i)^{n+1}}(z+1+i)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2+i}{(1+2i)^{n+1}}(z+1+i)^n\,;$$

- a $|z+1+i| > \sqrt{5}$ tartományban

$$\begin{aligned}f(z) = L_1 + L_2 &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{-2+i}{(-1+i)^{n+1}}(z+1+i)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2-i}{(1+2i)^{n+1}}(z+1+i)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{-2+i}{(-1+i)^{n+1}} + \frac{2-i}{(1+2i)^{n+1}}\right)(z+1+i)^n\,.\end{aligned}$$



3. Feladat. Határozzuk meg az $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z-i)}$ függvény $z_0 = 0$ körüli Laurent–sorait.

Megoldás. A függvény két szinguláris pontja a 0 és az i pont. A kifejtés helye $z_0 = 0$ egybeesik az egyik szinguláris ponttal, ezért

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-i)} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z^3} \cdot f_1(z)$$

alapján először az $f_1(z)$ függvény $z_0 = 0$ körüli Laurent–sorait kell meghatározni.

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{i}} = \begin{cases} \dfrac{1}{-i} \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n, & \text{ha } \left|\frac{z}{i}\right| < 1\,, \\ \dfrac{1}{-i} \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\left(\frac{z}{i}\right)^n}, & \text{ha } \left|\frac{z}{i}\right| > 1\,, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{i^{n+1}} z^n, & \text{ha } |z| < 1\,, \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{i^{n+1}} z^n, & \text{ha } |z| > 1\,. \end{cases}$$

Innen kapjuk, hogy $f(z)$ Laurent–sorai:

$$\frac{1}{z^3(z-i)} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{z-i} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{i^{n+1}} z^{n-3}, & \text{ha } 0 < |z| < 1\,, \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{i^{n+1}} z^{n-3}, & \text{ha } |z| > 1\,, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-3}^{\infty} \frac{-1}{i^{n+4}} z^n, & \text{ha } 0 < |z| < 1\,, \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-4} \frac{1}{i^{n+4}} z^n, & \text{ha } |z| > 1\,. \end{cases}$$

A következő feladatok megoldása során használjuk az alábbi összefüggéseket:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

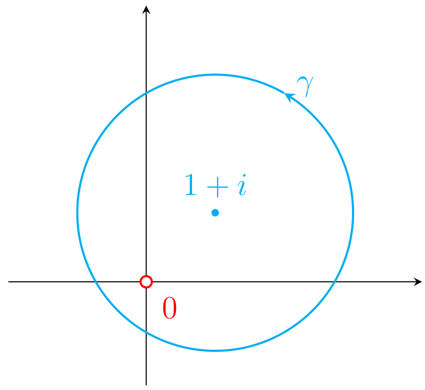
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C} \qquad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C} \qquad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

4. Feladat. Határozzuk meg a $\oint_\gamma z^3 e^{\frac{1}{z}}\, dz$ integrált $\gamma = \gamma^+_{1+i,\,2}$ esetén a Laurent–sor segítségével.

Megoldás.

Az $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ függvény egyetlen szinguláris pontja a 0 pont, amely a pozitív irányítású γ görbe belsejében van, így a keresett integrál meghatározható az $f(z)$ függvény 0 pont körüli Laurent–sorának segítségével:



$$\oint_\gamma z^3 e^{\frac{1}{z}}\, dz = 2\pi i c_{-1}\,.$$

Az $e^{\frac{1}{z}}$ függvény 0 pont körüli Laurent–sorát az

$$e^\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!}, \qquad \zeta \in \mathbb{C},$$

összefüggésből a $\zeta = \dfrac{1}{z}$ helyettesítéssel kapjuk:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n, \qquad z \neq 0\,.$$

Ezek alapján az $f(z)$ függvény 0 körüli Laurent–sora

$$z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^{n+3} = \sum_{n=-\infty}^{3} \frac{1}{(-n+3)!} z^n,$$

és így

$$c_{-1} = \frac{1}{4!},$$

tehát

$$\oint_\gamma z^3 e^{\frac{1}{z}}\, dz = \frac{2\pi i}{4!}\,.$$

MEGJEGYZÉS. A c_{-1} értéket az f függvény 0 pont körüli reziduumának nevezzük és a $Res(f, 0)$ jelölést használjuk rá. ✠

5. Feladat. Osztályozzuk a következő függvények izolált szingularitásait.

(a) $\dfrac{\operatorname{sh} z}{z^4}$ (b) $\operatorname{ch} \dfrac{3}{z-i}$ (c) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$

Megoldás.

(a) A $\dfrac{\operatorname{sh} z}{z^4}$ függvény egyetlen szinguláris pontja a 0 pont. A

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

összefüggés alapján a 0 pont körüli Laurent–sor

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{z^{2n+1}}{z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n-3} = z^{-3} + \frac{1}{3!} z^{-1} + \frac{1}{5!} z + \frac{1}{7!} z^3 + \dots$$

A sornak véges sok negatív kitevőjű tagja van, és a legkisebb kitevő a -3, ezért a 0 pont harmadrendű pólusa a függvénynek.

(b) A $\operatorname{ch} \dfrac{3}{z-i}$ függvény egyetlen szinguláris pontja az i pont. A $\operatorname{ch} z$ sorfejtése alapján az i pont körüli Laurent–sor

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} \frac{3}{z-i} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{3}{z-i}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!} (z-i)^{-2n} \\ &= 1 + \frac{3^2}{2} (z-i)^{-2} + \frac{3^4}{4!} (z-i)^{-4} + \dots\end{aligned}$$

A sorban végtelen sok negatív kitevőjű hatvány szerepel, ezért az i pont lényeges szingularitása a függvénynek.

(c) Az egyetlen szinguláris pont a 0 pont, és a

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos z}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right) = \frac{1}{z^2}\left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \frac{z^{2n}}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4!} z^2 + \frac{1}{6!} z^4 - \dots\end{aligned}$$

sornak nincs negatív indexű tagja, ezért a 0 pont megszüntethető szingularitása a függvénynek.

MEGJEGYZÉS. Az $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$ kiterjeszthető differenciálható függvénnyé:

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{ha } z \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha } z = 0. \end{cases}$$

✠

Fourier–sor

A 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény komplex Fourier–sora az

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

függvénysor, ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx\,.$$

6. Feladat. Határozzuk meg a következő függvény komplex Fourier–sorának együtthatóit algebrai alakban.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -\pi \le x < -\dfrac{\pi}{2}\,, \\ 1, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x < \pi\,. \end{cases}$$

Megoldás. Ha $n = 0$, akkor

$$2\pi c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\, dx = \frac{3\pi}{2},$$

azaz $c_0 = \dfrac{3}{4}$. Amennyiben $n \ne 0$, akkor

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-inx}\, dx = \left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{i}{n}\left(e^{-n\pi i} - e^{\frac{\pi}{2}ni}\right)\,,$$

így a komplex Fourier–együtthatók:

$$c_n = \frac{i}{2n\pi}\left(e^{-n\pi i} - e^{\frac{\pi}{2}ni}\right)\,.$$

Mivel $e^{i\varphi}$ periódusa 2π, ezért az algebrai alak megadásához négy esetet vizsgálunk.

$$\begin{aligned}
c_{4k+1} &= \frac{i}{2(4k+1)\pi}\left(e^{-\pi i} - e^{\frac{\pi}{2}i}\right) = \frac{i}{2(4k+1)\pi}(-1-i) = \frac{1}{(8k+2)\pi} + \frac{-1}{(8k+2)\pi}\, i\,, \\
c_{4k+2} &= \frac{i}{2(4k+2)\pi}\left(e^{0} - e^{\pi i}\right) = \frac{i}{2(4k+2)\pi}(1+1) = \frac{1}{(4k+2)\pi}\, i\,, \\
c_{4k+3} &= \frac{i}{2(4k+3)\pi}\left(e^{-\pi i} - e^{-\frac{\pi}{2}i}\right) = \frac{i}{2(4k+3)\pi}(-1+i) = \frac{-1}{(8k+6)\pi} + \frac{-1}{(8k+6)\pi}\, i\,, \\
c_{4k} &= \frac{i}{8k\pi}\left(e^{0} - e^{0}\right) = 0\,, \quad \text{ha} \quad k \ne 0\,.
\end{aligned}$$

7. Feladat. Határozzuk meg a következő függvény komplex Fourier–sorának együtthatóit, továbbá a valós Fourier–sorának együtthatóit is.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -\pi \le x < 0\,, \\ x, & \text{ha} \quad 0 \le x < \pi\,. \end{cases}$$

Megoldás. A

$$2\pi c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}\,,$$

alapján $c_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Továbbá, ha $n \neq 0$, akkor

$$2\pi c_n = \int_0^{\pi} x e^{-inx}\,dx$$

miatt parciális integrálással,

$$s = x\,, \quad t' = e^{-inx}\,, \quad s' = 1\,, \quad t = \frac{e^{-inx}}{-in}$$

alapján kapjuk, hogy

$$\int \underbrace{x e^{-inx}}_{st'}\,dx = \underbrace{x\frac{e^{-inx}}{-in}}_{st} - \int \underbrace{\frac{e^{-inx}}{-in}}_{s't} = \frac{xi}{n}e^{-inx} + \frac{1}{n^2}e^{-inx}\,,$$

ahonnan

$$2\pi c_n = \int_0^{\pi} x e^{-inx}\,dx = \left[\frac{xi}{n}e^{-inx} + \frac{1}{n^2}e^{-inx}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi i}{n}e^{-n\pi i} + \frac{1}{n^2}(e^{-n\pi i} - 1)\,.$$

Így

$$c_{2k+1} = \frac{i}{2(2k+1)}e^{-\pi i} + \frac{1}{2\pi(2k+1)^2}(e^{-\pi i} - 1) = -\frac{i}{2(2k+1)} - \frac{1}{\pi(2k+1)^2}\,,$$
$$c_{2k} = \frac{i}{4k}e^{0} + \frac{1}{2\pi(2k)^2}(e^{0} - 1) = \frac{i}{4k}\,, \quad \text{ha} \quad k \neq 0\,.$$

Az

$$a_0 = c_0, \quad a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n \quad \text{és} \quad b_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n$$

összefüggések alapján a valós Fourier–sor együtthatóira kapjuk, hogy $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$, valamint

$$a_{2k+1} = -\frac{2}{(2k+1)^2\pi}\,, \qquad b_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\,,$$
$$a_{2k} = 0\,, \qquad b_{2k} = -\frac{1}{2k}\,, \qquad \text{ha} \quad k \neq 0\,.$$

Videók

Laurent-sor

Adjuk meg az alábbi $f(z)$ függvények z_0 pont körüli Laurent-sorait.

1. Feladat. $f(z) = \dfrac{1}{z+i}$ és

(a) $z_0 = -i$, (b) $z_0 = 0$.

Megoldás.

(a) $(z+i)^{-1}$

(b) $\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} z^n, & \text{ha } |z| < 1 \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} -i^{n+1} z^n, & \text{ha } |z| > 1 \end{cases}$

2. Feladat. $f(z) = \dfrac{1}{z-1}, \quad z_0 = 2-i$

Megoldás.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-i}\right)^{n+1} (z-2+i)^n, & \text{ha } |z-2+i| < \sqrt{2} \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{1}{1-i}\right)^{n+1} (z-2+i)^n, & \text{ha } |z-2+i| > \sqrt{2} \end{cases}$$

3. Feladat. $f(z) = \dfrac{3}{z^2-z-2}, \quad z_0 = i$

Megoldás.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(-\frac{1}{2-i}\right)^{n+1} - (-1)^n \left(\frac{1}{1+i}\right)^{n+1} \right) (z-i)^n, & \text{ha } |z-i| < \sqrt{2} \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n \left(\frac{1}{1+i}\right)^{n+1} (z-i)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2-i}\right)^{n+1} (z-i)^n, & \text{ha } \sqrt{2} < |z-i| < \sqrt{5} \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\left(\frac{1}{2-i}\right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{1}{1+i}\right)^{n+1} \right) (z-i)^n, & \text{ha } \sqrt{5} < |z-i| \end{cases}$$

4. Feladat. $f(z) = \dfrac{z}{1+z^4}, \quad z_0 = 0$

Megoldás.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{4n+1}, & \text{ha } |z|<1 \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1} z^{4n+1}, & \text{ha } |z|>1 \end{cases}$$

5. Feladat. Adjuk meg az $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$ függvény $z_0 = 2i$ pont körüli Laurent–sorát a $2 < |z-2i| < 3$ körgyűrűben.

Megoldás.

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\left((-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{i}\right)^{n+1}\right)(z-2i)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(\frac{1}{3i}\right)^n (z-2i)^n$$

Határozzuk meg a következő integrálokat a megfelelő Laurent–sor segítségével.

6. Feladat. $\displaystyle\oint_{\gamma^+_{0,2}} \frac{z}{z^3+i}\,dz$

Megoldás. 0

7. Feladat. $\displaystyle\oint_{\gamma^+_{i,4}} \frac{1}{z\,(z^2-9)}\,dz$

Megoldás. 0

8. Feladat. $\displaystyle\oint_{\gamma^+_{0,2}} z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz$

Megoldás. $-\dfrac{\pi}{3}i$

9. Feladat. $\displaystyle\oint_{\gamma^+_{0,2}} (z+1)\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{z-1}\,dz$

Megoldás. πi

10. Feladat. Adjuk meg a következő függvények szingularitási helyeit és határozzuk meg, hogy izolált-e.

(a) $\cos\dfrac{1}{z+i}$ (b) $\dfrac{1}{\sin z}$ (c) $\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$

Megoldás.

(a) A $-i$ pont izolált szingularitás.
(b) A $\{k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\}$ pontok izolált szingularitások.
(c) A $\left\{\dfrac{-i}{2k\pi}, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$ pontok izolált szingularitások; $z=0$ nem izolált szingularitás.

11. Feladat. Osztályozzuk a következő függvények izolált szingularitásait.

(a) $\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^2}$, (b) $e^{\frac{z}{z+i}}$, (c) $\dfrac{\sin 3z}{z}$.

Megoldás.

(a) A 0 pont másodrendű pólus.
(b) A $-i$ pont lényeges szingularitás.
(c) A 0 pont megszüntethető szingularitás.

12. Feladat. Adjuk meg a $g(t)=\dfrac{3}{5-4\cos t}$ függvény valós Fourier–sorát a Laurent–sor segítségével.

Megoldás. $1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n+1}\cos nt$

Fourier-sor

A következő feladatokban határozzuk meg a megadott függvény komplex Fourier–sorának együtthatóit.

13. Feladat.

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

Megoldás. $c_0=\dfrac{1}{2}, \qquad c_n=\dfrac{i}{2\pi}\cdot\dfrac{1-(-1)^n}{n},\ n\neq 0$

14. Feladat.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ e^{-x}, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

Megoldás. $c_n = \dfrac{1-in}{2\pi} \cdot \dfrac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}$

15. Feladat.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Megoldás.

$c_0 = 0; \qquad c_{\pm 1} = \dfrac{1}{4}; \qquad c_{2n} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{n}{4n^2-1} i \quad (n \neq 0); \qquad c_{2n-1} = 0 \quad (n \neq 0, 1)$

16. Feladat. Határozzuk meg a következő függvény Fourier–transzformáltját.

$$F(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Megoldás.

$\hat{F}(\omega) = \dfrac{1 + e^{-\pi} \cdot (\omega \sin \pi\omega - \cos \pi\omega)}{(1+\omega^2)} + \dfrac{-\omega + e^{-\pi} \cdot \omega \cos \pi\omega + \sin \pi\omega}{(1+\omega^2)} i$

Kvízek

A csoport

Feladat. Adjuk meg az $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z^2 + iz + 2i}{z+2} = z^2 + i + \dfrac{1}{z+2}$ Laurent–sorait az $a = -i$ pont körül.

B csoport

Feladat. Adjuk meg az $f(z) = \dfrac{4i}{z^2+4}$ függvény i pont körüli Laurent–sorát az $1 < |z - i| < 3$ körgyűrűben.

C csoport

Feladat. Adjuk meg az $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+1}$ Laurent–sorait az $a = i$ pont körül.

D csoport

Feladat. Osztályozzuk az $f(z) = \sin \dfrac{1}{2z+i}$ függvény szingularitásait, majd határozzuk meg a

$$\oint_{\gamma_{0,1}^+} \sin \frac{1}{2z+i}\, dz$$

integrált.

E csoport

Feladat. Adjuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & -\pi < x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

függvény komplex Fourier–sorának c_n együtthatóit algebrai alakban, majd ennek segítségével a valós Fourier–sor a_n, b_n együtthatóit is.

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása.

A z^2+i függvény differenciálható, így a Taylor–sora lesz a Laurent–sora bármely z–re.

$$g(z)=z^2+i,\ g'(z)=2z,\ g''(z)=2,\ g^{(n)}(z)=0,\ n\geq 3 \ \text{ alapán}$$
$$g(-i)=-1+i,\ g'(-i)=-2i,\ g''(-i)=2,\ g^{(n)}(-i)=0,\ n\geq 3\,, \ \text{ ezért}$$
$$z^2+i=-1+i-2i(z+i)+\frac{2}{2!}(z+i)^2\,.$$

1 pt

Az $\dfrac{1}{z+2}$ nem differenciálható a -2 pontban, továbbá

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z+i+2-i}=\frac{1}{2-i}\cdot\frac{1}{\frac{z+i}{2-i}+1}=\frac{1}{2-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+i}{-2+i}}$$

miatt

$$\frac{1}{z+2}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{-2+i}\right)^n, & \text{ha } \left|\dfrac{z+i}{-2+i}\right|<1\,,\\[2ex] \dfrac{1}{2-i}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1}-\left(\frac{z+i}{-2+i}\right)^n, & \text{ha } \left|\dfrac{z+i}{-2+i}\right|>1\,,\end{cases}$$

azaz

$$\frac{1}{z+2}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(-2+i)^{n+1}}(z+i)^n, & \text{ha } |z+i|<\sqrt{5}\,,\\[2ex] \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-2+i)^{n+1}}(z+i)^n, & \text{ha } |z+i|>\sqrt{5}\,.\end{cases}$$

2 pt

Tehát f Laurent–sorai:

- ha $|z+i|<\sqrt{5}$, akkor

$$\begin{aligned}f(z)&=-1+i-2i(z+i)+(z+i)^2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(-2+i)^{n+1}}(z+i)^n\\ &=-1+i-\frac{1}{-2+i}-\left(2i+\frac{1}{(-2+i)^2}\right)(z+i)+\left(1+\frac{-1}{(-2+i)^3}\right)(z+i)^2\\ &\quad+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{-1}{(-2+i)^{n+1}}(z+i)^n\,,\end{aligned}$$

- ha $|z+i|>\sqrt{5}$, akkor

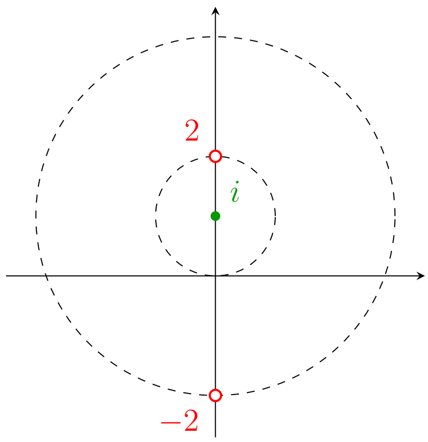
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-2+i)^{n+1}}(z+i)^n-1+i-2i(z+i)+(z+i)^2\,.$$

3 pt

B csoport

Feladat megoldása. A szinguláris pontok:

$$\begin{aligned} z^2+4&=0\\ z^2&=-4=4e^{\pi i}\\ z&=\sqrt{4}e^{\frac{\pi}{2}i+k\pi i}, \quad k=0,1\\ z&=\pm 2i\,, \end{aligned}$$



melyek az

$$1<|z-i|<3$$

körgyűrűt határoló körökön helyezkednek el.

Továbbá

$$\frac{4i}{z^2+4}=\frac{A}{z-2i}+\frac{B}{z+2i}=\frac{A(z+2i)+B(z-2i)}{z^2+4}\,,$$

1 pt

azaz

$$4i=A(z+2i)+B(z-2i)\,.$$

Ha $z=-2i$, akkor $4i=-4Bi$, azaz $B=-1$.
Ha $z=2i$, akkor $4i=4Ai$, azaz $A=1$.

Mivel $2i$ a belső körön van, így ha $|z-i|>1$, akkor

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{z-i-i}=\frac{1}{-i}\cdot\frac{1}{\frac{z-i}{-i}+1}=\frac{1}{-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{i}}$$
$$=\frac{1}{-i}\sum_{n=-\infty}^{-1}-\left(\frac{z-i}{i}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{i^{n+1}}(z-i)^n\,.$$

2 pt

Ugyanakkor $-2i$ a külső körön van, ezért ha $|z-i|<3$, akkor

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{z-i+3i}=\frac{1}{3i}\cdot\frac{1}{\frac{z-i}{3i}+1}=\frac{1}{3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{-3i}}$$
$$=\frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{-3i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(-3i)^{n+1}}(z-i)^n\,.$$

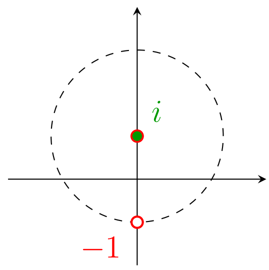
Azaz, ha $1<|z-i|<3$, akkor

$$\frac{4i}{z^2+4}=\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{z+2i}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{i^{n+1}}(z-i)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-3i)^{n+1}}(z-i)^n\,.$$

3 pt

C csoport

Feladat megoldása. A szinguláris pontok:



$$\begin{aligned} z^2+1&=0\\ z^2&=-1=e^{\pi i}\\ z&=e^{\frac{\pi}{2}i+k\pi i}\,,\quad k=0,1\\ z&=\pm i\,,\end{aligned}$$

azaz a kifejtési hely, $a=i$ egyben zérushely.
Ekkor

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{z+1}{z^2+1}&=\frac{z+1}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{z+1}{z+i}\\ &=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{z+i+1-i}{z+i}=\frac{1}{z-i}\left(1+\frac{1-i}{z+i}\right)=\frac{1}{z-i}+\frac{1-i}{z-i}\cdot\frac{1}{z+i}\,.\end{aligned}$$ 1 pt

Továbbá

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i+2i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{\frac{z-i}{2i}+1}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{-2i}}\,,$$

miatt

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+i}&=\begin{cases}\dfrac{1}{2i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{-2i}\right)^n, & \text{ha } \left|\dfrac{z-i}{-2i}\right|<1\,,\\ \dfrac{1}{2i}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1}-\left(\frac{z-i}{-2i}\right)^n, & \text{ha } \left|\dfrac{z-i}{-2i}\right|>1\,,\end{cases}\\ &=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(-2i)^{n+1}}(z-i)^n\,, & \text{ha } |z-i|<2\,,\\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-2i)^{n+1}}(z-i)^n\,, & \text{ha } |z-i|>2\,.\end{cases}\end{aligned}$$ 2 pt

Tehát a Laurent–sorok:

- ha $0<|z-i|<2$, akkor

$$\begin{aligned} f(z)=&\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(1-i)}{(-2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}=\frac{1}{z-i}+\frac{-(1-i)}{-2i}(z-i)^{-1}\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(1-i)}{(-2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}=\frac{1-i}{2}(z-i)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(1-i)}{(-2i)^{n+2}}(z-i)^n\,.\end{aligned}$$

- ha $|z-i|>2$, akkor

$$f(z)=\frac{1}{z-i}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1-i}{(-2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}=\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{1-i}{(-2i)^{n+2}}(z-i)^n+(z-i)^{-1}$$ 3 pt

D csoport

Feladat megoldása. Az egyetlen szinguláris pont:

$$\begin{aligned} 2z+i&=0\\ z&=-\frac{1}{2}i\,. \end{aligned}$$

A

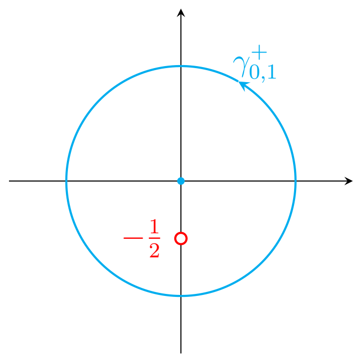
$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\,,\qquad z\in\mathbb{C}$$

összefüggés alapján a $z_0=-\frac{1}{2}i$ pont körüli Laurent–sor

$$\begin{aligned} \sin\frac{1}{2z+i}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2z+i}\right)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2(z+\frac{1}{2}i)}\right)^{2n+1}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}\left(\frac{1}{z+\frac{1}{2}i}\right)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)^{-2n-1}\\ &=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}i\right)^{-1}-\frac{1}{3!\cdot 2^3}\left(z+\frac{1}{2}i\right)^{-3}+\frac{1}{5!\cdot 2^5}\left(z+\frac{1}{2}i\right)^{-5}+\dots \end{aligned}$$ 1 pt

A sornak végtelen sok negatív kitevőjű tagja van, ezért a $z_0=-\frac{1}{2}i$ pont lényeges szingularitás. 2 pt

A $z_0=-\frac{1}{2}i$ pont a $\gamma_{0,1}$ görbén belül található, ezért



$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_{0,1}^{+}}\sin\frac{1}{2z+i}\,dz&=2\pi i\cdot Res(f,z_0)\\ &=2\pi i\cdot c_{-1}=2\pi i\cdot\frac{1}{2}=\pi i\,. \end{aligned}$$ 3 pt

E csoport

Feladat megoldása.

$$2\pi c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1-e^{-2\pi}}{2},$$

azaz $c_0 = \dfrac{1-e^{-2\pi}}{4\pi}$.

$$\begin{aligned}
2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \int_{-\pi}^{0} e^{2x}e^{-inx}\,dx = \int_{-\pi}^{0} e^{(2-in)x}\,dx \\
&= \left[\frac{e^{(2-in)x}}{2-in}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{e^0 - e^{-(2-in)\pi}}{2-in} = \frac{1-e^{-2\pi}e^{in\pi}}{2-in} \\
&= \frac{1-e^{-2\pi}\cdot(-1)^n}{2-in} = \frac{1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}}{2-in} \\
&= \frac{1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}}{2-in}\cdot\frac{2+in}{2+in} = \frac{1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}}{4+n^2}\cdot(2+in) \\
&= 2\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}}{4+n^2} + in\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}}{4+n^2}\,.
\end{aligned}$$

1 pt

Így

$$c_n = \frac{1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}}{(4+n^2)\pi} + in\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}}{2(4+n^2)\pi}\,,\quad n\in\mathbb{Z}\,.$$

2 pt

A valós Fourier–együtthatók:

$$a_0 = c_0 = \frac{1-e^{-2\pi}}{4\pi}$$

és $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\operatorname{Re}c_n = 2\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}}{(4+n^2)\pi}\,, \\
b_n &= -2\operatorname{Im}c_n = -n\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}}{(4+n^2)\pi}\,.
\end{aligned}$$

3 pt

8.

Események; kombinatorikus valószínűség

Házi feladatok

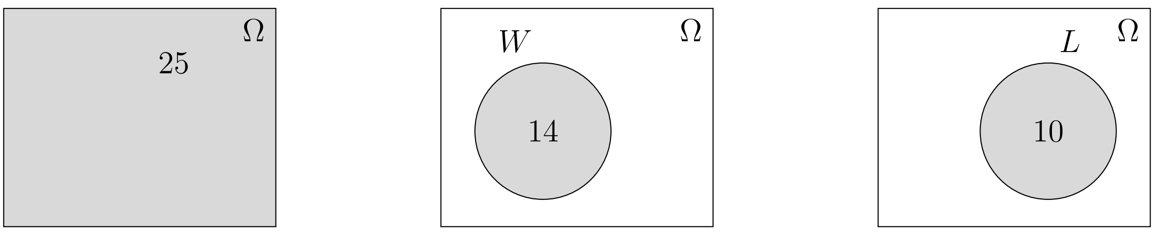
Események

1. Feladat. A műszaki matematika gyakorlat 25 hallgatójáról a következőket tudtuk meg: 14-en WoW–oznak, 10-en LoL–oznak és a hallgatók 12%–a mindkét játékkal játszik. Halmazelméleti műveletekkel adjunk választ a következő kérdésekre.

(a) Hányan vannak azok, akik WoW–oznak, de nem LoL–oznak?
(b) Hányan játszanak pontosan egy játékkal?
(c) Hány fő játszik legalább egy játékkal?
(d) A hallgatók hány százaléka nem játszik egyik játékkal sem?
(e) Hány százalékuk játszik legfeljebb az egyikkel?

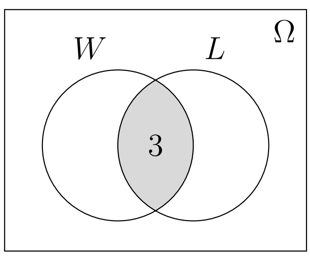
Megoldás. A helyes válasz megadását segíti a Venn–diagrammal való szemléltetés. Jelölje Ω az alaphalmazt, azaz a műszaki matematika gyakorlat hallgatóit, W a WoW–ozó, L pedig a LoL–ozó hallgatók halmazát. Ezen halmazok elemszáma:

$$|\Omega| = 25\,, \quad |W| = 14\,, \quad |L| = 10\,.$$



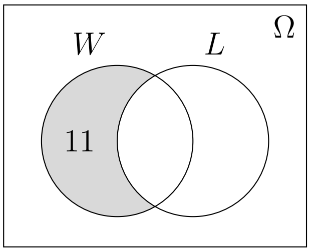
Mindkét játékkal a hallgatók 12%–a játszik, azaz a W és az L halmaz metszetének elemszáma:

$$|W \cap L| = 25 \cdot 0{,}12 = 25 \cdot \frac{12}{100} = 3\,.$$



(a) A 14 darab WoW–osból 3 játszik a LoL–lal is, azaz a csak WoW–ozók száma:

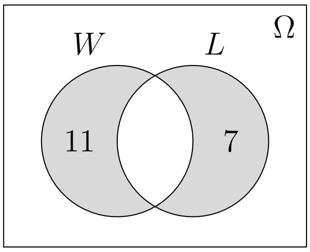
$$|W \setminus L| = |W| - |W \cap L| = 14 - 3 = 11.$$



(b) Hasonlóan, csak a LoL–lal $10 - 3 = 7$ fő játszik, így

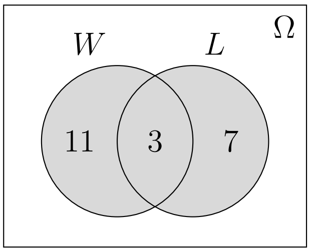
$$|W \setminus L| + |L \setminus W| = 11 + 7 = 18$$

hallgató játszik pontosan egy játékkal.



(c) Azokat hallgatókat keressük, akik WoW–oznak, *vagy* LoL–oznak, azaz a $W \cup L$ halmaz elemeit. Ezt megkaphatjuk, ha a $W \cup L$ halmazt olyan diszjunkt (egymást kizáró) halmazokra bontjuk, melyek elemszámát ismerjük:

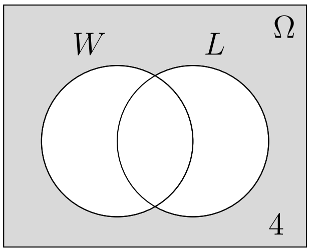
$$\begin{aligned}|W \cup L| &= |W \setminus L| + |L \setminus W| + |W \cap L| \\ &= 11 + 7 + 3 = 21\,.\end{aligned}$$



(d) A "nem játszik egy játékkal sem" esemény komplementere a "legalább egy játékkal játszik" eseménynek, így az előző feladat alapján ez

$$|\overline{W \cup L}| = |\Omega| - |W \cup L| = 25 - 21 = 4$$

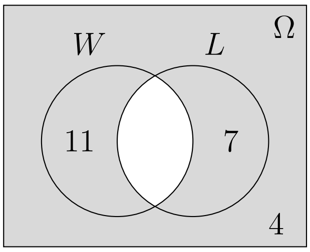
fő, ami a hallgatók $\dfrac{4}{25} \cdot 100\% = 16\%$–a.



(e) A "legfeljebb egy játékkal játszik" esemény komplementere a "mindkét játékkal játszik" eseménynek, ami a hallgatók 12%–a, ezért legfeljebb eggyel a 88%–uk játszik, ez

$$|\overline{W \cap L}| = |\Omega| - |W \cap L| = 25 - 3 = 22$$

fő.



2. Feladat. Liborius mind a három fiának Samsung Note 7-es telefont vett. Jelölje A_1, A_2, illetve A_3 azt az eseményt, hogy a legidősebb, a középső, illetve a legfiatalabb fiának felrobban a telefonja. Mit jelentenek az alábbi események?

(a) $A_1 \cap \overline{A_2}$ (b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, (c) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, (d) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$

Megoldás.

(a) A legidősebb fiúnak felrobban a telefonja, *de* a középsőnek nem.
(b) *Legalább az egyik* fiúnak felrobban a telefonja, vagy másképp fogalmazva, *valamelyik* fiúnak felrobban a telefonja.
(c) A legidősebb *és* a középső *és* a legfiatalabb fiúnak felrobban a telefonja, azaz *mindhármuk* telefonja felrobban.
(d) Ez a (b) esemény tagadása, ami

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\,,$$

tehát *egyikőjüknek se* robban fel a telefonja.

3. Feladat. Öt héten keresztül játszunk az ötöslottón. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik héten nyerünk valamennyi pénzt. Fejezzük ki az alábbi eseményeket az $A_1, \dots, A_5$ események segítségével.

(a) $B_1 =$ Minden héten nyerünk.
(b) $B_2 =$ Egyik héten sem nyerünk.
(c) $B_3 =$ Az utolsó héten nyerünk először.
(d) $B_4 =$ A második héten nyerünk, de a negyedik héten nem.

Fogalmazzuk meg, és fejezzük ki a B_1, B_2, B_4 események tagadását is.

Megoldás.

(a)
- Az, hogy minden héten nyerünk, pontosan azt jelenti, hogy az első héten is és a második héten is és ... és az ötödik héten is nyerünk. Így

$$B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5\,.$$

- A B_1 esemény tagadása pedig a B_1 esemény komplementere, azaz az, hogy van olyan hét, amikor nem nyerünk, vagyis legalább az egyik héten nem nyerünk. Tehát vagy az első héten, vagy a második héten, vagy ... vagy az ötödik héten nem nyerünk. Így

$$\begin{aligned}\overline{B_1} &= \overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5}\\ &= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4} \cup \overline{A_5}\,.\end{aligned}$$

(b)
- Egyik héten sem nyerünk, ezért

$$B_2 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}\,.$$

- A $\overline{B_2}$ jelentése pedig, hogy van olyan hét amikor nyerünk, azaz legalább egyszer nyerünk.

$$\begin{aligned}\overline{B_2} &= \overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}} \\ &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \,.\end{aligned}$$

(c) Ha az utolsó héten nyerünk először, akkor az első négy héten nem nyerünk, és az utolsó héten pedig igen, azaz

$$B_3 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap A_5 \,.$$

(d)
- A második héten nyerünk, és a negyediken nem:

$$B_4 = A_2 \cap \overline{A_4} = A_2 \setminus A_4 \,.$$

- A $\overline{B_4}$ azt jelenti, hogy a második héten nem nyerünk vagy a negyedik héten igen.

$$\overline{B_4} = \overline{A_2 \cap \overline{A_4}} = \overline{A_2} \cup A_4$$

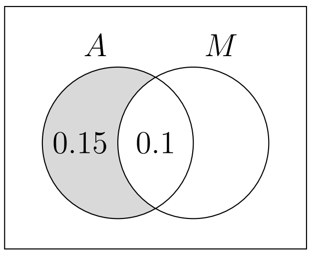
4. Feladat. Próbagyártás után két szempontból vizsgáljuk a késztermékeket. Tudjuk, hogy a termékek 25%-a anyaghibás, míg 0,4 annak az valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott termék mérethibás. A gyártmányok 10 százaléka nem felel meg egyik szabványnak sem. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy gyártmányt, akkor adjuk meg annak a valószínűségét, hogy

(a) a gyártmány anyaghibás, de megfelel a méretszabványnak,
(b) a gyártmánynak van valamilyen hibája,
(c) a gyártmány pontosan egyfajta hibája van,
(d) a gyártmány hibátlan.

Megoldás. Jelölje A, illetve M azt az eseményt, hogy a kiválasztott termék anyag–, illetve mérethibás. Ezek alapján $\mathrm{P}(A) = 0.25$, $\mathrm{P}(M) = 0.4$ és $\mathrm{P}(A \cap M) = 0.1$.

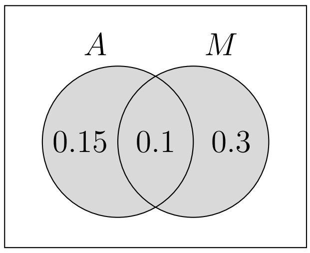
(a) Ha a gyártmány anyaghibás, de nem mérethibás, akkor az $A \cap \overline{M} = A \setminus M$ esemény következik be, így

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \setminus M) &= \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap M) \\ &= 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}15 \,.\end{aligned}$$



(b) Ha a gyártmány az anyag–, illetve mérethiba közül legalább az egyikkel rendelkezik, akkor az $A \cup M$ esemény bekövetkezik be, így a szitaformula alapján

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup M) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(M) - \mathrm{P}(A \cap M) \\ &= 0,25 + 0,4 - 0,1 = 0,55 \,.\end{aligned}$$

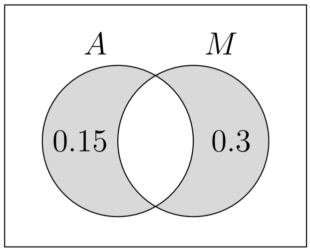


(c) Ha a terméknek vagy csak anyaghibája van, vagy csak mérethibája, akkor az

$$(A \setminus M) \cup (M \setminus A) = A \triangle M$$

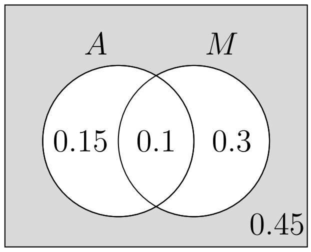
esemény következik be, így

$$\mathrm{P}(A \triangle M) = 0,15 + 0,3 = 0,45\,.$$



(d) Ha a gyártmánynak semmilyen hibája sincs, akkor az $\overline{A} \cap \overline{M}$ esemény következik be. A De Morgan azonosság alapján

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{M}) &= \mathrm{P}(\overline{A \cup M}) = 1 - \mathrm{P}(A \cup M)\\ &= 1 - 0,55 = 0,45\,.\end{aligned}$$



Kombinatorikus valószínűség

5. Feladat. Egy eSports bajnokság egyik regionális döntőjén 10 csapat vesz részt. A TI–ra a legjobb négy csapat jut be, továbbá az első három helyezett részesül helyezéstől függő pénzjutalomban.

(a) Hányféle sorrend alakulhat ki a 10 csapat között, ha nincs holtverseny?
(b) A pénzjutalmak kiosztása hányféleképpen történhet meg?
(c) Hány különböző lehetséges kimenetele van a továbbjutóknak?

Megoldás.

(a) Tíz csapatot *sorba* állítani

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \ldots 2 \cdot 1 = 10!$$

különböző módon lehet.

(b) Pénzjutalmat csak az első három kap, és a nyeremények különbözőek. A 10 csapatból 3–at *kiválasztani* és *sorba* állítani összesen

$$10 \cdot 9 \cdot 8$$

különböző módon lehet.

(c) A *kiválasztott* 4 továbbjutónál *nem számít a sorrend*, ezért ez

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \binom{10}{4}$$

lehetséges kimenetel.

6. Feladat. Pálinka főzéséhez vettünk 10 kg cukrot egykilós kiszerelésben. Mikor lemértük azokat, azt tapasztaltuk, hogy 4 közülük kevesebb, 6 pedig nehezebb volt, mint 1 kg. Találomra kiválasztva 3 cukrot, mennyi a valószínűsége a következő eseményeknek?

(a) $A =$ Pontosan egy könnyebb, mint 1 kg.
(b) $B =$ Legalább kettő könnyebb, mint 1 kg.
(c) $C =$ Legfeljebb kettő nehezebb 1 kg–nál.

Megoldás. A 10 cukorból 3 darabot kell kiválasztani, a sorrend nem számít, tehát

$$\binom{10}{3}$$

az *összes esetek száma.*

(a) Ekkor a 4 csomag könnyebb cukorból 1–et és a 6 nehezebb közül 2–t kell kiválasztani, ezért a *kedvező esetek száma*

$$\binom{4}{1}\binom{6}{2},$$

és így a keresett valószínűség

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = 0{,}5\,.$$

(b) A legalább kettő könnyebb választása azt jelenti, hogy vagy pontosan kettő, vagy pontosan három könnyebbet választunk. Ezért, az előző feladat alapján kapjuk, hogy

$$\binom{4}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{3}\binom{6}{0}$$

a kedvező esetek száma. Tehát a keresett valószínűség:

$$\mathrm{P}(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} \approx 0{,}333\,.$$

(c) A legfeljebb kettő nehezebb választása az jelenti, hogy vagy pontosan 0, vagy pontosan 1, vagy pontosan 2 nehezebbet választunk. Ezért ebben az esetben egyszerűbb a komplementer esemény

$$\overline{C} = \text{Mindhárom nehezebb, mint 1kg.}$$

segítségével meghatározni a keresett valószínűségét:

$$\mathrm{P}(C) = 1 - \mathrm{P}(\overline{C}) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} \approx 0{,}833\,.$$

7. Feladat. Egy disznóvágás során a böllérnek kitöltenek 5 pohár vodkát és 10 pohár vizet, azonban a poharak összekeverednek. A böllér negyedóránként legurít egyet, hogy bátorságot gyűjtsön a disznó leöléséhez. Mennyi a valószínűsége a következő eseményeknek?

(a) $A =$ Elsőre vizet iszik.
(b) $B =$ Először vizet, de másodjára vodkát iszik.
(c) $C =$ Másodikra vodkát iszik.
(d) $D =$ Először vizet, vagy másodjára vodkát iszik.

Megoldás.

(a) Összesen 15 pohár van és egyet választ, így az összes esetek száma 15. A kedvező esetben a 10 pohár vizet tartalmazó közül választ egyet, ez 10 lehetőség. Ezért

$$\mathrm{P}(A) = \frac{10}{15} \qquad \approx 0{,}667\,.$$

(b) A 15 pohárból kettőt választ, a sorrend számít, így az összes esetek száma $15 \cdot 14$. A kedvező esetben először a 10 vizes pohár ($B \subset A$), majd az 5 vodkás pohár közül választ, így a kedvező esetek száma $10 \cdot 5$. Ezek alapján

$$\mathrm{P}(B) = \frac{10 \cdot 5}{15 \cdot 14} \qquad \approx 0{,}238\,.$$

(c) Az összes esetek száma most is $15 \cdot 14$. A kedvező eset bekövetkezhet úgy, hogy elsőre vizet iszik és másodjára vodkát, azaz ha a B esemény bekövetkezik , ami $10 \cdot 5$ eset, vagy ha elsőre és másodikra is vodkát választ, ez $5 \cdot 4$ lehetőség. Így

$$\mathrm{P}(C) = \frac{10 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{15 \cdot 14} \qquad \approx 0{,}333\,.$$

MEGJEGYZÉS. Vegyük észre, hogy $B = A \cap C$, azonban $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap C) \neq \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(C)$, az A és a C események hatással vannak egymásra. ✠

(d) Mivel $D = A \cup C$, és $B = A \cap C$, így a szita formula alapján

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(A \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap C) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{5}{21} \qquad \approx 0{,}762\,.$$

Teljes eseményrendszer. Ha az $A_1, A_2, \ldots$ események páronként diszjunktak és uniójuk kiadja a teljes eseményteret, akkor az $A_1, A_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak (T.E.R.).

8. Feladat. A *Lich King* legyőzésekor 10%–os eséllyel lehet a *legendary* kardját *loot*olni, ami sajnos egy szerveren csak egyszer esik. Mennyi a valószínűsége a következő eseményeknek?

(a) $A =$ Legfeljebb háromszor kell legyőzni, hogy megszerezzük a kardot.
(b) $B =$ Legalább tizenegy alkalom kell, hogy megszerezzük a kardot.

(c) Legalább hány alkalommal kell a Lich Kinget legyőznünk, hogy legalább 90%–os eséllyel lootoljuk a legendary kardját?

Megoldás. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik alkalommal esik a kard először és egyben utoljára is. Az A_i események nyilván páronként diszjunktak, teljes eseményrendszert alkotnak. Mivel a legendary kard 10%–os eséllyel, azaz $p = 0{,}1$ valószínűséggel, véletlenszerűen esik, így

$$\mathrm{P}(A_i) = (1-p)^{i-1}p\,, \quad i \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Ekkor

$$A = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup A_3\,,$$

ahol $\dot\cup$ a diszjunkt egyesítést jelöli. Ezért

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) = 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 \qquad \approx 0{,}271\,.$$

(b) Ebben az esetben

$$B = A_{11} \dot\cup A_{12} \dot\cup A_{13} \dot\cup \ldots\,,$$

így

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \sum_{i=11}^{\infty} 0{,}9^{i-1} \cdot 0{,}1 = \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}9^{k+10} \cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}9^{10} \cdot 0{,}1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}9^k = 0{,}9^{10} \cdot 0{,}1 \cdot \frac{1}{1-0{,}9} = 0{,}9^{10} \qquad \approx 0{,}348\,.\end{aligned}$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a B esemény átfogalmazható:

$$B = \text{Az első tíz alkalom során nem tudjuk megszerezni a kardot.}$$

Annak a valószínűsége, hogy nem tudjuk megszerezni a kardot 0,9, így a függetlenség miatt

$$\mathrm{P}(B) = 0{,}9^{10}\,.$$

✠

(c) Legyen a szükséges alkalmak száma n, azaz n olyan, hogy

$$\sum_{i=1}^{n-1} 0{,}9^{i-1} \cdot 0{,}1 < 0{,}9 \le \sum_{i=1}^{n} 0{,}9^{i-1} \cdot 0{,}1\,.$$

A (b) rész alapján

$$\sum_{i=1}^{n} 0{,}9^{i-1} \cdot 0{,}1 = 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} 0{,}9^{i-1} \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}9^n\,,$$

innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}0{,}9 &\le 1 - 0{,}9^n \\ 0{,}9^n &\le 0{,}1 \\ n \cdot \ln 0{,}9 &\le \ln 0{,}1 \\ n &\ge \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9} \qquad \approx 21{,}854\,.\end{aligned}$$

Ezért legalább 22 alkalommal kell a Lich Kinget legyőznünk, hogy legalább 90%–os eséllyel lootoljuk a legendary kardját.

Videók

Események

1. Feladat. Határozzuk meg a következő kísérletek esetén az elemi eseményeket és a H eseményteret.

(a) Szabályos pénzérmét egyszer feldobunk.
(b) Szabályos dobókockával egyszer dobunk.
(c) A 7 és 8 óra között a hídra felhajtó autók száma.
(d) A hídon közlekedő autók követési ideje.
(e) Egy adott esemény első bekövetkezése.

Megoldás.

Kísérlet	Elemi események	Eseménytér
(a)	{fej}, {írás}	$H =$ {fej, írás}
(b)	$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$	$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(c)	az autók száma: $n \in \mathbb{N}_0$	$H \subset \mathbb{N}_0$ véges
(d)	$t \in \mathbb{R}$	$H \subset \mathbb{R}$
(e)	$n \in \mathbb{N}$	$H \subset \mathbb{N}$

2. Feladat. Határozzuk meg egy szabályos dobókockával való dobás esetén az alábbi összetett eseményeket.

(a) $A =$ Páros számot dobunk.
(b) $B =$ Páratlan számot dobunk.
(c) $C =$ 2–nél nagyobb számot dobunk.
(d) $A \cap B$
(e) $A \cup B$
(f) $A \cap C$
(g) $\overline{C}$

Megoldás.

(a) $\{2, 4, 6\}$
(b) $\{1, 3, 5\}$
(c) $\{3, 4, 5, 6\}$
(d) $\emptyset$, a lehetetlen esemény
(e) H, a biztos esemény
(f) $\{4, 6\}$
(g) $\{1, 2\}$

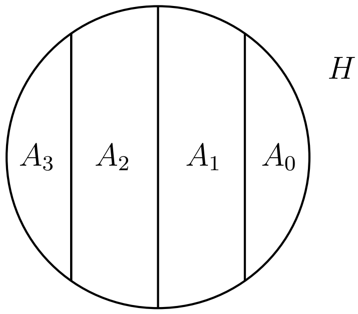
3. Feladat. Adjunk meg egy pénzérme

(a) háromszori
(b) n-szeri

feldobása esetén egy teljes eseményrendszert (T. E. R.–t).

Megoldás.

(a) Például az
A_3 = Három fejet dobunk.
A_2 = Két fejet, egy írást dobunk.
A_1 = Egy fejet, két írást dobunk.
A_0 = Három írást dobunk.
események T.E.R–t alkotnak.



(b) Az

$$A_k = k \text{ darab fejet dobunk, } k = 0, 1, ..., n$$

események T.E.R.–t alkotnak.

4. Feladat. Egy évfolyam hallgatói közül egyet kiválasztva megnézzük, hogy hány kurzusfelvétellel tudja teljesíteni a tárgyait. Jelölje A_n azt, hogy a Kalkulust az n-edik felvétel során teljesítette, tehát például A_3 az az esemény, hogy a tárgyat a harmadik kurzusfelvételkor sikerült abszolválnia. Hasonló módon jelölje B_n azt, hogy a Lineáris algebrához pontosan n kurzusfelvétel szükséges, C_n pedig az az esemény, hogy a Valószínűségszámítás az n-edik alkalommal sikerül. Formalizáljuk a következő eseményeket:

(a) a Kalkulust az első, a Lineáris algebrát a második felvételkor sikerül teljesíteni,
(b) a Kalkulus sikerül elsőre, de a Valószínűségszámítás nem,
(c) a három közül valamelyik kurzust sikerül az első alkalommal teljesíteni,
(d) a három közül valamelyik kurzust nem sikerül az első alkalommal teljesíteni,
(e) a Kalkulushoz és a Valószínűségszámításhoz összesen négy felvétel szükséges.

Megoldás.

(a) $A_1 \cap B_2$

(b) $A_1 \setminus C_1$

(c) $A_1 \cup B_1 \cup C_1$

(d) $\overline{A_1} \cup \overline{B_1} \cup \overline{C_1}$

(e) $(A_1 \cap C_3) \cup (A_2 \cap C_2) \cup (A_3 \cap C_1)$

5. Feladat. Egy fiókban lévő 7 fehér és 3 kék zokniból 3–at kiválasztunk. Adjunk meg egy teljes eseményrendszert, és vizsgáljuk az elemi események számát aszerint, hogy visszatevéses, illetve visszatevés nélküli modellt használunk. A visszatevéses modellben tekintsük külön esetnek azt is, amikor a kihúzott zoknik sorrendje számít.

Megoldás.
Az

$$A_k = \text{k db kéket húzunk}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

T. E. R.–t alkotnak.

Az elemi események száma:

- visszatevéses modell esetén

  (a) ha számít a sorrend, $10 \cdot 9 \cdot 8$

  (b) ha nem számít a sorrend, $\binom{10}{3}$.

- visszatevés nélküli modell esetén 10^3.

6. Feladat. A fiókban található 20 zokni közül 3 fehér. Addig húzunk a zoknik közül visszatevéssel, amíg nem húzunk fehéret. Adjunk meg egy T.E.R–t, és határozzuk meg, hogy az ebben szereplő összetett eseményeket hány elemi esemény alkotja.

Megoldás. Az

$$A_k = k\text{–adik alkalommal húzunk először fehéret, } k = 1, 2, \dots$$

események T.E.R–t alkotnak. Az A_k elemszáma

$$|A_k| = 17^{k-1} \cdot 3\,.$$

7. Feladat. Egy hedge fund három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre 19%, 25% illetve 28% valószínűséggel mennek tönkre az elkövetkező öt évben. Annak az esélye, hogy az első és a második cég is csődbe megy, $\frac{1}{20}$; annak a valószínűsége, hogy az első és a harmadik is elveszti a vagyonát, $\frac{1}{10}$; és annak a valószínűsége, hogy a második és a harmadik is becsődöl, $\frac{1}{10}$. Annak az esélye, hogy mindhárom vállalat csődbe megy, 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az első vagy a második vállalat csődbe megy?
(b) az első becsődöl, de a harmadik nem?
(c) pontosan két vállalat megy csődbe, és közöttük lesz a harmadik?
(d) legalább két vállalat becsődöl?
(e) egyik vállalat sem megy csődbe?

Megoldás.

(a) 0,39 (b) 0,09 (c) 0,16 (d) 0,21 (e) 0,51

8. Feladat. Legyenek A és B olyan események, melyek valószínűsége 0,7 illetve 0,8. Ezen információ birtokában meg tudjuk–e határozni egyértelműen a két esemény

(a) uniójának (b) metszetének

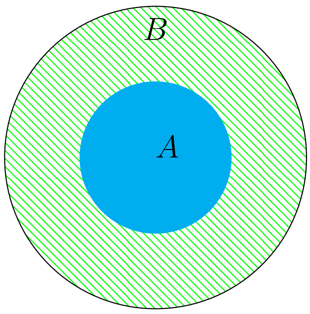
a valószínűségét? Ha nem, akkor adjunk alsó és felső korlátot ezekre a valószínűségekre. A megoldást illusztráljuk Venn–diagrammal is.

Megoldás.

(a) $0{,}8 \leq \mathrm{P}(A \cup B) \leq 1$

Ha $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}8.$, akkor

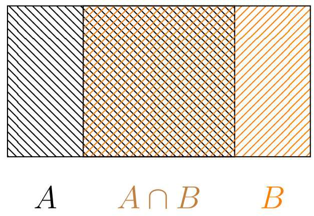
$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) = 0{,}7$



(b) $0{,}5 \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq 0{,}7$

Amennyiben $\mathrm{P}(A \cup B) = 1$, akkor

$\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}5$



Kombinatorikus valószínűség

9. Feladat. Anna, Bori és Cili véletlenszerűen leülnek egy padra.

(a) Hány lehetséges kimenetel van?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna és Bori a pad két szélén ül?
(c) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna és Cili egymás mellé ül?

Megoldás.

(a) $3!$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$

10. Feladat. Anna, Bori, Cili, Dóri és Emma véletlenszerűen leülnek egy padra.

(a) Hány lehetséges kimenetel van?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna és Bori a pad két szélén ül?
(c) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna és Dóri között pontosan ketten vannak?
(d) Mennyi a valószínűsége, hogy Anna, Cili és Emma egymás mellett ül?

Megoldás.

(a) $5!$ (b) $\frac{3! \cdot 2!}{5!}$ (c) $\frac{2 \cdot 2! \cdot 3!}{5!}$ (d) $\frac{3 \cdot 3! \cdot 2!}{5!}$

11. Feladat. Véletlenszerűen választunk egy valódi ötjegyű számot (azaz az első számjegy nem lehet nulla).

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a számjegyek különböző páratlan számok?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a számjegyek között vannak azonosak?

Megoldás.

(a) $\dfrac{5!}{9 \cdot 10^4}$ (b) $\dfrac{9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{9 \cdot 10^4}$

12. Feladat. Egy étteremben 9 vendég összesen 3 sört, 4 pohár vörösbort és 2 pohár fehérbort rendelt. A pincér véletlenszerűen osztja ki az italokat.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit kért?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a söröket jól, de legalább egy bort tévesen oszt ki?

Megoldás.

(a) $\dfrac{3! \cdot 4! \cdot 2!}{9!}$ (b) $\dfrac{3! \cdot 4! \cdot 4 \cdot 2 + 3! \cdot 4! \cdot 2 \cdot 4 + 3! \cdot 4! \cdot 4 \cdot 3}{9!}$

13. Feladat. Többször feldobunk egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az első 6–os a negyedik dobásra jön ki?
(b) az első 6–os az n–edik dobásra jön ki?
(c) az első négy dobásban van legalább egy 6–os?
(d) az első n dobásban van legalább egy 6–os?
(e) Határozzuk meg azt a legkisebb n értéket, amire az

$$A = \text{Az első } n \text{ dobásban van legalább egy 6–os}$$

esemény valószínűsége legalább 0,9.

Megoldás.

(a) $\dfrac{5^3}{6^4}$ (c) $\dfrac{6^4 - 5^4}{6^4}$ (e) 13

(b) $\dfrac{5^{n-1}}{6^n}$ (d) $\dfrac{6^n - 5^n}{6^n}$

14. Feladat. A háromszori pénzfeldobás kísérletében határozzuk meg a következő események valószínűségét:

(a) $A =$ Három fejet dobunk.
(b) $B =$ Dobunk fejet is, írást is.
(c) $C =$ Pontosan két fejet dobunk.
(d) $D =$ Legfeljebb két fejet dobunk.
(e) $E =$ Legalább két fejet dobunk.

Megoldás.

(a) $\dfrac{1}{8}$ (b) $\dfrac{6}{8}$ (c) $\dfrac{3}{8}$ (d) $\dfrac{7}{8}$ (e) $\dfrac{4}{8}$

15. Feladat. A rendelkezésünkre álló 20 csavar közül 16 jó és 4 selejt, ezek közül visszatevés nélkül, véletlenszerűen húzunk 2–t. Határozzuk meg az elemi események számát, majd számítsuk ki a következő események valószínűségét:

$A_2 =$ Két selejtet húzunk.
$A_1 =$ Pontosan egy selejtet húzunk.
$A_0 =$ Nem húzunk selejtet.

Megoldás.

YouTube

	Ha számít a sorrend	Ha nem számít a sorrend
Az alaphalmaz elemeinek száma	$20 \cdot 19$	$\binom{20}{2}$
$\mathrm{P}(A_2)$	$\frac{4 \cdot 3}{20 \cdot 19}$	$\frac{4 \cdot 3}{20 \cdot 19}$
$\mathrm{P}(A_1)$	$\frac{2 \cdot 4 \cdot 16}{20 \cdot 19}$	$\frac{2 \cdot 4 \cdot 16}{20 \cdot 19}$
$\mathrm{P}(A_0)$	$\frac{16 \cdot 15}{20 \cdot 19}$	$\frac{16 \cdot 15}{20 \cdot 19}$

16. Feladat. A rendelkezésünkre álló 20 csavar közül 16 jó és 4 selejt, ezek közül véletlenszerűen húzunk 5–öt. Határozzuk meg, hogy hány elemi esemény alkotja az alaphalmazt és számítsuk ki a következő események valószínűségét abban az esetben, ha a modell visszatevés nélküli és nem számít a sorrend, illetve, ha a modell visszatevéses és számít a sorrend:

$A =$ 5 selejtet választottunk.
$B =$ 2 selejtet és 3 jót választottunk.

Megoldás.

YouTube

	Visszatevés nélkül, nem számít a sorrend	Visszatevéssel, számít a sorrend
Az alaphalmaz elemeinek száma	$\binom{20}{5}$	20^5
$\mathrm{P}(A)$	0	$\frac{4^5}{20^5}$
$\mathrm{P}(B)$	$\frac{15 \cdot 14 \cdot 6}{19 \cdot 18 \cdot 17}$	$\frac{10 \cdot 4^3}{5^5}$

17. Feladat. A rendelkezésünkre álló 10000 csavar közül 500 selejt, ezek közül véletlenszerűen húzunk 10–et. Számítsuk ki az

$$A = \text{Pontosan 3 selejtet húzunk}$$

esemény valószínűségét amennyiben a modell visszatevés nélküli és nem számít a sorrend, illetve, ha a modell visszatevéses és számít a sorrend.

Megoldás.

	Visszatevés nélkül, nem számít a sorrend	Visszatevéssel, számít a sorrend
$\mathrm{P}(A)$	$\dfrac{\binom{500}{3}\binom{1500}{7}}{\binom{10000}{10}}$	$\binom{10}{3}\cdot 0{,}05^3\cdot 0{,}95^7$

18. Feladat. A 32 lapos magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk 6 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) pontosan 2 ászt húztunk?
(b) pontosan 3 pirosat, 2 zöldet és 1 makkot húztunk?
(c) legalább 1 ászt húztunk?
(d) legalább 1 pirost vagy legalább 1 ászt húztunk?

Megoldás.

(a) $\dfrac{\binom{28}{4}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{32}{6}}$ (b) $\dfrac{\binom{8}{3}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{32}{6}}$ (c) $\dfrac{\binom{32}{6}-\binom{28}{6}}{\binom{32}{6}}$ (d) $\dfrac{\binom{32}{6}-\binom{21}{6}}{\binom{32}{6}}$

19. Feladat. A 32 lapos magyar kártyából visszatevéssel húzunk 6 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) pontosan 2 ászt húztunk?
(b) pontosan 3 pirost, 2 zöldet és 1 makkot húztunk?
(c) legalább 1 ászt húztunk?
(d) legalább 1 pirost vagy legalább 1 ászt húztunk?

Megoldás.

(a) $\dfrac{\binom{6}{2}\cdot 4^2\cdot 28^4}{32^6}$ (b) $\dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8^6}{32^6}$ (c) $\dfrac{32^6-28^6}{32^6}$ (d) $\dfrac{32^6-21^6}{32^6}$

20. Feladat. Egy szakkörön a 9 tanulót, akik között van egy testvérpár, beosztunk egy 4 fős, egy 3 fős és egy 2 fős csoportba.

(a) Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
(b) Határozzuk meg az

$$A = \text{A testvérpár azonos csoportba kerül}$$

esemény valószínűségét.

Megoldás.

(a) $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3}$

(b) $\dfrac{\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} + \binom{7}{4} \cdot 3 + \binom{7}{4}}{\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3}}$

21. Feladat. A rendelkezésünkre álló csavarok 5%–a selejt. Visszatevéssel addig húzunk a csavarok közül, amíg nem találunk selejtet. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) 8–adikra,

(b) i–edikre

húzunk először selejtet?

Megoldás.

(a) $0{,}95^7 \cdot 0{,}05$

(b) $0{,}95^{i-1} \cdot 0{,}05$

22. Feladat. Egy villanykörte várható élettartama 30.000 kapcsolás.

(i) Mennyi az

$$A = \text{A villanykörte 30.000–nél több kapcsolást bír ki}$$

esemény valószínűsége?

(ii) Határozzuk meg azt a legkisebb n értéket, amire a

$$B = \text{A villanykörte } n\text{–nél több kapcsolást bír ki}$$

esemény valószínűsége legalább $\frac{1}{2}$.

Megoldás.

(i) $\left(1 - \dfrac{1}{30.000}\right)^{30.000}$

(ii) 21

23. Feladat. (de Méré) Az A vagy a B eseménynek nagyobb a valószínűsége?

$A =$ Egy kockával való 4–szeri dobás után lesz legalább egy 6-os dobás.
$B =$ Két kockával való 24–szeri dobás után lesz legalább egy dupla 6-os dobás.

Megoldás. $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$.

24. Feladat. Az üzemünk termelésének néhány adatát az alábbi táblázat foglalja össze.

	H	K	Sze	Cs	P	Σ
db	1.000	1.200	1.250	1.200	1.100	5.750
selejtek száma (%)	5	4	2	3	6	

A heti össztermékből kiválasztva

(a) egy tetszőleges terméket, mennyi a valószínűsége, hogy kedden gyártották?
(b) egy tetszőleges terméket, mennyi a valószínűsége, hogy selejt?
(c) öt tetszőleges terméket visszatevéssel, mennyi a valószínűsége, hogy ezekből pontosan kettő selejt?
(d) egy selejt terméket, mennyi a valószínűsége, hogy azt szerdán gyártották?

Megoldás. YouTube

(a) $\dfrac{1.200}{5.750}$

(b) $\dfrac{225}{5.750}$

(c) $\binom{5}{2}\left(\dfrac{225}{5.750}\right)^2\left(1-\dfrac{225}{5.750}\right)^3$

(d) $\dfrac{25}{225}$

25. Feladat. A vizsgán lehetségesen szereplő 100 kérdésből a hallgató n–re tudja a választ. A vizsgán ebből a 100–ból két kérdést kap, véletlenszerűen. Tegyük fel, hogy a hallgató megbukik, ha nem tud mind a két kérdésre válaszolni.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy átmegy?
(b) Határozzuk meg azt a legkisebb n értéket, amire a hallgató legalább 0,8 valószínűséggel átmegy.

Megoldás. YouTube

(a) $\dfrac{n(n-1)}{100\cdot 99}$

(b) 90

26. Feladat. Tekintsük az előző feladatban leírt szituációt, azzal a különbséggel, hogy a hallgató akkor bukik meg, ha egyik kérdésre sem tud válaszolni.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy átmegy?
(b) Határozzuk meg azt a legkisebb n értéket, amire a hallgató legalább 0,8 valószínűséggel átmegy.

Megoldás. YouTube

(a) $1-\dfrac{(100-n)(99-n)}{100\cdot 99}$

(b) 55

Kvízek

A csoport

Feladat. A Dota2 játékban pontosan 37 *strength*–es, 37 *agility*–s és 42 *intellect*–es hős van. Random Draft játékmódban ezen hősök közül a gép kisorsol 50–et véletlenszerűen egy random *pool*ba és ebből tudunk választani a játék elején pontosan egy hőst.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan 20 *intellect*–es hős van a *pool*ban?
(b) Hány olyan *pool* van, amiben van *agility*–s hős?
(c) A három kedvenc hősünk Luna, Meepo és Axe. Mekkora a valószínűsége, hogy mindhárman ott vannak a *pool*ban?

A *strength*–es hősök közül 12–vel, az *agility*–s hősök közül 14–gyel és az *intellect*–es hősök közül 26–tal még sosem játszottunk, azokat nem ismerjük.

(d) Mekkora az esélye, hogy a *pool*ban legfeljebb két hős van, amit ismerünk?

B csoport

Feladat. A World of Warcraft játék The Burning Crusade kiegészítőjének egyik *raid*je Karazhan volt. Ez egy 10 játékosra, 3 szerepre (2 tank, 3 healer és 5 dps) kialakított kihívás. Egyik este épp 10–en gyűltünk össze, és kitaláltuk, hogy elmegyünk Karazhanba. A 10 játékos között volt 3 druid, 3 warrior, 2 priest, 1 mage, és 1 warlock. A druidok a 3 szerep (tank, healer, dps) bármelyikét képesek betölteni, de egyszerre csak egyet, a warrior nem lehet healer, a priest nem lehet tank, a mage és a warlock csak dps lehet. Hányféle szereposztással mehettünk be Karazhanba?

C csoport

Feladat. Egy gyorsétteremben hamburger, gofri és tzatziki kapható. A tulajdonos egy pénteki napon a rendeléseket összesítve a következőket tapasztalta. Hamburgert 32–en, gofrit 17–en, tzatzikit szintén 32–en rendeltek. Hamburgert és gofrit 9–en, gofrit és tzatzikit 12–en rendeltek. Pontosan kétféle ételt háromszor annyian rendeltek, mint háromfélét.

(a) Hány olyan megrendelő volt, aki hamburgert rendelt, de tzatzikit nem?
(b) Minden ötödik vásárló kapott egy ajándékkupont. Az utolsó vásárló kapott?
(c) Annak az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott vásárló evett hamburgert, lehet–e 50%–nál kisebb?

D csoport

Feladat. Az Eldritch Horror című asztali társasjátékban a tesztek kimenetelét kockadobásokkal döntjük el. A karakter adott tulajdonsága (erő, befolyás, tudás, kitartás, észlelés) és a módosítók határozzák meg, hogy hány kockával dobhat egy teszt során. Egy teszt akkor sikeres, ha legalább az egyik kockával sikert, azaz 5–öst vagy 6–ost dobunk.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy Akachi Onyele a 3–es tudásával, módosítók nélkül teljesít egy tudástesztet?

Harci találkozások során egy karakternek erőtesztet kell tennie egy szörny ellen. Ahány sikert dobunk, a szörny annyit veszít életpontjaiból, ha minden életpontját elveszti, akkor legyőzetett.

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a 4–es erejű Mark Harrigannal, akinek a duplacsövű sörétes puskája 4–gyel megnöveli erejét és emellett minden 6–os dobás két sikernek számít, egy harci találkozás során legyőzzük a Dark Young szörnyet, akinek 5 életpontja van és 3–mal csökkenti hősünk erejét?

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása.

(a) Az összes hős száma: $37+37+42=116$. Így az összes lehetséges *pool*ok száma: $\binom{116}{50}$.

A kedvező esetek száma: $\binom{42}{20}\binom{74}{30}$. Tehát a keresett valószínűség

$$\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{\binom{42}{20}\binom{74}{30}}{\binom{116}{50}}.$$

1 pt

(b) Megszámoljuk hány olyan *pool* van, amiben nincs *agility*–s hős, és ezt kivonjuk az összes esetből:

$$\binom{116}{50} - \binom{79}{50}.$$

(c) A komplementer esemény (egyik sincs benne) valószínűséget meghatározva

$$1 - \frac{\binom{113}{50}}{\binom{116}{50}}.$$

2 pt

(d) A nem ismert hősök száma: $12+14+26=52$, ezért a ismerteké 62. Legfeljebb két ismert hős van, azaz vagy egy sem, vagy pontosan egy, vagy pontosan kettő van a *pool*ban, ezért

$$\frac{\binom{64}{0}\binom{52}{50}}{\binom{116}{50}} + \frac{\binom{64}{1}\binom{52}{49}}{\binom{116}{50}} + \frac{\binom{64}{2}\binom{52}{48}}{\binom{116}{50}}.$$

3 pt

B csoport

Feladat megoldása. Dps mindenki lehet, így csak a tank és healer szerepeket kell kiosztani. Tankból csak 2 kell, így előbb ezeket választjuk ki. Csak warrior és druid lehet tank, így a lehetséges esetek:

- Tank: 0 warrior, 2 druid, ami $\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{2}$ lehetőség.
  - Ekkor a 3 healer szerepre marad 1 druid 2 priest, azaz éppen 3 karakter, ebből kell 3–at választani, ez $\binom{3}{3}$ eset. Ezért ekkor ez összes lehetőség

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{3}$$

1 pt

- Tank: 1 warrior, 1 druid, ami $\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1}$ lehetőség.
  - Ekkor a 3 healer szerepre marad 2 druid 2 priest, azaz 4 karakter, ebből kell 3–at választani, ez $\binom{4}{3}$ eset. Ezért ekkor ez összes lehetőség

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{3}$$

2 pt

- Tank: 2 warrior, 0 druid, ami $\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{0}$ lehetőség.
  - Ekkor a 3 healer szerepre marad 3 druid 2 priest, azaz 5 karakter, ebből kell 3–at választani, ez $\binom{5}{3}$ eset. Ezért ekkor ez összes lehetőség

$$\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{0} \cdot \binom{5}{3}$$

Tehát ez összesen

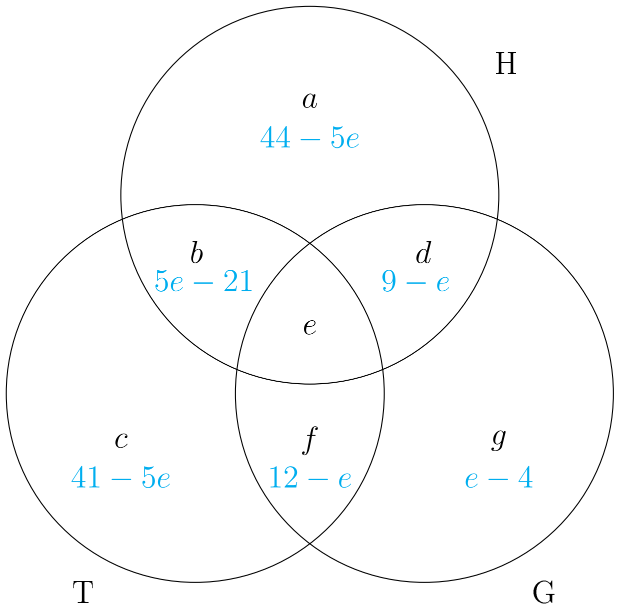
$$\binom{3}{0}\binom{3}{2}\binom{3}{3} + \binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{3} + \binom{3}{2}\binom{3}{0}\binom{5}{3}$$

különböző esetet jelent.

3 pt

C csoport

Feladat megoldása. A Venn–diagram segítségével a következő egyenleteket kapjuk:



1. $a + b + d + e = 32$
2. $d + e + f + g = 17$
3. $b + c + e + f = 32$
4. $d + e = 9$
5. $e + f = 12$
6. $d + b + f = 3e$

Ezért

4. $d = 9 - e$

5. $f = 12 - e$, és így

6. $(9 - e) + b + (12 - e) = 3e$

$$b = 5e - 21$$

1. $a + (5e - 21) + 9 = 32$

$$a = 44 - 5e$$

2. $9 + (12 - e) + g = 17$

$$g = e - 4$$

3. $(5e - 21) + c + 12 = 32$

$$c = 41 - 5e$$ 1 pt

(a) A diagram alapján

$$a + d = (44 - 5e) + (9 - e) = 53 - 6e$$

(b) Összesen

$$a+b+c+d+e+f+g = (44-5e)+(5e-21)+(41-5e)+(9-e)+e+(12-e)+(e-4) = 81-5e$$

vásárló volt, ami nem osztható 5–tel, tehát az utolsó nem kaphatott ajándékkupont. 2 pt

(c) Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott vásárló evett hamburgert

$$\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{32}{81 - 5e}.$$

Ez az érték akkor kisebb mint 0,5 ha

$$\frac{32}{81 - 5e} < \frac{1}{2} \qquad 17 > 5e$$

$$\frac{81 - 5e}{32} > 2 \qquad \frac{17}{5} > e$$

$$81 - 5e > 64$$

azaz, ha $e \leq 3$. Azonban $b = 5e - 21$ nem lehet negatív, így $e \geq 5$. Ezért a vizsgált valószínűség nem lehet 1/2–nél kevesebb. 3 pt

D csoport

Feladat megoldása.

(a) Összes esetek száma 6^3.
Rossz esetek (a dobás 1, 2, 3 vagy 4) száma 4^3.
Így annak a valószínűsége, hogy a dobássorozat sikeres:

$$1 - \frac{4^3}{6^3}.$$

1 pt

(b) Összesen $4 + 4 - 3 = 5$ kockával dobunk. Ezért az összes lehetőség száma 6^5.
A kedvező esetek száma a legalább 5 sikert tartalmazó dobások száma. Mivel a 6–os dobások dupla sikernek számítanak, ezért a 6–os dobások száma alapján haladunk.

- 0 db 6–os és 5 db 5–ös $\binom{5}{0} \cdot \binom{5}{5}$ eset.
- 1 db 6–os esetén még legalább 3 db 5–ös dobásra van szükség:
  - 1 db 6–os, 3 db 5–ös, 1 db más számjegy: $\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1}$ eset,
  - 1 db 6–os, 4 db 5–ös: $\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{4}$ eset.

2 pt

- 2 db 6–os esetén a maradék 3 kockából még legalább 1 darab 5–öst kell dobni. Összese 5^3 db olyan 3–hosszú dobássorozat van, amiben nincs 6–os, és 4^3 db olyan amiben nincs 5–ös sem, így $5^3 - 4^3$ olyan 3–hosszú dobássorozat van, amiben van 5–ös, de nincs 6–os. Ezért ekkor

$$\binom{5}{2} \cdot (5^3 - 4^3)$$

  eset kapunk.
- $k = 3, 4, 5$ db 6–os esetén a maradék dobás(ok) a 6–oson kívül tetszőleges(ek) lehet(nek), azaz

$$\binom{5}{k} \cdot 5^{5-k}$$

  eset adódik.

Tehát a kedvező esetek száma

$$\binom{5}{0}\binom{5}{5} + \binom{5}{1}\binom{4}{3}\binom{4}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{4} + \binom{5}{2}(5^3 - 4^3) + \binom{5}{3}5^2 + \binom{5}{4}5 + \binom{5}{5} = \zeta.$$

Így a keresett valószínűség

$$\frac{\zeta}{6^5}.$$

3 pt

9.

Geometriai valószínűség; feltételes valószínűség, függetlenség

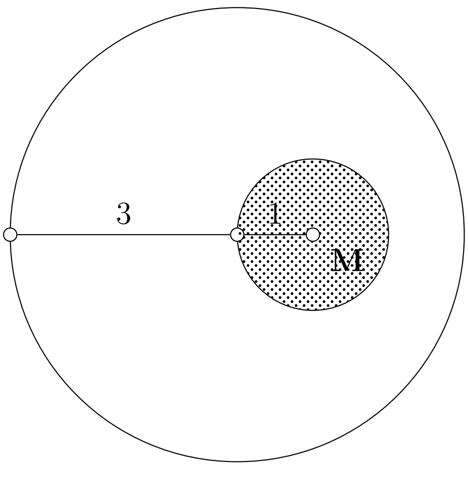
Házi feladatok

Geometriai valószínűség

Egyenletességi hipotézis: az események valószínűsége egyenesen arányos az események mértékével, azaz annak a valószínűsége, hogy a kísérlet kimenetele az $A \subset \Omega$ tartományba esik, csak a tartomány mértékétől függ, az elhelyezkedésétől nem.

1. Feladat. Egy kör alakú, 3 méter sugarú kerti tó felszínén, a szélétől 2 méterre egy molnárka áll lesben. A vízfelszínre eső apró rovarok közül azokat veszi észre, amik tőle legfeljebb 1 méterre vannak. Ha egy rovar véletlenszerűen esik a vízbe, akkor mennyi az esélye, hogy ezt a molnárka észreveszi? A rovar vízbe érkezésének helye a tó felszínén megfelel az egyenletességi hipotézisnek.

Megoldás. Az egyenletességi hipotézis szerint a tó bármely részére ugyanakkora eséllyel esik a rovar. A keresett valószínűség a kedvező rész területének és az összes rész területének hányadosa, azaz a molnárka körüli 1 méter sugarú kör területe és a tó teljes felszínének hányadosa.



Az összes terület a 3 méter sugarú kör alakú tó területe, így

$$T_ö = 3^2\pi \,.$$

A kedvező terület pedig egy 1 méter sugarú kör területe

$$T_k = 1^2\pi \,.$$

Ezek alapján

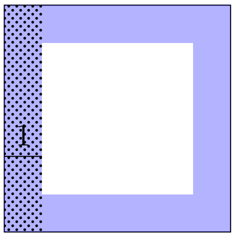
$$\mathrm{P} = \frac{T_k}{T_ö} = \frac{\pi}{9\pi} \qquad \approx 0{,}111 \,.$$

2. Feladat. Véletlenszerűen választunk egy P pontot egy 6 egység oldalhosszúságú négyzetben. Mennyi a következő események valószínűsége?

(a) $A =$ P a legközelebbi oldaltól legfeljebb 1 egységnyire van.
(b) $B =$ P a hozzá legközelebb eső oldaltól pontosan 1 egységnyire van.
(c) $C =$ P a legközelebbi oldaltól pontosan 3 egység távolságra van.

Megoldás. Mindhárom esetben az összes terület a 6 egység oldalú négyzet területe, tehát $T_ö = 36$ egységnégyzet.

(a) Az ábrán a pontozott rész jelöli a négyzetnek azon pontjait, amelyek a négyzet bal oldalától legfeljebb 1 egység távolságra vannak. Mind a 4 oldalhoz tartozik ilyen pontozott rész, ezek együtt a kék síkrészt adják, ez kedvező halmaz.

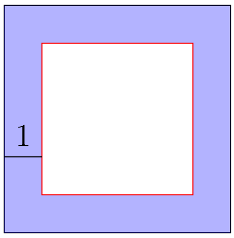


Könnyebb kiszámolni a komplementer halmaz területé, ami a 4 egység oldalhosszúságú fehér négyzet, ennek 16 egységnégyzet a területe. Így a keresett valószínűség

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{16}{36} \qquad \approx 0{,}556\,.$$

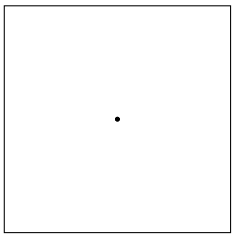
(b) A kedvező halmaz az ábrán a fehér négyzet pirossal jelölt határa. Azonban a vonal, mint egy 1 dimenziós halmaz területe 0, ezért a keresett valószínűség

$$\mathrm{P}(B) = \frac{0}{36} = 0\,.$$



(c) Egyedül a négyzet középpontja elégíti ki a feltételt. Hasonlóan az előző részfeladathoz, a pont területe is 0, tehát a keresett valószínűség most is

$$\mathrm{P}(C) = \frac{0}{36} = 0\,.$$



Feltételes valószínűség, függetlenség

- *Tegyük fel, hogy* $\mathrm{P}(B) > 0$*, ekkor az* A *eseménynek a* B *eseményre vett feltételes valószínűsége:*

$$\mathrm{P}(A\,|\,B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\,.$$

- *Az* A *és* B *események függetlenek, ha*

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\,.$$

3. Feladat. A vihar véletlenszerű helyen elszakít egy 20 km hosszú légvezetéket, ezért a vezeték két végéről egy–egy keresőcsapat indul, hogy felderítsék a szakadás helyét. A nehéz terep miatt az első csapat 4 km/h, a második 6 km/h sebességgel halad. Tekintsük a következő eseményeket.

$A =$ A szakadás helyét a lasabban haladó csapat találja meg.

$B =$ Valamelyik csapat fél órán belül megtalálja a szakadás helyét.

(a) Mennyi a valószínűsége az A, illetve a B eseménynek?
(b) Függetlenek-e az A és a B események?
(c) Mennyi a B esemény valószínűsége, ha tudom, hogy az A esemény bekövetkezett?
(d) Mennyi az A esemény valószínűsége, ha a B esemény bekövetkezett?

Megoldás.

(a) • Az A esemény valószínűsége.
A két csapat együtt óránként 10 km–t tud átfésülni a keresés során, így 2 óra múlva találkoznak. Ez idő alatt a lassabb csapat 8 km–t tesz meg.

Tehát

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{megtett út hossza}}{\text{összes út hossz}} = \frac{8}{20} \qquad = 0{,}4\,.$$

• A B esemény valószínűsége.
A csapatok fél óra alatt 2, illetve 3 km–t tesznek meg, tehát

$$\mathrm{P}(B) = \frac{2+3}{20} \qquad = 0{,}25\,.$$

(b) A két halmaz metszete:

Így

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{20} \qquad \text{és} \quad \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B) = \frac{8}{20}\cdot\frac{5}{20} \qquad = 0{,}1\,,$$

azaz a két esemény független.

(c) Ebben az esetben az A esemény bekövetkezett, tehát a szakadás a $[0, 8]$ intervallumban történt, ezért az eseményteret leszűkítjük erre az intervallumra:

Ezen megfontolás alapján most az összes rész a $[0,8]$ intervallum, a kedvező rész pedig a B eseménynek a $[0,8]$ intervallumba eső része, azaz a $[0,2]$ intervallum. Így

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{2}{8}\qquad=0{,}25\,.$$

A feltételes valószínűség definícióját használva is ugyanerre az eredményre jutunk:

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{20}}{\frac{8}{20}}\,.$$

(d) Az A eseménynek a B eseményre vett feltételes valószínűsége definíció szerint:

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{2}{20}}{\frac{5}{20}}\qquad=0{,}4\,.$$

Természetes az ábráról is ugyanez az eredmény olvasható le.

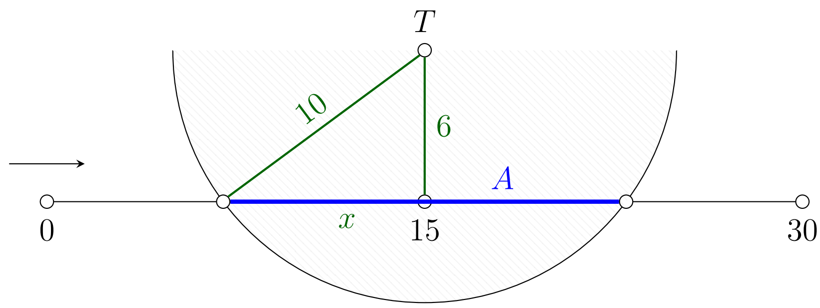
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a két esemény függetlensége miatt a feltételes valószínűségekre $\mathrm{P}(A\,|\,B)=\mathrm{P}(A)$ és $\mathrm{P}(B\,|\,A)=\mathrm{P}(B)$ teljesül; az egyik esemény bekövetkezése nem befolyásolja a másik esemény bekövetkezését. ✠

4. Feladat. Egy 30 km hosszú egyenes útszakasz véletlenszerű helyén lerobban az autónk. A közelben csak egy mobiltelefon átjátszó torony van, ez az út felénél az úttól 6 km távolságra található. A torony egy 10 km sugarú kör alakú területet képes kiszolgálni.

(a) Mennyi annak az esélye, hogy telefonon segítséget tudunk hívni?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy telefonon segítséget tudunk hívni, ha az út első 5 kilométeres szakaszán robbantunk le?
(c) Mennyi a valószínűsége, hogy tudunk segítséget hívni, feltéve, hogy az első 10 kilométeren robbantunk le?
(d) Annak mennyi az esélye, hogy nem tudunk segítséget hívni, ha tudjuk, hogy az első 10 kilométeren robbantunk le?

Megoldás.

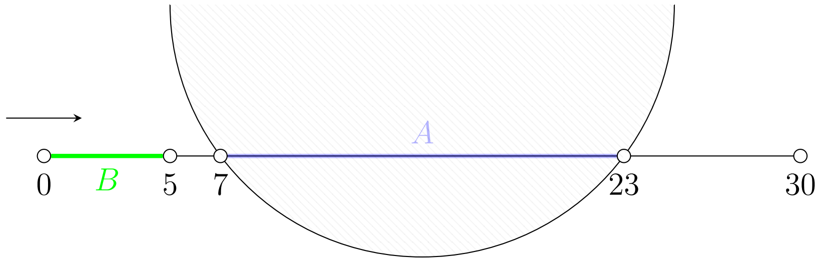
(a) Jelölje A azt az eseményt, hogy tudunk telefonon segítséget hívni.



Az ábra alapján $x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, így

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2x}{30} = \frac{8+8}{30} \qquad \approx 0{,}533\,.$$

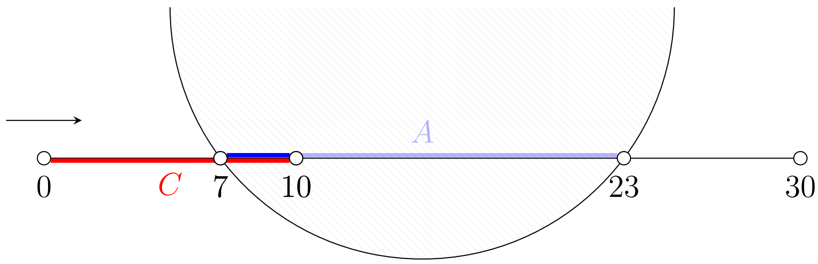
(b) Jelölje B azt az eseményt, hogy az út első 5 km-én robbanunk le. A $\mathrm{P}(A \,|\, B)$ valószínűséget keressük.



Mivel $A \cap B = \emptyset$, így $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$, tehát a keresett valószínűség

$$\mathrm{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = 0\,.$$

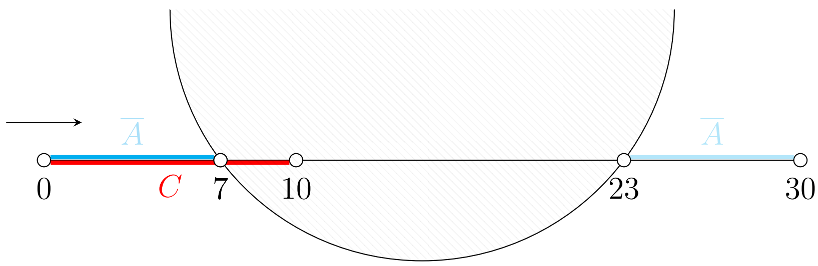
(c) Jelölje C azt az eseményt, hogy az út első 10 km-én robbanunk le. Ekkor a $\mathrm{P}(A \,|\, C)$ meghatározása a feladat.



Mivel $\mathrm{P}(C) = \dfrac{10}{30}$ és $\mathrm{P}(A \cap C) = \dfrac{3}{30}$, ezért

$$\mathrm{P}(A \,|\, C) = \frac{\mathrm{P}(A \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{10}{30}} = \frac{3}{10} \qquad = 0{,}3\,.$$

(d) A $\mathrm{P}(\overline{A} \,|\, C)$ értékét keressük.



Az ábra alapján $\mathrm{P}(\overline{A} \cap C) = \dfrac{7}{30}$, így

$$\mathrm{P}(\overline{A} \,|\, C) = \frac{\mathrm{P}(\overline{A} \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{10}{30}} \qquad = 0{,}7\,.$$

MEGJEGYZÉS. Természetesen
$$P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid B) = 1\,.$$

✠

5. Feladat. Egy autógyárban napi 1500 autó gurul le a gyártósorokról. A termelés 20%–a sportautó és napi 500 kisautót gyártanak, a fennmaradó mennyiséget SUV–k teszik ki. Napi 100 dízeles sportautó készül, valamint a kisautók közül véletlenszerűen kiválasztva egyet, az 0,3 valószínűséggel lesz dízeles. Míg a napi termelés 60%–át kitevő benzines autók megfelelnek a környezetvédelmi előírásoknak, a többi autó, amely dízellel megy, sajnos nem.

Az autógyár vezetője rémülten tapasztalja, hogy egy ellenőr sétál a gyártósorok között, de amint felismeri őt, megkönnyebbül, mert tudja, hogy ő, szemben a többi ellenőrrel, csupán egyetlen autót fog kiválasztani véletlenszerűen az aznapi termelésből.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy az ellenőr dízeles sportautót választ?
(b) Mekkora eséllyel talál szabálysértést, ha kisautóra esett a választása?
(c) Feltéve, hogy nem tapasztalt szabálysértést az ellenőr, mi a valószínűsége, hogy SUV–ra esett a választása?
(d) Mennyi a valószínűsége, hogy nem talál szabálysértést, ha tudjuk, hogy nem sportautót választott?

Megoldás. A rendelkezésre álló adatok alapján a következő táblázat készíthető.

	dízeles	benzines	összesen
sportautó	100	200	300
kisautó	150	350	500
SUV	350	350	700
összesen	600	900	1500

Vezessük be a következő eseményeket.

A_1 = Sportautót választ az ellenőr.
A_2 = Kisautót választ az ellenőr.
A_3 = SUV–t választ az ellenőr.

D = Dízeles autót választ az ellenőr.
B = Benzines autót választ az ellenőr.

Természetesen $\overline{B} = D$.

(a) A táblázat alapján 100 darab dízeles sportautó van, ezért
$$P(A_1 \cap D) = \frac{100}{1500} \qquad \approx 0{,}067\,.$$

(b) A dízeles autók gyártása során szabálysértést követtek el, így a táblázat második adatsora alapján
$$P(D \mid A_2) = \frac{150}{500} \qquad = 0{,}3\,.$$
Természetesen dolgozhatunk a feltételes valószínűség definíciója alapján is.

(c) A benzines autók gyártása során nem követtek el szabálysértést, ezért

$$\mathrm{P}(A_3 \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_3 \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{350}{1500}}{\frac{900}{1500}} = \frac{350}{900} \qquad \approx 0{,}389\,.$$

A táblázat második oszlopa alapján is a fenti eredményt kapjuk.

(d) Ebben az esetben

$$\mathrm{P}(B \mid \overline{A}_1) = \mathrm{P}(B \mid A_2 \cup A_3) = \frac{\mathrm{P}\left(B \cap (A_2 \cup A_3)\right)}{\mathrm{P}(A_2 \cup A_3)} = \frac{\frac{350+350}{1500}}{\frac{500+700}{1500}} \qquad \approx 0{,}583\,.$$

6. Feladat. A komplex és valós függvénytan szóbeli vizsgán 4 könnyű és 6 nehéz tétel van a borítékban. A már kihúzott tételek nem kerülnek vissza. Szüntüké harmadikként megy be vizsgázni, maga elé engedve Koront és Sztillát.

(a) Feltéve, hogy Koron és Sztilla ugyanolyan nehézségű tételt húzott, mennyi a valószínűsége, hogy Szüntüké könnyűt húz?
(b) Feltéve, hogy Koron és Sztilla eltérő nehézségű tételt húzott, mennyi a valószínűsége, hogy Szüntüké könnyűt húz?
(c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Koron és Sztilla ugyanolyan nehézségű tételt húz, ha tudjuk, hogy Szüntüké könnyűt húzott?
(d) Független-e az az esemény, hogy Koron és Sztilla ugyanolyan nehézségű tételt húz, attól az eseménytől, hogy Szüntüké könnyű tételt húz?

Megoldás. Vezessük be a következő eseményeket.

$A =$ Koron és Sztilla ugyanolyan nehézségű tételt húz.
$B =$ Szüntüké könnyű tételt húz.

(a) A keresett feltételes valószínűség $\mathrm{P}(B \mid A)$, azaz

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)}\,.$$

- Az A esemény valószínűsége.
Tíz tételből visszatevés nélkül húznak két tételt, így az összes esetek száma $10 \cdot 9$. A kedvező esetek megvalósulhatnak úgy, hogy vagy mindketten a 4 könnyű tételből húznak, ami $4 \cdot 3$ lehetőség, vagy mindketten a hat nehéz tételből húztak, ez $6 \cdot 5$ lehetőség. Így a kedvező esetek száma $12 + 30$. Ezért
$$\mathrm{P}(A) = \frac{4 \cdot 3 + 6 \cdot 5}{10 \cdot 9} \qquad \approx 0{,}467\,.$$
- Az $B \cap A$ esemény valószínűsége a következő.
Tíz tételből kell hármat kiválasztanunk úgy, hogy a sorrend számít, így az összes esetek száma $10 \cdot 9 \cdot 8$. A kedvező esetek a következőképpen következhetnek be. Vagy az első két tétel nehéz és a harmadik könnyű, ami $6 \cdot 5 \cdot 4$ lehetőség, vagy pedig mindhárom tétel könnyű, ami $4 \cdot 3 \cdot 2$ lehetőség. Így a kedvező esetek száma $120 + 24$. Tehát
$$\mathrm{P}(B \cap A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} \qquad = 0{,}2\,.$$

Ezért a keresett feltételes valószínűség:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}} \qquad \approx 0{,}429\,.$$

(b) Most a következő valószínűséget keressük:

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}\,.$$

- Az $\overline{A}$ esemény valószínűsége

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{15} \qquad \approx 0{,}533\,.$$

- Az $\overline{A} \cap B$ esemény valószínűsége.
  Az összes esetek száma $10 \cdot 9 \cdot 8$. A kedvező esetben vagy az első tétel nehéz, a második és a harmadik pedig könnyű, ami $6 \cdot 4 \cdot 3$ eset, vagy az első könnyű, a második nehéz és a harmadik pedig ismét könnyű, ami $4 \cdot 6 \cdot 3$ lehetséges kimenetel. Ezért

$$P(B \cap \overline{A}) = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} \qquad = 0{,}2\,.$$

Így a keresett feltételes valószínűség

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{8}{15}} \qquad \approx 0{,}375\,.$$

Megjegyzés. Azaz

$$P(B \mid A) + P(B \mid \overline{A}) \neq 1\,.$$

✠

(c) Ebben az esetben pedig az alábbi valószínűséget keressük.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A B esemény vagy úgy következik be, hogy Szüntüké előtt két egyforma tételt húztak $(B \cap A)$, vagy úgy, hogy előtte két különbözőt $(B \cap \overline{A})$, így $B = (B \cap A) \dot\cup (B \cap \overline{A})$ miatt

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \qquad = 0{,}4\,.$$

Tehát

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} \qquad = 0{,}5\,.$$

(d) Mivel

$$P(B \cap A) = \frac{1}{5} \quad \text{és} \quad P(B) \cdot P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{15}\,,$$

ezért a két esemény nem független.

7. Feladat. A Real Madrid és a Barcelona 5–5 játékosa találkozik egy tengerparti focipályán és pihenésképpen focizni szeretnének. Köztudott azonban, hogy jelenleg a Barcelona sokkal jobb, mint a Real Madrid, ezért eldöntik, hogy kevert csapatok lesznek. Beledobja mindenki a mezét egy zsákba, és sorban egymás után húznak 1–1 mezt, majd az így kialakult felosztás szerint játszanak. Messi választ először, majd utána Sergio Ramos következik. Vezessük be a következő eseményeket.

$A =$ Sergio Ramos és Messi is Barca–s mezt húz.

$B =$ Sergio Ramos és Messi ugyanabba a csapatba kerül.

$C =$ Messi Real–os mezben játszik.

(a) Vizsgáljuk meg az A és a B esemény kapcsolatát (egymást kizáróak, egyik maga után vonja a másikat, vagy függetlenek), majd határozzuk meg az $\mathrm{P}(A \mid B)$ és a $\mathrm{P}(B \mid A)$ valószínűségeket.

(b) Vizsgáljuk meg az A és a C esemény kapcsolatát, majd határozzuk meg az $\mathrm{P}(A \mid C)$ és a $\mathrm{P}(C \mid A)$ valószínűségeket.

(c) Vizsgáljuk meg a B és a C esemény kapcsolatát, majd határozzuk meg a $\mathrm{P}(B \mid C)$ és a $\mathrm{P}(C \mid B)$ valószínűségeket.

Megoldás.

(a) Az A esemény bekövetkezése maga után vonja a B eseményt, $A \subset B$. Emiatt $A \cap B = A$, és így

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)} = 1\,,$$
$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}\,.$$

- Az A esemény valószínűsége.
Tíz mezből kell kettőt kiválasztanunk úgy, hogy a sorrend számít, így az összes esetek száma $10 \cdot 9$. A kedvező esetek akkor valósulnak meg, ha mindketten Barca–s mezt választhatnak; ez $5 \cdot 4$ lehetséges kimenetel. Így

$$\mathrm{P}(A) = \frac{5 \cdot 4}{10 \cdot 9} \qquad \approx 0{,}222\,.$$

- A B esemény valószínűsége.
Az összes esetek száma most is $10 \cdot 9$. A kedvező eset vagy akkor következik be, ha mindketten Barca–s mezt választanak, vagy pedig, ha mindketten Real–osat, ami $5 \cdot 4$ vagy $5 \cdot 4$ lehetőség. Így

$$\mathrm{P}(B) = \frac{5 \cdot 4 + 5 \cdot 4}{10 \cdot 9} \qquad \approx 0{,}444\,.$$

Tehát a keresett feltételes valószínűség

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} \qquad = 0{,}5\,.$$

(b) Mivel Messin nem lehet egyszerre a Real Madrid és a Barcelona meze is, ezért az A és C események kizárják egymást, azaz $A \cap C = \emptyset$. Mivel $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$, ezért a keresett valószínűségek

$$\mathrm{P}(A \,|\, C) = \frac{\mathrm{P}(A \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{0}{\mathrm{P}(C)} = 0\,,$$
$$\mathrm{P}(C \,|\, A) = \frac{\mathrm{P}(C \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{0}{\mathrm{P}(A)} = 0\,.$$

(c) A B és a C események nem diszjunktak, egyik sem vonja maga után a másikat. A függetlenség vizsgálatához szükségünk van még a $\mathrm{P}(C)$ és a $\mathrm{P}(B \cap C)$ valószínűségre is .
A 10 mezből 5 Real Madridos van, így

$$\mathrm{P}(C) = \frac{5}{10} \qquad = 0{,}5\,.$$

A $B \cap C$ esemény azt jelenti, hogy mindketten Real–os mezben játszanak, ami az A eseményhez hasonló esemény, így

$$\mathrm{P}(B \cap C) = \frac{2}{9} \qquad \approx 0{,}222\,.$$

Azaz

$$\mathrm{P}(B \cap C) = \frac{2}{9} \quad \text{és} \quad \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}$$

miatt a B és C események függetlenek, és így természetesen

$$\mathrm{P}(B \,|\, C) = \frac{\mathrm{P}(B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}} = \mathrm{P}(B)\,, \quad \mathrm{P}(C \,|\, B) = \frac{\mathrm{P}(C \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \mathrm{P}(C)\,.$$

Videók

Geometriai valószínűség

1. Feladat. Ejtőernyős ugrást hajtanak végre egy 500 négyzetméter területű mezőn. Az ugrás akkor sikeres, ha az ugró a mezőn kijelölt 10 méter oldalhosszúságú négyzetben ér földet. Különdíjat kap az, aki a négyzet közepén megrajzolt 2 méter sugarú körön belül érkezik. Feltehető, hogy az érkezés helye a mezőn megfelel az egyenletességi hipotézisnek.

(a) Mekkora valószínűséggel lesz sikeres az ugrás?
(b) Mennyi az esélye annak, hogy az ugró különdíjat kap feltéve, hogy az ugrás sikeres?
(c) Milyen kapcsolat van az alábbi események között (kizárják egymást, vagy valamelyik maga után vonja a másikat)?

$A =$ Sikeres az ugrás. $\qquad B =$ Különdíjat kap az ugró.

Megoldás.

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{\pi}{25}$ (c) B maga után vonja A–t

2. Feladat. Adott egy 10 cm sugarú kör alakú céltábla. Erre felrajzolunk egy vízszintes és egy függőleges egyenest úgy, hogy mindkettő átmenjen a kör középpontján. Ilyen módon a táblát négy tartományra osztjuk fel. Véletlenszerűen rálövünk a céltáblára.

(a) Mennyi az

$A =$ A céltáblát a középponttól legalább 5 centiméterre találjuk el

esemény valószínűsége?
(b) Mennyi a

$B =$ A találat a bal alsó tartományba esik

esemény valószínűsége?
(c) Mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett?
(d) Milyen kapcsolatban áll egymással a két esemény (azaz függetlenek, vagy kizárják egymást, vagy valamelyik maga után vonja a másikat)?

Megoldás.

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) Függetlenek.

3. Feladat. A $[0, 1]$ intervallumon véletlenszerűen választunk egy pontot. Ez a pont két szakaszra bontja az intervallumot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a szakaszok hosszának szorzata nagyobb, mint $\frac{5}{36}$?

Megoldás. $\frac{2}{3}$

YouTube

4. Feladat. Egy 120 km hosszú egyenes autópályán a 40–edik és a 100–adik kilométernél van mentőállomás, nevezzük ezeket X–nek és Y–nak. Ha baleset történik, akkor azt az állomást riasztják, amelyik közelebb esik a baleset helyszínéhez.

(a) Egy véletlenszerű baleset esetén mennyi az esélye annak, hogy az X állomást riasztják?

Tegyük fel, hogy négy baleset történik egymástól függetlenül.

(b) Mennyi az esélye, hogy pontosan két alkalommal riasztják az X állomást?
(c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy időrendben az első két esethez az X, a második kettőhöz pedig az Y állomást riasztják?
(d) Mi a valószínűsége annak, hogy a négyből legalább egy esethez az X állomást riasztják?
(e) Hány baleset esetén teljesül az, hogy legalább 99% eséllyel valamelyik esethez az X állomást fogják majd riasztani?

Megoldás.

YouTube

(a) $\frac{7}{12}$

(b) $\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2$

(c) $\left(\frac{7}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2$

(d) $1 - \left(\frac{5}{12}\right)^4$

(e) legalább 6

Feltételes valószínűség, függetlenség

5. Feladat. Legyen A és B két esemény, és legyen $\mathrm{P}(B)$ pozitív. Mennyi a $\mathrm{P}(A \mid B)$ feltételes valószínűség értéke, ha

(a) A és B kizárja egymást, (b) B maga után vonja A–t, (c) A és B függetlenek?

Megoldás.

YouTube

(a) 0 (b) 1 (c) $\mathrm{P}(A)$

6. Feladat. Az egyetemen végzett felmérés szerint a hallgatók 60%–a nő és 40%–a férfi. Azt is megállapították, hogy a nők 30%–a dohányzik, a férfiaknál ez az arány 60%. Véletlenszerűen választva egy hallgatót, mekkora a valószínűsége, hogy

(a) dohányzik?
(b) dohányzik, ha tudjuk, hogy a választott hallgató hölgy?
(c) hölgy hallgatót választottunk, ha tudjuk, hogy az illető dohányzik?

Megoldás.

(a) 0,42

(b) 0,3

(c) $\frac{18}{42}$

7. Feladat. Egy tévés vetélkedőben három egyforma ajtó mögött egy főnyeremény és két kis értékű ajándék van véletlenszerűen elhelyezve. A játékos megjelöl egyet az ajtók közül, de azt most még nem nyitják ki neki. Ehelyett a műsorvezető nyit ki egyet véletlenszerűen a megmaradt ajtók közül. Tegyük fel, hogy a kinyitott ajtó mögött nem a főnyeremény található. A játékosnak ezen a ponton lehetősége van módosítani a választásán, és az eredetileg megjelölt ajtó helyett a harmadik, kimaradt ajtót kinyitni.

(a) Figyelembe véve, hogy a műsorvezető kis értékű ajándékot talált, a főnyeremény mekkora eséllyel van a játékos által megjelölt ajtó illetve a kimaradt ajtó mögött? Ezek alapján a játékosnak érdemes módosítania az eredeti választásán?

(b) Hogy módosul a feladat akkor, ha a műsorvezető tudja, melyik ajtó mögött mi található, és mindig egy olyan ajtót nyit ki, mely mögött kis értékű nyeremény van? (Ha két ilyen ajtó is rendelkezésre áll, akkor a műsorvezető véletlenszerűen választ.)

Megoldás.

(a) Mindegy, hogy módosít–e.

(b) Megéri módosítani és ekkor duplájára nő a nyerés valószínűsége.

8. Feladat. Adott 20 termék, melyek közül 16 elsőosztályú és 4 másodosztályú. Visszatevés nélkül 2 terméket választva mennyi a valószínűsége annak, hogy

(a) a másodszorra kihúzott termék másodosztályú, ha tudjuk, hogy az először kihúzott termék elsőosztályú?

(b) a másodszorra kihúzott termék másodosztályú, ha tudjuk, hogy az először kihúzott termék másodosztályú?

Megoldás.

(a) $\frac{4}{19}$

(b) $\frac{3}{19}$

9. Feladat. Egy óvodás csoportba 9 gyerek jár, köztük egy testvérpár, egy fiú és egy lány. Egy foglalkozáson véletlenszerűen kiválasztunk 4 gyereket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

(a) a testvérpár mindkét tagját kiválasztjuk;

(b) a testvérpár mindkét tagját kiválasztjuk, feltéve, hogy a fiút kiválasztjuk;

(c) a testvérpár mindkét tagját kiválasztjuk, feltéve, hogy legalább az egyiküket kiválasztjuk?

Megoldás.

(a) $\dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{4}}$ (b) $\dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{8}{3}}$ (c) $\dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{4}-\binom{7}{4}}$

10. Feladat. Egy üzem egy napi termelésének néhány adatát az alábbi táblázat foglalja össze.

	Reggel	Délután	Este
elsőosztályú termékek száma	4.000	2.000	1.500
másodosztályú termékek száma	1.000	640	630
selejtek száma	100	60	70

A napi össztermékből egyet választva mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az selejt?

(b) délután készült?

(c) selejt, feltéve, hogy este gyártották?

(d) délután gyártották, feltéve, hogy selejt?

Megoldás.

(a) $\dfrac{230}{10.000}$ (b) $\dfrac{2700}{10.000}$ (c) $\dfrac{70}{2.200}$ (d) $\dfrac{60}{230}$

11. Feladat. Egy üzem heti termelésével kapcsolatban tudjuk, hogy a hétfőn gyártott termékek 8%–a selejt. Továbbá tudjuk, hogy kedden 20%–kal nagyobb a termelés, mint hétfőn, de a keddi termékek csupán 5%–a selejt. A heti össztermékből egyet kiválasztva mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az selejt?

(b) hétfőn készült, feltéve, hogy selejt?

Megoldás.

(a) $\dfrac{14}{220}$ (b) $\dfrac{8}{14}$

12. Feladat. Négy gép termelésével kapcsolatban tudjuk, hogy a napi össztermék rendre 30%–át, 25%–át, 25%–át illetve 20%–át adják, valamint ezek a gépek rendre 4%, 5%, 3% illetve 2% selejttel dolgoznak. A napi össztermékből egyet válaszottunk ki, és az selejt. Mennyi a valószínűsége, hogy a második gép gyártotta?

Megoldás. $\dfrac{125}{360}$

13. Feladat. Tudjuk, hogy egy üzem termelésének 3%–a selejt, viszont 0,01 valószínűséggel a termékvizsgálat egy selejtet jónak ítél, míg egy jó terméket 0,05 valószínűséggel selejtnek nyilvánítanak. Mennyi a valószínűsége, hogy a termékvizsgálaton

(a) egy selejtnek nyilvánított termék selejt?

(b) egy jónak nyilvánított termék jó?

Megoldás. YouTube

(a) $\dfrac{297}{782}$

(b) $\dfrac{9.215}{9.218}$

14. Feladat. Tudjuk, hogy egy üzem nappali termelésének 2%–a, és az esti termelés 10%–a selejt. Egy napon véletlenszerűen kisorsoljuk, hogy vagy a nappali, vagy az esti termelésből húzunk egy tetszőleges terméket. Ha a kiválasztott termékünk jó, akkor ugyanebből (tehát vagy a nappali, vagy az esti termelésből) kihúzunk még egy terméket. Ha a kiválasztott termékünk selejt, akkor a másik műszak termeléséből húzunk egy terméket. Mennyi az esélye, hogy a második kihúzott termékünk jó?

Megoldás. $0{,}5 \cdot 0{,}98^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}9^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}98$ YouTube

15. Feladat. A fogadóirodák szerint az NBA–ben a Chicago Bulls 0,5; a San Antonio Spurs 0,8; illetve a Los Angeles Lakers 0,3 valószínűséggel nyeri meg a következő meccsét. Tudjuk, hogy a csapatok nem egymással játszanak, továbbá a három mérkőzés eredménye független egymástól. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét:

(a) Mindhárom csapat megnyeri a következő mérkőzését.

(b) A Bulls nyer, viszont a Lakers veszít.

(c) A három csapat közül pontosan egy nyer.

(d) A három csapat közül legfeljebb egy nyer.

(e) A Bulls, a Spurs illetve a Lakers éri el a győzelmet, feltéve, hogy a három csapat közül pontosan egy nyer.

Megoldás. YouTube YouTube

(a) $0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3$

(b) $0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}3$

(c) $0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0,2 \cdot 0{,}3$

(d) $0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0,2 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7$

(e) $\dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0,2 \cdot 0{,}3}$, $\dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7}{0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0,2 \cdot 0{,}3}$, $\dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0,2 \cdot 0{,}3}$

16. Feladat. Adott egy urna, benne pedig 4 piros és 2 zöld golyó. Kihúzunk három golyót először visszatevés nélkül, majd visszatevéssel.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy sorban egy pirosat, egy zöldet, és még egy pirosat kapunk?

(b) Mennyi az esélye, hogy a kihúzott golyók között pontosan egy zöld lesz?

(c) Mennyi annak az esélye, hogy a második golyó zöld?

(d) Feltéve, hogy a második golyó zöld, mi annak a valószínűsége, hogy az első golyó piros volt?

(e) Függ az első golyó színe attól, hogy milyen színű a második?

Megoldás.

(a) $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{27}$

(b) $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$

(c) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$

(d) $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$

(e) Igen, nem.

Kvízek

A csoport

Feladat. Egy raktárhoz egy 12 órás időintervallumban két üres kamion, egy 10 tonnás, illetve egy 18 tonnás érkezik. A rakodás a 10 tonnás kamionnál egy, a 18 tonnásnál két órát vesz igénybe. Az elsőnek érkező kamion rögtön megkezdi a rakodást. Ha a második kamion akkor érkezik, amikor az elsőre még rakodnak, akkor várakoznia kell a rakodás befejezéséig. Mekkora a valószínűsége, hogy a két kamion közül valamelyiknek várakoznia kell?

B csoport

Feladat. Liverpoolban a napok egyharmada esős. Esős időben 50% az esélye annak, hogy forgalmi dugó keletkezik, eső nélküli időjárás esetén csak 25%. Ha esik, és kialakul forgalmi dugó, akkor Bob, egy helyi bankár 50% valószínűséggel elkésik a munkájából. Ha nem is esik, és dugó sincs, akkor csak 12,5% valószínűséggel késik. Minden más esetben 25% valószínűséggel késik el. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott napon

(a) Bob időben ér be dolgozni, feltéve hogy esett, de nem volt dugó?
(b) nem esik, dugó van és Bob nem késik el?

Bob a munkáját délután 4 és 5 óra között fejezi be (az egyenletességi hipotézis alapján). Lazításként beugrik a 13 perces sétára található Easy Pubba, ahol volt felesége Moonracket háromnegyed 5–ig dolgozik.

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy Bob találkozik Moonrackettel?

C csoport

Feladat. Az alábbi táblázatban a 2018–as őszi félév kalkulus gyakorlatok összesített eredményeit, illetve két gyakorlatvezető eredményeit látjuk.

	megajánlott jegy	átment gyakorlaton	összes hallgató
Egész évfolyam	127	324	614
Dr. Szabó Tamás	2	8	24
Dr. Németh Zoltán	4	17	26

Természetesen aki megajánlott jegyet kapott, az át is ment a gyakorlaton.

(a) Hunorka átment a gyakorlaton. Mekkora az esélye, hogy megajánlott jegyet is kapott?
(b) Bölöjtke megajánlott jegyet kapott. Mi a valószínűsége, hogy Szabó Tamásnál volt?
(c) Krizosztom sajnos megbukott. Mekkora a valószínűsége, hogy Németh Zoltánnál tanult?
(d) Pompónia másik 37 hallgatótársával együtt 0 pontot szerzett a félév során. Kiválasztunk egy bukott hallgatót az évfolyamból. Mekkora valószínűséggel Pompónia az?
(e) Kovács Tavaszka és Tűzvirág ikrek, és ők is megbuktak, mint Pompónia. Szabó Tamás emlékszik, hogy Tavaszka hozzá járt gyakorlatra. Mekkora a valószínűsége, hogy Tűzvirág is?

Kvízek megoldása

A csoport

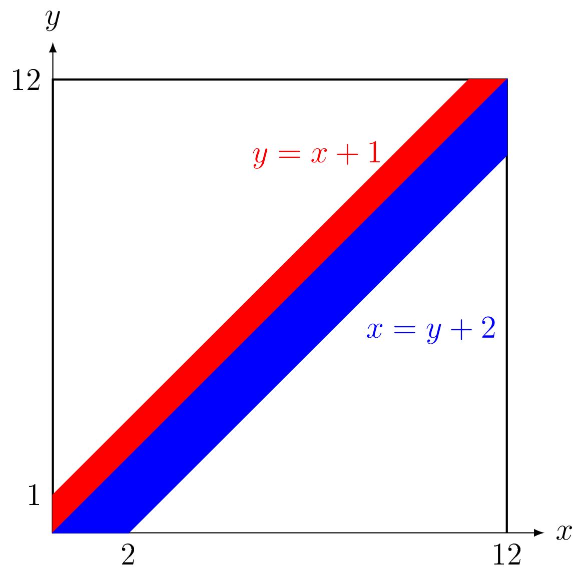
Feladat megoldása. Legyen

$$A = \text{Valamelyik kamionnak várakoznia kell.}$$

Jelölje x az 1 órás rakodási idővel rendelkező kamion érkezési idejét, y pedig a 2 órás rakodási idővel rendelkező kamionét. Kétféleképpen történhet várakozás:

$$(1)\ x < y < x + 1 \qquad \text{vagy} \qquad (2)\ y < x < y + 2.$$ 1 pt

Ha az érkezési időket ábrázoljuk egy (x, y) koordináta rendszerben, akkor
(1) az $y = x$ egyenes fölötti, de $y = x + 1$ alatti terület;
(2) az $y = x$ egyenes alatti, de $y = x - 2$ fölötti terület.



Ekkor

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{kedvező rész területe}}{\text{összes rész területe}}$$ 2 pt

Az alsó fehér háromszög területe $\frac{10^2}{2}$ a felsőé $\frac{11^2}{2}$. Így a színes, azaz a kedvező rész területe

$$T_k = 12^2 - \frac{10^2}{2} - \frac{11^2}{2}.$$

Tehát

$$\mathrm{P}(A) = \frac{12^2 - \frac{10^2}{2} - \frac{11^2}{2}}{12^2}.$$ 3 pt

B csoport

Feladat megoldása. Legyen

$$E = \text{Esik.}$$
$$D = \text{Dugó alakul ki.}$$
$$K = \text{Bob elkésik.}$$

Ekkor a következőket tudjuk:

$$\mathrm{P}(E) = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(D \mid E) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(D \mid \overline{E}) = \frac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(K \mid D \cap E) = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(K \mid \overline{D} \cap \overline{E}) = \frac{1}{8},$$
$$\mathrm{P}(K \mid \overline{D} \cap E) = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(K \mid D \cap \overline{E}) = \frac{1}{4}.$$

(a)

$$\mathrm{P}(\overline{K} \mid E \cap \overline{D}) = 1 - \mathrm{P}(K \mid E \cap \overline{D}) = \frac{3}{4}$$ 1 pt

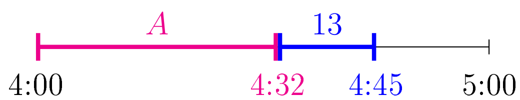
(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\overline{E} \cap D \cap \overline{K}) &= \mathrm{P}(\overline{K} \cap (D \cap \overline{E})) \\
&= \mathrm{P}(\overline{K} \mid D \cap \overline{E}) \cdot \mathrm{P}(D \cap \overline{E}) \\
&= \big(1 - \mathrm{P}(K \mid D \cap \overline{E})\big) \cdot \mathrm{P}(D \cap \overline{E}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \mathrm{P}(D \mid \overline{E}) \cdot \mathrm{P}(\overline{E}) \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \big(1 - \mathrm{P}(E)\big) \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$ 2 pt

(c) Bob pontosan akkor ér háromnegyed 5–re az Easybe, ha 13 perccel hamarabb, 4 óra 32 perckor indul el. Tehát legfeljebb eddig dolgozhat, ha szeretne találkozni volt feleségével. Legyen

$$A = \text{Bob találkozik Moonrackettel.}$$

Ekkor



Így

$$\mathrm{P}(A) = \frac{32}{60}.$$ 3 pt

C csoport

Feladat megoldása.

(a) Mivel 324 hallgató ment át, és ebből 127 kapott megajánlott jegyet, ezért a keresett valószínűség

$$\frac{127}{324}.$$

(b) Legyen

$$A = \text{Bölöjtke megajánlott jegyet kapott.}$$
$$B = \text{Szabó Tamás volt a gyakorlatvezetője.}$$

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{2}{614}}{\frac{127}{614}}.$$ 1 pt

(c) Legyen

$$C = \text{Krizosztom megbukott.}$$
$$D = \text{Németh Zoltán volt a gyakorlatvezetője.}$$

Az összes bukott hallgató száma $614-324 = 290$. Németh Zoltánnál megbukott hallgatók száma $26 - 17 = 9$

$$\mathrm{P}(D \mid C) = \frac{\mathrm{P}(D \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{\frac{9}{614}}{\frac{290}{614}}.$$

(d) Összesen 290 bukott hallgató van. Tehát annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott bukott hallgató pont Pompónia, az 2 pt

$$\frac{1}{290}.$$

(e) Legyen

$$T_a = \text{Tavaszka Szabó Tamáshoz járt.}$$
$$T_u = \text{Tűzvirág Szabó Tamáshoz járt.}$$

$$\mathrm{P}(T_u \mid T_a) = \frac{\mathrm{P}(T_u \cap T_a)}{\mathrm{P}(T_a)}$$

Tavaszka és Tűzvirág megbukott. Szabó Tamás csoportjában $24-8 = 16$ hallgató bukott meg, ezért

$$\mathrm{P}(T_a) = \frac{16}{290} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{P}(T_u \cap T_a) = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{290}{2}},$$

tehát

$$\mathrm{P}(T_u \mid T_a) = \frac{\frac{\binom{16}{2}}{\binom{290}{2}}}{\frac{16}{290}}.$$ 3 pt

10.

Teljes valószínűség; véletlen változó

Házi feladatok

Teljes valószínűség

- *Bayes-formula. Ha* $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B) > 0$*, akkor*

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}.$$

- *Teljes valószínűség tétele. Ha az* $A_1, A_2, \ldots$ *események teljes eseményrendszert alkotnak, és* $\mathrm{P}(A_i) > 0$ *minden* i*-re, akkor*

$$\mathrm{P}(B) = \sum_i \mathrm{P}(B \mid A_i) \cdot \mathrm{P}(A_i).$$

1. Feladat. Vetúriusznak lejárt a bérlete, mégis felszáll az első járműre, ami hazaviszi. A megállóban 25% valószínűséggel érkezik először busz, az esetek 40%-ában troli jön elsőként, egyébként pedig villamos. A buszon 30% eséllyel jön ellenőr, a trolin 10% ennek a valószínűsége, a villamoson pedig 20%.

(a) Mekkora valószínűséggel találkozott ellenőrrel Vetúriusz?
(b) Ha megbüntették, akkor mennyi a valószínűsége, hogy busszal utazott?
(c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy busszal utazott, amennyiben nem büntették meg?

Megoldás. Vezessük be a következő eseményeket:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Buszra szállt.} & \qquad B &= \text{Megbüntették.} \\ A_2 &= \text{Trolival utazott.} \\ A_3 &= \text{Villamossal ment.} \end{aligned}$$

Ekkor az A_1, A_2 és A_3 események teljes eseményrendszert alkotnak. A rendelkezésre álló információk alapján a következő valószínűségeket tudjuk.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P}(A_1) = 0{,}25 & \mathrm{P}(A_2) = 0{,}4 & \mathrm{P}(A_3) = 0{,}35 \\ \mathrm{P}(B \mid A_1) = 0{,}3 & \mathrm{P}(B \mid A_2) = 0{,}1 & \mathrm{P}(B \mid A_3) = 0{,}2 \end{array}$$

(a) A teljes valószínűség tétele alapján

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B) &= \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(B \mid A_i) \cdot \mathrm{P}(A_i) \\ &= 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}35 \qquad = 0{,}185\,.\end{aligned}$$

(b) Mivel $\mathrm{P}(A_1), \mathrm{P}(B) > 0$, ezért a Bayes-formula alapján

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A_1) \cdot \mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}25}{0{,}185} \qquad \approx 0{,}405\,.$$

(c)

$$\mathrm{P}(A_1 \mid \overline{B}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{B} \mid A_1) \cdot \mathrm{P}(A_1)}{\mathrm{P}(\overline{B})} = \frac{(1 - \mathrm{P}(B \mid A_1)) \cdot \mathrm{P}(A_1)}{1 - \mathrm{P}(B)} = \frac{(1 - 0{,}3) \cdot 0{,}25}{1 - 0{,}185} \qquad \approx 0{,}215\,.$$

2. Feladat. A hűtőben négy doboz tej van: egy friss; egy, ami egy hete lejárt, és biztosan romlott; továbbá van két doboz, ami egy napja járt le, és 0,3 valószínűséggel romlott. Véletlenszerűen kiválasztunk egy doboz tejet.

(a) Mekkora az esélye, hogy ez a tej nem romlott?
(b) Ha megkóstoljuk a kivett tejet, és az romlottnak bizonyul, akkor mi a valószínűsége annak, hogy egy egy napja lejárt tejet vettük ki?

Megoldás. Vezessük be a következő eseményeket.

$A_1 =$ A kivett tej friss. $\qquad A_3 =$ A kivett tej egy napja járt le.
$A_2 =$ A kivett tej egy hete lejárt. $\qquad B =$ A kivett tej romlott.

Ekkor az A_1, A_2 és A_3 események teljes eseményrendszert alkotnak. A rendelkezésre álló információk alapján a következő valószínűségeket tudjuk:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P}(A_1) = 0{,}25 & \mathrm{P}(A_2) = 0{,}25 & \mathrm{P}(A_3) = 0{,}5 \\ \mathrm{P}(B \mid A_1) = 0 & \mathrm{P}(B \mid A_2) = 1 & \mathrm{P}(B \mid A_3) = 0{,}3 \end{array}$$

(a) A $\mathrm{P}(\overline{B})$ értéket keressük. Az adatok alapján a komplementer esemény valószínűségét tudjuk meghatározni a teljes valószínűség tétele segítségével.

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(B \mid A_i) \cdot \mathrm{P}(A_i) = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \qquad = 0{,}4\,,$$

ezért

$$\mathrm{P}(\overline{B}) = 0,6\,.$$

(b) A Bayes-formula szerint

$$\mathrm{P}(A_3 \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A_3) \cdot \mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}5}{0{,}4} \qquad = 0{,}375\,.$$

Véletlen változó

- *Ha a ξ diszkrét véletlen változó lehetséges értékei x_i és $p_i = \mathrm{P}(\xi = x_i)$, ahol $i \in \Gamma$, Γ megszámlálható, akkor az (x_i, p_i) párok összessége a ξ valószínűségeloszlása, és*
$$\sum_{i\in\Gamma} p_i = 1\,.$$
- *A diszkrét ξ valószínűségi változó várható értéke, illetve második momentuma*
$$\mathrm{E}(\xi) := \sum_{i\in\Gamma} x_i p_i\,, \quad \text{illetve} \quad \mathrm{E}\left(\xi^2\right) := \sum_{i\in\Gamma} x_i^2 p_i\,.$$
- *Tetszőleges ξ valószínűségi változó szórásnégyzete*
$$\mathrm{D}^2(\xi) = \mathrm{E}\left(\xi^2\right) - \mathrm{E}^2(\xi)\,.$$
- *Tetszőleges ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye*
$$F_\xi(x) := \mathrm{P}(\xi < x)\,.$$

3. Feladat. Egy iskolában tanuló 500 gyerek közül 130-nak nincs testvére, 200-nak van 1, 150-nek van 2 és 20-nak pedig 3 testvére van. Legyen ξ egy véletlenszerűen kiválasztott gyerek testvéreinek a száma. Adjuk meg ξ valószínűségeloszlását, várható értékét és szórását.

Megoldás. A ξ véletlen változó a $0, 1, 2$ és 3 értékeket veszi fel, és
$$p_0 = \mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{130}{500}\,, \qquad p_1 = \mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{200}{500}\,,$$
$$p_2 = \mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{150}{500}\,, \qquad p_3 = \mathrm{P}(\xi = 3) = \frac{20}{500}\,,$$
így a ξ véletlen változó valószínűségeloszlása a következő táblázattal írható le.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{130}{500}$	$\frac{200}{500}$	$\frac{150}{500}$	$\frac{20}{500}$

A testvérek számának várható értéke:
$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0 \cdot \frac{130}{500} + 1 \cdot \frac{200}{500} + 2 \cdot \frac{150}{500} + 3 \cdot \frac{20}{500}$$
$$= \frac{0 \cdot 130 + 1 \cdot 200 + 2 \cdot 150 + 3 \cdot 20}{500} \qquad = 1{,}04\,.$$

A szórás meghatározásához szükségünk lesz ξ második momentumára, azaz a ξ^2 várható értékére is.
$$\mathrm{E}\left(\xi^2\right) = \sum_{n=0}^{3} x_i^2 p_i = 0 \cdot \frac{130}{500} + 1 \cdot \frac{200}{500} + 4 \cdot \frac{150}{500} + 9 \cdot \frac{20}{500} \qquad = 1{,}96\,.$$
Ezek alapján a szórásnégyzet
$$\mathrm{D}^2(\xi) = \mathrm{E}\left(\xi^2\right) - \mathrm{E}^2(\xi) = 1{,}96 - 1{,}04^2 \qquad = 0{,}8784\,,$$
így a ξ véletlen változó szórása
$$\mathrm{D}(\xi) = \sqrt{0{,}8784} \qquad \approx 0{,}937\,.$$

4. Feladat. Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi értékek a véletlen változó valószínűségeloszlását alkossák. Továbbá ábrázoljuk grafikonon a valószínűségeloszlást az eloszlásfüggvényt és számoljuk ki a várható értéket és szórást.

(a) $p_1 = \mathrm{P}(\xi = 1) = 0{,}15a\,,\quad p_2 = \mathrm{P}(\xi = 2) = 0{,}55a\,,\quad p_3 = \mathrm{P}(\xi = 3) = 0{,}25a\,,$
$p_4 = \mathrm{P}(\xi = 4) = 0{,}3a\,.$

(b) $p_0 = \mathrm{P}(\eta = 0) = 0{,}25\,,\quad p_2 = \mathrm{P}(\eta = 2) = a\,,\quad p_{10} = \mathrm{P}(\eta = 10) = a^2\,.$

Megoldás. A p_i értékek valószínűségeloszlást alkotnak, ha $p_i \in [0;1]$ és az összegük 1.

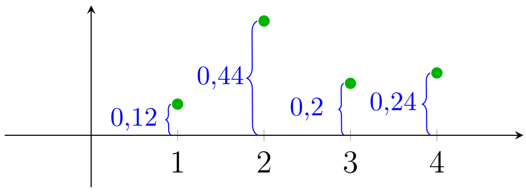
(a) A

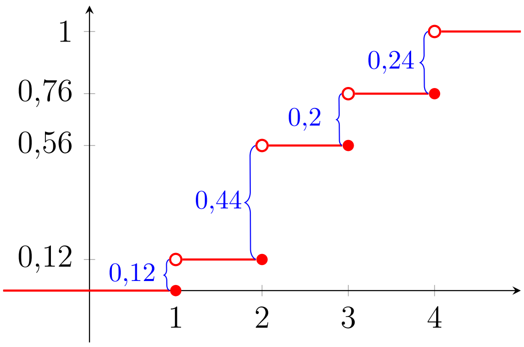
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}15a + 0{,}55a + 0{,}25a + 0{,}3a = 1{,}25a = 1$$

összefüggés alapján $a = 0{,}8$. Tehát

$$p_1 = 0{,}12 \qquad p_2 = 0{,}44 \qquad p_3 = 0{,}2 \qquad p_4 = 0{,}24\,,$$

és mindegyik p_i érték 0 és 1 közé esik.
Ekkor a valószínűségeloszlás és az eloszlásfüggvény grafikonja:





A várható érték

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{n=1}^{4} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 0{,}44 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}24 \qquad = 2{,}56\,.$$

A második momentum

$$\mathrm{E}\left(\xi^2\right) = \sum_{n=1}^{4} x_i^2 p_i = 1 \cdot 0{,}12 + 4 \cdot 0{,}44 + 9 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}24 \qquad = 7{,}52\,,$$

így

$$\mathrm{D}^2(\xi) = \mathrm{E}\left(\xi^2\right) - \mathrm{E}^2(\xi) = 7{,}52 - 2{,}56^2 \qquad = 0{,}9664\,,$$

tehát ξ szórása

$$\mathrm{D}(\xi) = \sqrt{0{,}9664} \qquad \approx 0{,}9831\,.$$

(b) A

$$p_0 + p_2 + p_{10} = 0{,}25 + a + a^2 = 1$$

összefüggés alapján

$$a^2 + a - \frac{3}{4} = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \frac{-1 \pm 2}{2}\,,$$

azaz $a = -\dfrac{3}{2}$ vagy $a = \dfrac{1}{2}$. De a $p_2 = a$ összefüggés alapján a pozitív, ezért csak a második érték esetén kapunk valószínűségeloszlást. Tehát $a = 0{,}5$ és így

$$p_0 = 0{,}25\,, \quad p_2 = 0{,}5\,, \quad p_{10} = 0{,}25\,.$$

Ekkor

$$\mathrm{E}(\eta) = 0 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}25 \qquad = 3{,}5\,,$$

továbbá

$$\mathrm{E}\left(\eta^2\right) = 0 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}25 \qquad = 27\,,$$

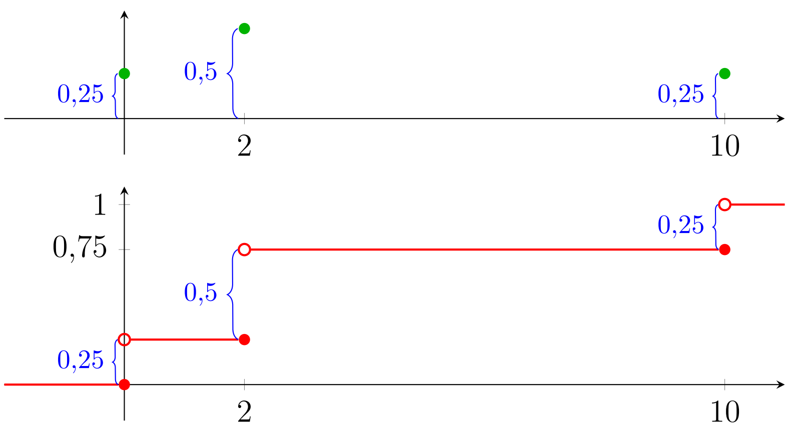
ezért

$$\mathrm{D}^2(\eta) = \mathrm{E}\left(\eta^2\right) - \mathrm{E}^2(\eta) = 27 - 3{,}5^2 \qquad = 14{,}75\,,$$

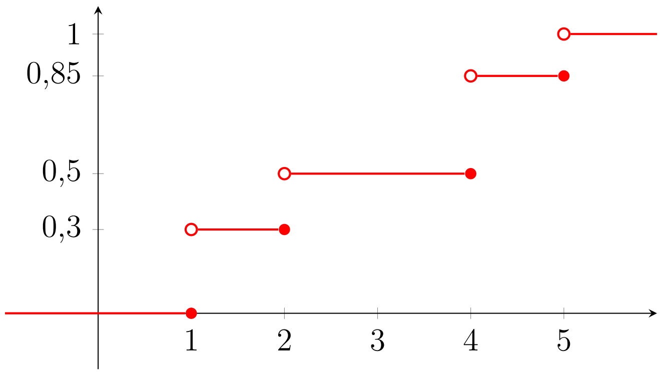
tehát η szórása

$$\mathrm{D}(\eta) = \sqrt{14{,}75} \qquad \approx 3{,}84\,.$$

A grafikonok



5. Feladat. Otniel elment a jósnőhöz, Diotímához, hogy megtudja tőle az év végi MM1 jegyét. Diotíma azonban némi zavart érzett a csillagok állásában, ezért csak a következő eloszlásfüggvénnyel tudott segíteni Otnielnek az év végi jegyét illetően.



Otthon Otniel elhatározta, hogy az eloszlásfüggvény grafikonja alapján meghatározza a következő események valószínűségét.

(a) A_1 =Megbukik.
(b) A_2 =Hármas érdemjegyet kap.
(c) A_3 =Az év végi jegye négyesnél rosszabb.
(d) A_4 = Legfeljebb kettest sikerül szereznie.
(e) A_5 =Teljesíti a tárgyat.
(f) A_6 =Az érdemjegye jobb, mint kettes, de legfeljebb hármas.

Megoldás.

(a) Otniel csak akkor bukik meg, ha egyest kap, azaz $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(\xi = 1)$. Mivel az eloszlásfüggvény az $x = 1$ helyen 0,3–et ugrik, ezért a ξ véletlen változó $p_1 = 0{,}3$ valószínűséggel veszi fel az 1 értéket, tehát
$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(\xi = 1) = 0{,}3\,.$$

(b) Mivel az eloszlásfüggvény az $x = 3$ pontban folytonos, nem ugrik, ezért
$$\mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(\xi = 3) = 0\,.$$

(c) Mivel
$$\mathrm{P}(A_3) = \mathrm{P}(\xi < 4) = F_\xi(4)\,,$$
így az eloszlásfüggvény grafikonjáról könnyen leolvasható, hogy $P(A_3) = 0{,}5$.

(d)
$$\mathrm{P}(A_4) = \mathrm{P}(\xi \le 2) = \mathrm{P}(\xi = 2) + \mathrm{P}(\xi < 2) = \mathrm{P}(\xi = 2) + F_\xi(2)$$
Mivel az eloszlásfüggvény $x = 2$–ben 0,2–et ugrik, és $F_\xi(2) = 0{,}3$, így
$$\mathrm{P}(A_4) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5\,.$$

(e)
$$\mathrm{P}(A_5) = \mathrm{P}(\xi \ge 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi < 2) = 1 - F_\xi(2) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

(f) Mivel ξ csak egész értékeket vehet fel, így az A_6 esemény megegyezik az A_2 eseménnyel, ezért
$$\mathrm{P}(A_6) = \mathrm{P}(2 < \xi \le 3) = \mathrm{P}(\xi = 3) = \mathrm{P}(A_2) = 0\,.$$

6. Feladat. Az idei GTK–s Kalkulus zh–t Adorján és Boborján javította. A kapott x érdemjegy függvényében Adorjánnak $f(x) = 3x - 1$, Boborjánnak pedig $g(x) = \dfrac{2x^2}{5} + 1$ percig tartott egy dolgozat javítása. Az érdemjegyek eloszlását a következő táblázat mutatja

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,25	0,35	0,25	0,1	0,05

(a) Mennyi az érdemjegyek várható értéke?
(b) Egy dolgozat javítása átlagosan hány percig tartott Adorjánnak, illetve Boborjánnak?
(c) Ha 18 órakor kezdtek hozzá a 315 dolgozat javításához, akkor végeztek–e éjfél előtt?

Megoldás.

(a) Jelölje ξ egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató érdemjegyét. Ekkor

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}35 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}05 \qquad = 2{,}35\,.$$

(b) Az egy dolgozat javítására szánt időt Adorján esetén az $\eta = f(\xi)$, Boborján esetén a $\zeta = g(\xi)$ véletlen függvénnyel fejezhetjük ki.

- Mivel f lineáris függvény, így

$$\mathrm{E}(\eta) = \mathrm{E}(f(\xi)) = \mathrm{E}(3\xi - 1) = 3\,\mathrm{E}(\xi) - 1 = 3 \cdot 2{,}35 - 1 \qquad = 6{,}05\,.$$

- Boborján esetén csak a definíció alapján tudjuk meghatározni a várható értéket.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\zeta) = \mathrm{E}(g(\xi)) &= \sum_{i=1}^{5} g(x_i)p_i = \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{2x_i^2}{5} + 1\right) p_i \\ &= \frac{7}{5} \cdot 0{,}25 + \frac{13}{5} \cdot 0{,}35 + \frac{23}{5} \cdot 0{,}25 + \frac{37}{5} \cdot 0{,}1 + 11 \cdot 0{,}05 \qquad = 3{,}7\,.\end{aligned}$$

(c) A fentiek alapján Adorján átlagteljesítménye $\dfrac{1}{6{,}05}$, Boborjáné $\dfrac{1}{3{,}7}$ dolgozat/perc, így az együttes teljesítményük

$$\frac{1}{6{,}05} + \frac{1}{3{,}7} = \frac{3{,}7 + 6{,}05}{6{,}05 \cdot 3{,}7}$$

dolgozat/perc. Ezért ha a 315 dolgozat javítása t percig tartott, akkor

$$\frac{3{,}7 + 6{,}05}{6{,}05 \cdot 3{,}7} \cdot t = 315$$

azaz

$$t = 315 \cdot \frac{6{,}05 \cdot 3{,}7}{3{,}7 + 6{,}05} \qquad \approx 723 \textit{ perc}$$

ami több mint 12 óra, így éjfél után végeztek.

7. Feladat. Hiacinta és Ladiszla a következő játékot játssza. Feldobnak két szabályos dobókockát. Ha a dobott számok szorzata páros, akkor Hiacinta fizet Ladiszlának 100 Ft-ot, míg ha a dobott számok összege páratlan, akkor Ladiszla fizet Hiacintának x forintot. Mennyi legyen x értéke, ha az a céljuk, hogy a játék igazságos legyen?

Megoldás. Egy játékot akkor nevezünk igazságosnak, ha minden résztvevő várható nyereménye nulla. Jelölje ξ egyikük, például Hiacinta nyereményét, ekkor Ladiszla nyereményét a $-\xi$ írja le és természetesen

$$\mathrm{E}(\xi) = -\,\mathrm{E}(-\xi)\,.$$

A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei x és -100. Ekkor $p_1 = \mathrm{P}(\xi = x)$ annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata páratlan, $p_2 = \mathrm{P}(\xi = -100)$ pedig annak, hogy a szorzat páros. Két szám szorzata csak akkor lehet páratlan, ha mindkét szám páratlan, minden más esetben páros, ezért

$$p_1 = \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{4}\,,$$

és

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{3}{4}\,.$$

Így ξ valószínűségeloszlása az alábbi táblázattal foglalható össze:

x_i	x	-100
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Innen Hiacinta várható nyereménye

$$\mathrm{E}(\xi) = x \cdot \frac{1}{4} - 100 \cdot \frac{3}{4} = \frac{x}{4} - 75\,.$$

Az

$$\frac{x}{4} - 75 = 0$$

egyenlet megoldása $x = 300$, ekkor $\mathrm{E}(\xi) = \mathrm{E}(-\xi) = 0$. Tehát ahhoz, hogy a játék igazságos legyen, Ladiszlának 300 forintot kell fizetnie Hiacinta részére, ha a dobott számok szorzata páratlan.

Videók

Teljes valószínűség

1. Feladat. Stephen Curry, a Golden Gate Warriors kosárlabdázója a 2016/17–es szezonban a kétpontos dobásokat 54%–os, a hárompontosokat 41%–os, a büntetődobásokat 90%–os hatékonysággal értékesítette. A próbálkozásainak 44, 36 és 20%–a volt kétpontos, hárompontos illetve büntetődobás.

(a) Curry összes próbálkozásának hány %–a volt sikeres hárompontos dobás?

(b) Az összes próbálkozásának mekkora hányadát értékesítette?

(c) A sikertelen próbálkozások milyen arányban voltak kétpontos, hárompontos illetve büntetődobások?

Megoldás.

(a) $0{,}41 \cdot 0{,}36 \cdot 100\,\%$–a

(b) $(0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}54 \cdot 0{,}44 + 0{,}41 \cdot 0{,}36) \cdot 100\,\%$–a

(c) $\dfrac{0{,}46 \cdot 0{,}44}{1-(0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}54 \cdot 0{,}44 + 0{,}41 \cdot 0{,}36)} \cdot 100\,\%$–a,

$\dfrac{0{,}59 \cdot 0{,}36}{1-(0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}54 \cdot 0{,}44 + 0{,}41 \cdot 0{,}36)} \cdot 100\,\%$–a,

$\dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{1-(0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}54 \cdot 0{,}44 + 0{,}41 \cdot 0{,}36)} \cdot 100\,\%$–a.

2. Feladat. Egy vizsgán egy tesztkérdéshez négy lehetséges választ adunk meg, melyek közül egy helyes. A vizsgázó $\frac{2}{3}$ valószínűséggel tudja a helyes választ, és ebben az esetben meg is jelöli azt. Ha nem tudja a helyes választ, akkor a vizsgázó tippel, tehát véletlenszerűen jelöl egyet a négy válasz közül. A javítás során azt látjuk, hogy a vizsgázó helyes választ adott a kérdésre. Mennyi a valószínűsége, hogy csak tippelt?

Megoldás. $\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}}$

Véletlen változó

3. Feladat. Tekintsük a háromszori pénzfeldobás kísérletét, és jelölje a ξ véletlen változó a fejek számát, és η a kapott fejek és írások számának szorzatát.

(a) Határozzuk meg ξ és η értékkészletét.

(b) Adjuk meg és ábrázoljuk is ξ és η valószínűségeloszlását.

(c) Ábrázoljuk ξ és η eloszlásfüggvényét.

Megoldás.

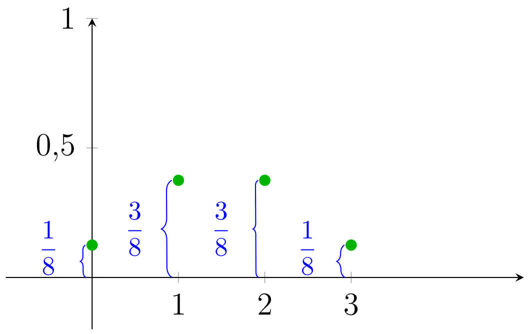
(a)

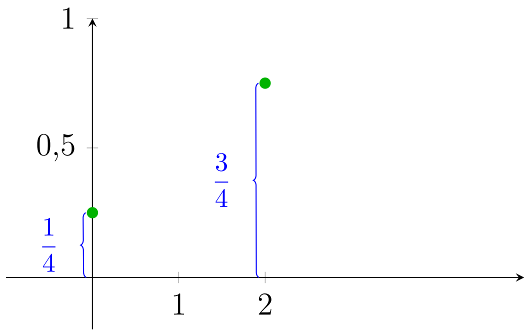
$$R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}, \qquad R_\eta = \{0, 2\}$$

(b)

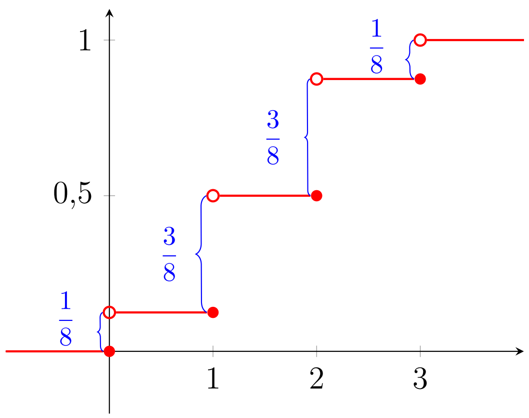
x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

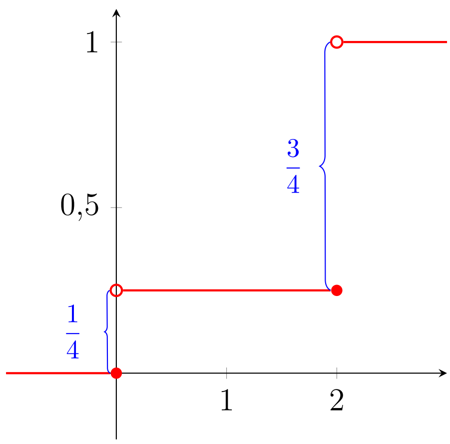
x_i	0	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$





(c)





4. Feladat. A szervízre behozott autók adatairól a következőt tudjuk: 30%–uknál nincs hiba, 40%–uknál egy, 15%–uknál kettő, 10%-uknál három, 5%-uknál négy hibát találtak a szakemberek. Jelölje a ξ véletlen változó a fellépő hibák számát. Számoljuk ki az alábbi valószínűségeket.

(a) $\mathrm{P}(\xi < 2)$,

(b) $\mathrm{P}(\xi \le 2)$,

(c) $\mathrm{P}(0{,}5 \le \xi \le 2{,}3)$,

(d) $\mathrm{P}(|\xi - 1{,}2| < 1)$.

Megoldás.

(a) 0,7 (b) 0,85 (c) 0,55 (d) 0,55

5. Feladat. Csizmadia tanár úr két csoportjával is dolgozatot íratott, az eredményeket az alábbi két táblázat foglalja össze.

A:

jegy	1	2	3	4	5
db	3	6	10	7	4

B:

jegy	1	2	3	4	5
db	9	7	0	0	14

Jelöljük ξ–vel az A csoportban, η–val a B csoportban szerzett jegyeket. Számoljuk ki ξ és η

(a) várható értékét, (b) szórását.

Megoldás.

(a) $\dfrac{1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 10+4\cdot 7+5\cdot 4}{30}$, $\dfrac{1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 10+4\cdot 7+5\cdot 4}{30}$

(b) 1,16, 2,04

6. Feladat. A cégünk termékfejlesztése során célunk a profit maximalizálása és a kockázat minimalizálása. Négy termékünk esetében az alábbi táblázat tartalmazza az adatokat.

1. termék:

esély	profit (forint)
20%	10 millió
50%	12 millió
30%	16 millió

3. termék:

esély	profit (forint)
15%	11 millió
45%	13 millió
40%	14 millió

2. termék:

esély	profit (forint)
20%	8 millió
40%	13 millió
40%	15 millió

4. termék:

esély	profit (forint)
25%	9 millió
35%	11 millió
40%	18 millió

Jelöljük ξ_i–vel az i–edik termékre vonatkozó profitot. Számoljuk ki a ξ_i véletlen változók

(a) várható értékét, (b) szórását.

Megoldás.

(a) $E(\xi_1) = 12{,}8$ $\qquad E(\xi_2) = 12{,}8$ $\qquad E(\xi_3) = 13{,}1$ $\qquad E(\xi_4) = 13{,}3$

(b) $D(\xi_1) = 2{,}22$ $\qquad D(\xi_2) = 2{,}56$ $\qquad D(\xi_3) = 0{,}99$ $\qquad D(\xi_4) = 3{,}91$

7. Feladat. A magyar autósok átlagosan egy évben 0,5 valószínűséggel nem okoznak balesetet, 0,4 valószínűséggel egy, 0,1 valószínűséggel legalább két balesetet okoznak. A biztosítási díjakat az alábbi táblázat foglalja össze.

fokozat	-2	-1	0	1	2
éves díj (ezer Ft)	200	130	100	95	85

Ha egy évben az autós nem okoz balesetet, a fokozatban eggyel "jobbra" kerül, ha egy balesetet okoz, nem változik a fokozata, ha egynél több balesetet okoz, eggyel "balra" kerül. Jelölje a ξ véletlen változó két, egymástól független év után az éves díjat. Határozzuk meg

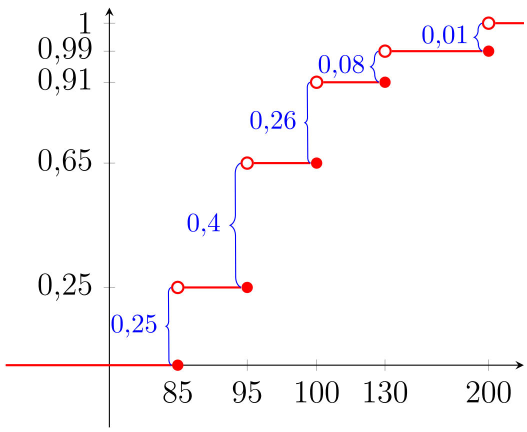
(a) ξ értékkészletét és eloszlását,
(b) ξ eloszlásfüggvényét, majd ábrázoljuk is,
(c) $E(\xi)$–t
(d) $D(\xi)$–t.

Megoldás.

(a) $R_\xi = \{85, 95, 100, 130, 200\}$

x_i	85	95	100	130	200
p_i	0,25	0,4	0,26	0,08	0,01

(b)



(c) $200 \cdot 0{,}01 + 130 \cdot 0{,}08 + 100 \cdot 0{,}26 + 95 \cdot 0{,}4 + 85 \cdot 0{,}25$
(d) 232,73

8. Feladat. Egy betegséget 1% valószínűséggel kapunk el. Egy teszt 1000 dollárba kerül, így 10 független mintát összeöntve hatékonyabb 1 tesztet végezni. Ha a teszt negatív, mind a tíz fő egészséges. Jelölje a ξ véletlen változó a szükséges tesztek számát tíz fő esetén. Határozzuk meg

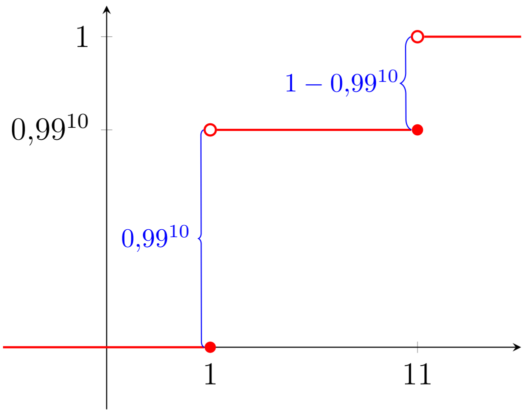
(a) ξ értékkészletét és eloszlását,
(b) ξ eloszlásfüggvényét, majd ábrázoljuk is,
(c) $\mathrm{E}(\xi)$–t,
(d) $\mathrm{D}(\xi)$–t,
(e) az egy főre számított átlagos tesztköltséget.

Megoldás.

(a) $R_\xi = \{1, 11\}$

x_i	1	11
p_i	$0,99^{10}$	$1 - 0,99^{10}$

(b)



(c) 2

(d) 3

(e) 200 dollár

9. Feladat. Biztosítást szeretnénk kötni egy 9 millió forint értékű lakóházra. Tegyük fel, hogy az elkövetkezendő egy évben 99,9% valószínűséggel nem lesz kárunk, és 0,1% eséllyel teljesen leég a ház. Ha van biztosításunk, akkor a biztosító a keletkezett kárt teljes mértékben megtéríti.

(a) Mi az a minimális biztosítási díj, amit a biztosító ki fog majd szabni ránk?
(b) Ha a vagyoni helyzetünket az $u(x) = \sqrt{x}$ hasznossági függvényen keresztül értékeljük, akkor racionálisan gondolkodó fogyasztóként mi az a maximális összeg, amit még hajlandóak vagyunk kifizetni ezért a biztosításért?

Megoldás.

(a) 9.000

(b) 17.238

Kvízek

A csoport

1. Feladat. Jelölje a ξ véletlen változó egy MM1 kvízen elért pontszámot. A ξ változó eloszlását a jobb oldali táblázat írja le.

x_i	0	1	2	3
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	0,3	0,4	0,2	0,1

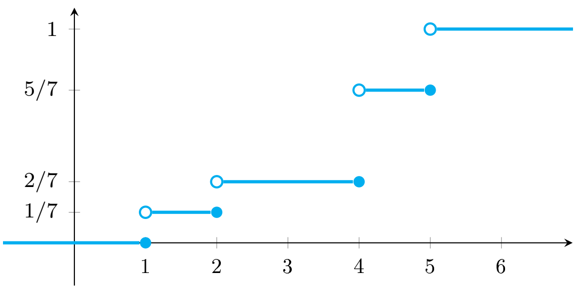
(a) Rajzoljuk fel ξ eloszlásfüggvényét.
(b) Határozzuk meg a következő események valószínűségét.
A =Algernonnak kevesebb, mint két pontot sikerül elérnie a dolgozatban.
B =Barakony szerez pontot a dolgozatban.
(c) Cipriána várhatóan hány pontot szerez?

2. Feladat. Evelin könyvelőirodájában három könyvelő dolgozik. Felvesznek egy új kollégát, Pistit. Pisti még tapasztalatlan a munkában, az adóbevallások 10%–át elrontja, míg a tapasztalt kollégái csak 3% valószínűséggel rontanak el egy adóbevallást. Mindegyikük ugyanolyan intenzitással dolgozik, egységnyi idő alatt ugyanannyi adóbevallást töltenek ki. A NAV ellenőrző bizottsága véletlenszerűen kiválaszt egy adóbevallást.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy ezt a kiválasztott adóbevallást rosszul töltötték ki?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy ezt az adóbevallást az új kolléga töltötte ki, feltéve hogy az adóbevallás rossz?

B csoport

1. Feladat. A jobb oldali ábrán egy cinkelt dobókocka eloszlásfüggvényét láthatjuk.



(a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy dobás értéke páros?
(b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy dobás értéke 1 és 5 között van?
(c) Mekkora az esélye, hogy a dobás értéke legalább 3?

2. Feladat. Egy gyárban három nagy teljesítményű dízelmotor üzemel, melyek egy adott időpontban egymástól függetlenül 0,5, 0,6 illetve 0,7 valószínűséggel működnek.

(a) Adjuk meg az egy időpontban működő motorok számának szórását.
(b) Amennyiben egy adott időpillanatban x dízelmotor üzelem, akkor a dolgozókat $50 + 20x$ dB zajterhelés éri. Határozzuk meg a zajterhelés átlagos értékét.

C csoport

Feladat. Tegnapelőtt Zekő és Vitold nagyanyjuk Giszmunda padlásán rengeteg forgalomból kivont 1 Ft–os érmét talált, amit igazságosan megfeleztek. Ma ebéd után meglepődve tapasztalták, hogy nincs net. A telefonos ügyintéző azt mondta, hogy kábelszakadás történt, így estig esély sincs, hogy helyreálljon a garantáltan 10Mb–es sebességű szolgáltatás. Így biztosan lemaradnak az esti *raid*–ről, továbbá egyikőjüknek sincs barátnője, sajnos a tv előfizetést is már évekkel ezelőtt lemondták. Unalmukban a következő játékot játsszák. Feldobnak 4 pénzérmét. Ha a földre eső érmék közül páros sok mutat fejet, akkor Zekő fizet Vitoldnak, ellenkező esetben fordítva. A nyeremény a dobott fejek számának megfelelő számú érme. Jelölje ξ Vitold nyereményét egy játszma után.

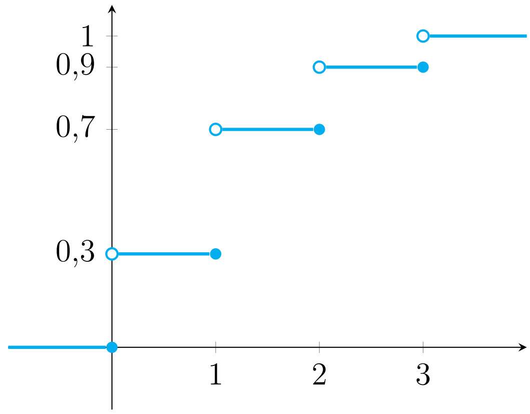
(a) Ábrázoljuk ξ eloszlását.
(b) Igazságos–e a játék?
(c) Mekkora a valószínűsége, hogy Vitold a lehető legkevesebb játékkal nyer 20 érmét?
(d) Várhatóan hány játékot kell lefolytatni, hogy Vitoldnak legyen 2 nyert érméje?

Kvízek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása.

(a)



(b) A grafikon alapján

$$P(A) = P(\xi < 2) = F_\xi(2) = 0{,}7\,.$$ 1 pt

Továbbá

$$P(B) = P(\xi > 0) = 1 - P(\xi \le 0) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi < 0))$$
$$= 1 - (p_0 + F_\xi(0)) = 1 - (0{,}3 + 0) = 0{,}7\,.$$

(c)

$$E(\xi) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1\,.$$

2. Feladat megoldása. Legyen

A = A kiválasztott adóbevallást rosszul töltötték ki.
B = A kiválasztott adóbevallást Pisti töltötte ki.

Az adatok alapján

$$P(A\,|\,B) = 0{,}1 \quad P(A\,|\,\overline{B}) = 0{,}03 \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad P(\overline{B}) = \frac{3}{4}\,.$$ 2 pt

(a) A teljes valószínűség tétele szerint

$$P(A) = P(A\,|\,B)\,P(B) + P(A\,|\,\overline{B})\,P(\overline{B}) = 0{,}1 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}03 \cdot \frac{3}{4}\,.$$

(b) A Bayes–formula alapján

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A\,|\,B)\,P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}1 \cdot \frac{1}{4}}{0{,}1 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}03 \cdot \frac{3}{4}}\,.$$ 3 pt

B csoport

1. Feladat megoldása. Jelöljük ξ–vel a dobás eredményének megfelelő valószínűségi változót. Ekkor az ábra alapján

(a)
$$\mathrm{P}(\text{a dobás páros}) = \mathrm{P}(\xi = 2) + \mathrm{P}(\xi = 4) + \mathrm{P}(\xi = 6) = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} + 0\,.$$

(b)
$$\mathrm{P}(1 < \xi < 5) = \mathrm{P}(\xi = 2) + \mathrm{P}(\xi = 3) + \mathrm{P}(\xi = 4) = \frac{1}{7} + 0 + \frac{3}{7}\,.$$

(c)
$$\mathrm{P}(\xi \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(\xi < 3) = 1 - F_\xi(3) = 1 - \frac{2}{7}\,.$$
1 pt

2. Feladat megoldása. Jelölje ξ az egyszerre működő motorok számát. Legyen

$$\begin{aligned} A &= \text{Az első gép működik.} \\ B &= \text{A második gép működik.} \\ C &= \text{A harmadik gép működik.} \end{aligned}$$

Ekkor $\mathrm{P}(A) = 0{,}5$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}6$ és $\mathrm{P}(C) = 0{,}7$.

(a) A függetlenség miatt

$$\begin{aligned} p_0 &= \mathrm{P}(\xi = 0) = \mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{B}) \cdot \mathrm{P}(\overline{C}) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 \\ p_1 &= \mathrm{P}(\xi = 1) = \mathrm{P}(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + \mathrm{P}(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + \mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \\ &\phantom{= \mathrm{P}(\xi = 1)} = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 \\ p_2 &= \mathrm{P}(\xi = 2) = \mathrm{P}(A \cap B \cap \overline{C}) + \mathrm{P}(\overline{A} \cap B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B} \cap C) \\ &\phantom{= \mathrm{P}(\xi = 2)} = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 \\ p_3 &= \mathrm{P}(\xi = 3) = \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 \end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\xi) &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 \qquad \text{és} \\ \mathrm{E}(\xi^2) &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 + 9 \cdot p_3, \end{aligned}$$
2 pt

amiből

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2(\xi) &= \mathrm{E}(\xi^2) - \mathrm{E}(\xi)^2 = p_1 + 4p_2 + 9p_3 - (p_1 + 2p_2 + 3p_3)^2 \qquad \text{és} \\ \mathrm{D}(\xi) &= \sqrt{p_1 + 4p_2 + 9p_3 - (p_1 + 2p_2 + 3p_3)^2}. \end{aligned}$$

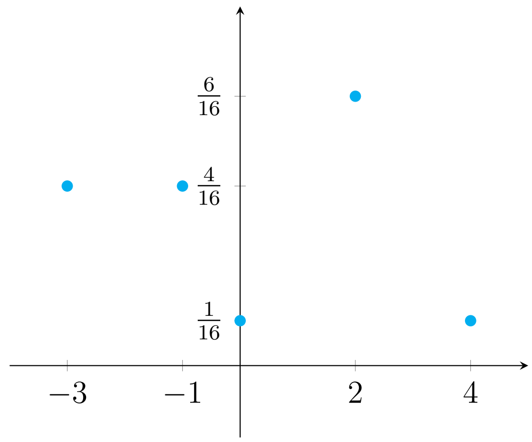
(b)
$$\mathrm{E}(50 + 20\xi) = 50 + 20\,\mathrm{E}(\xi) = 50 + 20(p_1 + 2p_2 + 3p_3)$$
3 pt

C csoport

Feladat megoldása. Ha Vitold veszít, akkor a nyereményét negatív előjellel számoljuk, ezért ξ lehetséges értékei 0, −1, 2, −3 és 4.

(a) Az összes esetek száma $2^4 = 16$. Azon esetek száma amikor k darab fej van $\binom{4}{k}$. Így

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{4}{0}}{16} = \frac{1}{16},$$
$$P(\xi = -1) = \frac{\binom{4}{1}}{16} = \frac{4}{16},$$
$$P(\xi = 2) = \frac{\binom{4}{2}}{16} = \frac{6}{16},$$
$$P(\xi = -3) = \frac{\binom{4}{3}}{16} = \frac{4}{16},$$
$$P(\xi = 4) = \frac{\binom{4}{4}}{16} = \frac{1}{16}.$$



1 pt

(b) Mivel

$$E(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{16} - 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} - 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 0,$$

ezért a játék igazságos. 2 pt

(c) Leggyorsabban akkor nyer 20 érmét, ha az első 5 játék mindegyikét úgy nyeri meg, hogy mind a 4 érme fej, ennek az esélye

$$\left(\frac{1}{16}\right)^5.$$

(d) Vitold várható nyeresége n játszma után $E(n \cdot \xi)$, de

$$E(n \cdot \xi) = n \cdot E(\xi) = 0,$$

ezért Vitold várhatóan sose fog 2 nyert pénzérmével büszkélkedni. 3 pt

11.

Nevezetes diszkrét eloszlások; kovariancia, korreláció

Házi feladatok

Nevezetes diszkrét eloszlások

Eloszlás	$\mathrm{P}(\xi = k)$		$\mathrm{E}(\xi)$	$\mathrm{D}^2(\xi)$
Bernoulli (p)	$P(\xi = 0) = 1 - p\,,$	$P(\xi = 1) = p$	p	$p(1-p)$
Binomiális (n, p)	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$k = 0, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
Geometriai (p)	$(1-p)^{k-1} p$	$k = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Hipergeometrikus (N, K, n)	$\dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$k = 0, \ldots, n,$ $K < N,$ $n < N$	$\dfrac{nK}{N}$	$\dfrac{(KN - K^2)(Nn - n^2)}{N^3 - N^2}$
Poisson (λ)	$\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$k = 0, 1, 2, \ldots$ $\lambda > 0$	λ	λ

1. Feladat. Manszvét és kisöccse Melkisédek azt játsszák, hogy feldobnak három szabályos dobókockát. Melkisédek akkor nyer a játékban, ha a dobott értékek között van egyforma. Melkisédeknek nagyon tetszik a játék, ezért már a 20. kört játsszák.

(a) Adjuk meg Melkisédek nyerésének valószínűségét.
(b) Várhatóan hányszor nyert Melkisédek és mennyi a szórása a nyerések számának?
(c) Mennyi a valószínűsége, hogy Melkisédek legfeljebb egyszer veszített?
(d) Mennyi a valószínűsége, hogy Melkisédek több mint háromszor, de kevesebb, mint hatszor nyert?

Megoldás. Jelölje ξ Melkisédek nyerésének számát egy játék során, ekkor ξ *Bernoulli–eloszlást* követ. Ha mindhárom kockán különböző érték szerepel, akkor Melkisédek veszít, azaz $\xi = 0$, ennek a valószínűsége

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} \qquad = \frac{5}{9}\,.$$

Különben nyer,

$$\mathrm{P}(\xi = 1) = 1 - \mathrm{P}(\xi = 0) = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} \qquad = \frac{4}{9}\,,$$

ezért a Bernoulli–eloszlás paramétere $p = \frac{4}{9}$.

Jelölje η Melkisédek nyeréseinek számát húsz játékból. Mivel a nyerési esély egymástól függetlenül minden játékban ugyanannyi, $p = \frac{4}{9}$, ezért η *binomiális eloszlást* követ $n = 20$ és $p = \frac{4}{9}$ paraméterekkel.

(a) Így

$$\mathrm{P}(\eta = k) = \binom{20}{k} \left(\frac{4}{9}\right)^k \left(\frac{5}{9}\right)^{20-k}, \qquad k = 0, \dots, 20\,.$$

(b) Továbbá

$$\mathrm{E}(\eta) = np = 20 \cdot \frac{4}{9} \qquad \approx 8{,}889\,,$$

azaz várhatóan kilencszer nyert.
A szórás

$$\mathrm{D}(\eta) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{20 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9}} \qquad \approx 2{,}222\,.$$

(c) Ha legfeljebb csak egyszer veszít, akkor legalább 19–szer nyernie kell, azaz a keresett valószínűség

$$\mathrm{P}(\eta \geq 19) = \mathrm{P}(\eta = 19) + \mathrm{P}(\eta = 20) = 20 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{19} \cdot \frac{5}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^{20} \qquad \approx 0{,}00000235\,.$$

(d) Ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(3 < \eta < 6) &= \mathrm{P}(\eta = 4) + \mathrm{P}(\eta = 5) \\ &= \binom{20}{4} \left(\frac{4}{9}\right)^4 \left(\frac{5}{9}\right)^{16} + \binom{20}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^5 \left(\frac{5}{9}\right)^{15} \qquad \approx 0{,}0873\,.\end{aligned}$$

2. Feladat. Bonaventúra elhatározta, hogy a valószínűségszámítás vizsga 20 tétele közül csak az első ötöt tanulja meg, és ha nem ezen tételek valamelyikét húzza (csak egyet kell húzni), akkor visszaadja a tételt. Hosszú évek tapasztalata azt mutatja, hogy ha megtanult tételt húz, akkor 80% eséllyel átmegy a vizsgán. Továbbá a vizsgáztató volt olyan kedves, hogy megengedte Bonaventúrának, hogy akárhányszor vizsgázhasson ebben a félévben. Jelölje ξ azt, hogy hányadik alkalomra sikerül a vizsgát teljesítenie.

(a) Adjuk meg ξ eloszlását.
(b) Várhatóan hány sikertelen vizsgája lesz Bonaventúrának ebből a tárgyból?

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy négynél többször kell vizsgáznia?
(d) Bonaventúra a 407,6 km–re lévő Lickóvadamosról utazik be vizsgázni, így minden egyes vizsgaalkalom 5.600 forintjába kerül. Várhatóan mennyibe fog kerülni neki ez a sok vizsgaismétlés?

Megoldás. Annak a valószínűsége, hogy Bonaventúra egy tetszőleges alkalommal teljesíti a vizsgát

$$p = \frac{5}{20} \cdot 0{,}8 = \frac{1}{5}\,,$$

így egy próbálkozás sikeressége a $p = \frac{1}{5}$ paraméterű Bernoulli–eloszlással írható le.

Mivel ξ az *első* sikeres vizsga *bekövetkezéséig* szükséges próbálkozások számát adja, ezért ξ *geometriai eloszlást* követ a $p = \frac{1}{5}$ paraméterrel.

(a) Így ξ valószínűségeloszlása

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

(b) Várhatóan

$$\mathrm{E}(\xi) = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

alakalommal kell elmennie vizsgázni, ahhoz, hogy sikerrel járjon, így 4 sikertelen vizsgára számíthat.

(c) A keresett valószínűség

$$\mathrm{P}(\xi > 4) = \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4^4}{5^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} \qquad = 0{,}4096\,.$$

MEGJEGYZÉS. Pontosan akkor kell 4–nél többször vizsgáznia, ha az első 4 vizsgán megbukott, így

$$\mathrm{P}(\xi > 4) = \left(\frac{4}{5}\right)^4.$$

✠

(d) Az $\mathrm{E}(5600\xi)$ értéket keressük, amely a várható érték linearitása miatt

$$\mathrm{E}(5.600\xi) = 5.600\,\mathrm{E}(\xi) = 5.600 \cdot 5 = 28.000\,.$$

3. Feladat. A Kalkulus I. vizsgára készülő Evariszt se szeret annyira tanulni. Elhatározza, hogy az 50 definícióból csak 10–et tanul meg, de azokat legalább hibátlanul le is tudja írni. A vizsga előtti beugrón az 50 definícióból csak ötöt fognak kérdezni.

(a) Adjuk meg annak az eloszlását, hogy hány olyan definíciót kérdeznek Evarisztól a beugrón, amit megtanult.
(b) Várhatóan hány definíciót fog tudni Evariszt a beugró kérdései közül?
(c) Mekkora eséllyel mehet vizsgázni, ha a sikeres beugróhoz legalább két definíciót hibátlanul kell tudni?

Megoldás. A beugrón $N=50$ definíció van, ebből Evariszt csak $K=10$–et tanult meg, de azokat legalább hibátlanul. Az 50 definícióból az oktató a beugróra $n=5$–öt *választ ki* véletlenszerűen *visszatevés nélkül.* Jelölje ξ azoknak a beugrón kérdezett definícióknak a számát, melyeket Evariszt megtanult. Ekkor ξ *hipergeometrikus* eloszlást követ.

(a) Így ξ valószínűségeloszlása

$$\mathrm{P}(\xi = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{40}{5-k}}{\binom{50}{5}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\,.$$

(b) A beugrón várhatóan csak

$$\mathrm{E}(\xi) = 5 \cdot \frac{10}{50} = 1$$

definíciót fog tudni.

(c)

$$\mathrm{P}(\xi \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(\xi < 2) = 1 - \big(\mathrm{P}(\xi = 0) + \mathrm{P}(\xi = 1)\big)$$
$$= 1 - \left(\frac{\binom{40}{5}}{\binom{50}{5}} + \frac{10 \cdot \binom{40}{4}}{\binom{50}{5}}\right) \qquad \approx 0{,}258$$

4. Feladat. Egy adatszerverre érkező lekérdezések száma Poisson–eloszlást követ. Tudjuk, hogy 0,2 annak a valószínűsége, hogy egy óra alatt nem érkezik lekérdezés az adatszerverre.

(a) Mennyi a lekérdezések számának óránkénti várható értéke?
(b) Mennyi a 20 percre jutó lekérdezések számának szórása?
(c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 20 perc alatt legalább 1, de kevesebb, mint 3 lekérdezés történik?

Megoldás. Jelölje ξ az egy óra alatt beérkezett lekérdezések számát. Felhasználva a Poisson–eloszlás valószínűségeloszlását, kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = e^{-\lambda} = 0{,}2\,,$$

azaz a ξ eloszlás paramétere

$$\lambda = -\ln 0{,}2 = \ln 5 \qquad \approx 1{,}61\,.$$

(a) Ezek alapján a lekérdezések számának óránkénti várható értéke

$$\mathrm{E}(\xi) = \ln 5\,.$$

(b) Jelölje η a 20 perc, azaz $\frac{1}{3}$ óra alatt beérkező lekérdezések számát. Mivel η is Poisson–eloszlást követ, és várhatóan $\frac{\ln 5}{3}$ lekérdezés fut be 20 perc alatt, ezért η paramétere

$$\lambda = \frac{\ln 5}{3} \qquad \approx 0{,}536\,.$$

Ezek alapján a szórása

$$\mathrm{D}(\eta) = \sqrt{\frac{\ln 5}{3}} \qquad \approx 0{,}732\,.$$

(c) Az η valószínűségeloszlása alapján

$$\mathrm{P}(1 \leq \eta < 3) = \mathrm{P}(\eta = 1) + \mathrm{P}(\eta = 2) = \frac{\ln 5}{3} e^{-\frac{\ln 5}{3}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 5}{3}\right)^2 e^{-\frac{\ln 5}{3}} \qquad \approx 0{,}398\,.$$

Kovariancia és korreláció

- *A ξ és η diszkrét valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*
$$P(\xi = x,\ \eta = y) = P(\xi = x) \cdot P(\eta = y)\,.$$
- *A ξ és η valószínűségi változók kovarianciája*
$$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathrm{E}(\xi\eta) - \mathrm{E}(\xi)\,\mathrm{E}(\eta)\,,$$
korrelációs együtthatója
$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta)}{\mathrm{D}(\xi) \cdot \mathrm{D}(\eta)}\,.$$
- *Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor* $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 0$, $\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0$ *és*
$$\mathrm{D}^2(\xi + \eta) = \mathrm{D}^2(\xi) + \mathrm{D}^2(\eta)\,.$$

5. Feladat. Az egyik amerikai egyetemen a '60–as években azt vizsgálták, hogy az LSD hogyan hat a matematikai teljesítményre. A vizsga előtt fél órával véletlenszerűen három részre bontották a csoportot: az első csoport nem kapott semmit ($\eta = 0$), a második egy ($\eta = 1$), a harmadik pedig fejenként két ($\eta = 2$) darab 1 mg–os LSD tablettát kapott. (Már 20 mikrogrammnak is érezhető hatása van.) A kísérletben csak azt nézték, hogy a hallgató átment ($\xi = 1$) vagy megbukott ($\xi = 0$) a vizsgán. Százalékosan kifejezve a következő eredmény született:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2
0	13	23	14
1	19	11	20

(a) Írjuk fel ξ és η százalékos eloszlását, várható értékét és szórását külön-külön.
(b) Írjuk fel $\xi \cdot \eta$ százalékos eloszlását és várható értékét. Adjuk meg ξ és η kovarianciáját és korrelációs együtthatóját.
(c) Ha egy véletlenszerűen választott résztvevőről tudjuk, hogy sikerült a vizsgája, akkor mekkora valószínűséggel kapott két tablettát? Független–e egymástól a két véletlen változó?

Megoldás.

(a) A ξ véletlen változó százalékos eloszlását a táblázat sorainak összegzésével kapjuk.

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	%
0	13	23	14	50
1	19	11	20	50
				100

Így ξ várható értéke
$$\mathrm{E}(\xi) = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 \qquad = 0{,}5\,,$$
második momentuma
$$\mathrm{E}\left(\xi^2\right) = 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}5 \qquad = 0{,}5\,,$$
szórása pedig
$$\mathrm{D}(\xi) = \sqrt{\mathrm{E}\left(\xi^2\right) - \mathrm{E}^2(\xi)} = \sqrt{0{,}25} \qquad = 0{,}5\,.$$

Az η százalékos eloszlásához az oszlopok szerint összegzünk.

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	%
0	13	23	14	50
1	19	11	20	50
%	32	34	34	100

Innen η várható értéke

$$E(\eta) = 0 \cdot 0{,}32 + 1 \cdot 0{,}34 + 2 \cdot 0{,}34 \qquad = 1{,}02\,,$$

második momentuma

$$E\left(\eta^2\right) = 0^2 \cdot 0{,}32 + 1^2 \cdot 0{,}34 + 2^2 \cdot 0{,}34 \qquad = 1{,}7\,,$$

és így szórása

$$D(\eta) = \sqrt{E\left(\eta^2\right) - E^2(\eta)} \qquad \approx 0{,}812\,.$$

(b) A $\xi \cdot \eta$ százalékos eloszlása

$\xi \setminus \eta$	0	1	2
0	13	23	14
1	19	11	20

alapján

$\xi \cdot \eta$	0	1	2
%	69	11	20

Így $\xi \cdot \eta$ várható értéke

$$E(\xi \cdot \eta) = 0 \cdot 0{,}69 + 1 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}2 \qquad = 0{,}51\,.$$

Ezek alapján ξ és η kovarianciája

$$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = E(\xi \cdot \eta) - E(\xi)\, E(\eta) = 0{,}51 - 0{,}5 \cdot 1{,}02 \qquad = 0\,.$$

Ezért a korrelációs együttható is nulla,

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) = 0\,,$$

azaz ξ és η korrelálatlan, nincs közöttük lineáris kapcsolat.

(c) A feltételes valószínűség definíciója és a táblázat alapján

$$P(\xi = 1 \,|\, \eta = 2) = \frac{P\left(\xi = 1,\ \eta = 2\right)}{P(\eta = 2)} = \frac{0{,}2}{0{,}34} \qquad \approx 0{,}588\,.$$

Jól láthatóan

$$P(\xi = 1,\ \eta = 2) \neq P(\xi = 1)\, P(\eta = 2)\,, \quad \text{ugyanis}$$
$$0,2 \neq 0{,}5 \cdot 0{,}34\,,$$

azaz ξ és η nem függetlenek.

Megjegyzés. A korrelálatlanságból nem következik a függetlenség. ✠

6. Feladat. Az informatikus hallgatók elmúlt 20 év Kalkulus I. (ξ) és Diszkrét matematika I. (η) tanulmányi eredményeit a rendelkezésre álló több mint 6.000 adatpár alapján értékelve az együttes eloszlásukra százalékban kifejezve a következő táblázatot kaptuk.

$\xi \setminus \eta$	1	2	3	4	5
1	19	5	16	0	0
2	1	29	7	3	0
3	0	1	7	5	1
4	0	0	1	0	3
5	0	0	1	0	1

Adjuk meg ξ és η kovarianciáját és korrelációs együtthatóját. Milyen kapcsolat van a két érdemjegy között?

Megoldás. Az együttes eloszlás ismeretében a Kalkulus I. és a Diszkrét matematika I. százalékos eloszlását a következő táblázat adja.

$\xi \setminus \eta$	1	2	3	4	5	%
1	19	5	16	0	0	40
2	1	29	7	3	0	40
3	0	1	7	5	1	14
4	0	0	1	0	3	4
5	0	0	1	0	1	2
%	20	35	32	8	5	100

Ezek alapján ξ várható értéke

$$\mathrm{E}(\xi) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}14 + 4 \cdot 0{,}04 + 5 \cdot 0{,}02 \qquad = 1{,}88\,,$$

második momentuma

$$\mathrm{E}(\xi^2) = 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}4 + 3^2 \cdot 0{,}14 + 4^2 \cdot 0{,}04 + 5^2 \cdot 0{,}02 \qquad = 4{,}4\,,$$

szórása pedig

$$\mathrm{D}(\xi) = \sqrt{\mathrm{E}\left(\xi^2\right) - \mathrm{E}^2(\xi)} = \sqrt{0{,}8656} \qquad \approx 0{,}9304\,.$$

Hasonlóan, η várható értéke

$$\mathrm{E}(\eta) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}35 + 3 \cdot 0{,}32 + 4 \cdot 0{,}08 + 5 \cdot 0{,}05 \qquad = 2{,}43\,,$$

második momentuma

$$\mathrm{E}\left(\eta^2\right) = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}35 + 3^2 \cdot 0{,}32 + 4^2 \cdot 0{,}08 + 5^2 \cdot 0{,}05 \qquad = 7{,}01\,,$$

szórása

$$\mathrm{D}(\eta) = \sqrt{\mathrm{E}\left(\eta^2\right) - \mathrm{E}^2(\eta)} = \sqrt{1{,}1051} \qquad \approx 1{,}05\,.$$

A $\xi \cdot \eta$ százalékos eloszlása a táblázat alapján a következő.

$\xi \cdot \eta$	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	20	25
%	19	6	16	29	0	8	3	7	0	6	2	0	3	1

Így $\xi \cdot \eta$ várható értéke

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\xi\eta) &= 1 \cdot 0{,}19 + 2 \cdot 0{,}06 + 3 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}29 + 6 \cdot 0{,}08 + 8 \cdot 0{,}03 \\ &\quad + 9 \cdot 0{,}07 + 12 \cdot 0{,}06 + 15 \cdot 0{,}02 + 20 \cdot 0{,}03 + 25 \cdot 0{,}01 \qquad = 5{,}17\,.\end{aligned}$$

Ezek alapján ξ és η kovarianciája

$$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathrm{E}(\xi \cdot \eta) - \mathrm{E}(\xi)\,\mathrm{E}(\eta) = 5{,}17 - 1{,}88 \cdot 2{,}43 \qquad = 0{,}6016$$

és korrelációs együtthatója

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta)}{\mathrm{D}(\xi) \cdot \mathrm{D}(\eta)} \qquad \approx 0{,}616\,.$$

A két jegy között pozitív irányú, közepes erősségű lineáris kapcsolat van.

Videók

Nevezetes diszkrét eloszlások

Oldjuk meg a következő feladatokat.

1. Feladat.

(a) Szabályos dobókockával egyszer dobunk. Jelöljük a dobott szám értékét a ξ véletlen változóval. Milyen értékeket vehet fel ξ, és ezeket milyen valószínűséggel veszi fel?

(b) Jelöljük ξ véletlen változóval azt, hogy egy ember a hét mely napján született. Milyen értékeket vehet fel ξ, és ezeket milyen valószínűséggel veszi fel?

(c) Egy pénzérme egyszeri feldobásnál jelöljük a kimenetelt a ξ véletlen változóval. Milyen értékeket vehet fel ξ, és ezeket milyen valószínűséggel veszi fel?

(d) Az urnában lévő 20 golyó közül 16 piros és 4 kék. Egy golyót húzunk. Legyen a ξ véletlen változó értéke 1, ha kéket húztunk, és 0, ha pirosat. Milyen valószínűséggel veszi fel ξ a 0–át illetve az 1–et?

(e) Egy nem szabályos pénzérme egyszeri feldobásánál a fej valószínűsége legyen p. Jelöljük a ξ valószínűségi változó a kimenetelt. Milyen értékeket vehet fel ξ, és ezeket milyen valószínűséggel veszi fel?

Megoldás.

(a) ξ lehetséges értékei: $\{1, 2, \ldots, 6\}$; $P(\xi = k) = \frac{1}{6}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$, egyenletes eloszlás.

(b) ξ lehetséges értékei: $\{1, 2, \ldots, 7\}$; $P(\xi = k) = \frac{1}{7}$, $k = 1, 2, \ldots, 7$, egyenletes eloszlás.

(c) ξ lehetséges értékei: $\{0, 1\}$; $P(\xi = 0) = P(\xi = 1) = \frac{1}{2}$, egyenletes eloszlás.

(d) ξ lehetséges értékei: $\{0, 1\}$; $P(\xi = 0) = \frac{16}{20}$, $P(\xi = 1) = \frac{4}{20}$, Bernoulli–eloszlás.

(e) ξ lehetséges értékei: $\{0, 1\}$; $P(\xi = 0) = p$, $P(\xi = 1) = 1 - p$, Bernoulli–eloszlás.

2. Feladat. (a) Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Jelölje ξ azt, hogy hányszor kapunk páratlan számot. Határozzuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 10 dobásból pontosan annyi páratlan értéket kapunk, mint párosat?

(b) Ötször feldobunk két dobókockát. Jelölje η azt, hogy hányszor dobtunk két páratlan számot. Határozzuk meg η eloszlását és várható értékét.

Megoldás.

(a)

$\mathrm{P}(\xi = k) = \binom{10}{k}\frac{1}{2^{10}}$ $\quad \mathrm{E}(\xi) = 5$ $\quad \mathrm{D}(\xi) = \sqrt{\frac{5}{2}}$ $\quad \mathrm{P}(\xi = 5) = \binom{10}{5}\frac{1}{2^{10}}$

(b) $\mathrm{P}(\eta = k) = \binom{5}{k}\frac{3^{5-k}}{4^5}$ $\quad \mathrm{E}(\xi) = \frac{5}{4}$ $\quad \mathrm{D}(\xi) = \sqrt{\frac{15}{16}}$

3. Feladat.

(a) Az urnában lévő 20 golyó közül 16 piros és 4 kék. Visszatevés nélkül 3 golyót kiválasztva, jelölje a ξ véletlen változó a kék golyók számát. Milyen értékeket vehet fel ξ, és ezeket milyen valószínűséggel veszi fel?

(b) Az urnában lévő 20 golyó közül 16 piros és 4 kék. Visszatevéssel 3 golyót kiválasztva, jelölje a ξ véletlen változó a kék golyók számát. Milyen értékeket vehet fel ξ, és ezeket milyen valószínűséggel veszi fel?

(c) Két kockával n–szer dobtunk. Jelölje az η véletlen változó azt, hogy hányszor lett a dobott számok összege 7. Milyen értékeket vehet fel η, és ezeket milyen valószínűséggel veszi fel?

Megoldás.

(a) $R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$;

$$P(\xi = 0) = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18}, \quad P(\xi = 1) = \frac{16 \cdot 15 \cdot 12}{20 \cdot 19 \cdot 18}, \quad P(\xi = 2) = \frac{16 \cdot 3 \cdot 12}{20 \cdot 19 \cdot 18},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{20 \cdot 19 \cdot 18},$$ hipergeometrikus eloszlás.

(b) $R_\xi = \{0, 1, 2, 3\}$;

$P(\xi = 0) = \frac{64}{125}$, $P(\xi = 1) = \frac{48}{125}$, $P(\xi = 2) = \frac{16}{125}$, $P(\xi = 3) = \frac{1}{125}$, binomiális eloszlás.

(c) $R_\eta = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$; $\quad P(\eta = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, binomiális eloszlás.

4. Feladat.

(a) Az urnában lévő 20 golyó közül 16 piros és 4 kék. Visszatevéssel addig húzunk, amíg nem húztunk kéket. Jelölje a ξ véletlen változó azt, hogy hányadik húzásra húztunk kéket. Milyen értékeket vehet fel ξ, és ezeket milyen valószínűséggel veszi fel?

A hídon egy óra alatt áthaladó autók száma Poisson–eloszlást követ $\lambda = 200$ paraméterrel. Mennyi a valószínűsége, hogy

(b) 3 perc alatt 8 autó halad át,

(c) 2 perc alatt legalább 8 autó halad át?

Megoldás.

(a) $R_\xi = \{1, 2, 3, \dots\}$; $P(\xi = k) = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5}$, $k \in \mathbb{N}$, geometriai eloszlás.

(b) $\frac{10^8}{8!} \cdot e^{-10}$, Poisson–eloszlás.

(c) $1 - \sum_{k=0}^{7} \frac{\left(\frac{20}{3}\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{20}{3}}$, Poisson–eloszlás.

5. Feladat. Egy csatában az egyik harcoló fél ejtőernyőkkel próbál utánpótlást eljuttatni egy körbevett alakulathoz. Az erős szél miatt az ejtőernyők egymástól függetlenül és véletlenszerű helyen érnek földet a 15 km2 területű csatatéren. Az alakulat egy 1 km^2 területű magaslaton védekezik, és az utánpótlást csak akkor kapják meg, ha az ernyő ezen a magaslaton ér földet. Éppen ezért a vezérkar addig dob le újabb és újabb ejtőernyőket, míg valamelyiket meg nem szerzi az alakulat.

(a) Mennyi annak az esélye, hogy pontosan öt ejtőernyőt kell majd ledobni?
(b) Mi a valószínűsége annak, hogy ötnél több ledobásra lesz majd szükség?
(c) Várhatóan hány ejtőernyőt kell ledobni?
(d) Mennyi a ledobott ernyők szórása?

Megoldás.

(a) $\frac{1}{15} \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^4$ (b) $\left(\frac{14}{15}\right)^5$ (c) 15 (d) $\frac{\sqrt{14/15}}{1/15}$

6. Feladat. Egy szelvénnyel játszunk a Skandináv lottón, ahol 35 számból 7-et kell megjelölni. A szabályok szerint a számok két sorsoláson is részt vesznek, egy gépin és egy kézin, ez az úgynevezett ikersorsolás. Mindkét számsorsolás alkalmával 7 számot húznak ki, és akkor nyerünk pénzt, ha valamelyik sorsoláson elérünk legalább 4 találatot.

(a) Mennyi annak az esélye, hogy a gépi sorsoláson pontosan 4 találatot érünk el? Mekkora valószínűséggel érünk el legalább 4 találatot? Mennyi a gépi sorsoláson a találatok számának a várható értéke?
(b) Mennyi annak az esélye, hogy a két sorsolás közül az egyiken nincs találatunk, a másikon pedig pontosan 1 találatot érünk el? Mekkora annak a valószínűsége, hogy valamelyik soroláson lesz legalább 4 találatunk, tehát nyerünk pénzt?

Megoldás. YouTube

(a) $\dfrac{\binom{7}{4}\cdot\binom{28}{3}}{\binom{35}{7}}$ $\dfrac{49}{35}$ $\approx 0{,}018$

(b) $\approx 0{,}138$ $\approx 0{,}034$

7. Feladat. Orvosi kutatások szerint az egységnyi nagyságú radioaktív besugárzás véletlen számú mutációt okoz egy kromoszómán. A mutációk száma Poisson-eloszlást követ, és a besugárzások 13,5 százalékában nem történik egy mutáció sem.

(a) Az egységnyi nagyságú besugárzás átlagosan hány mutációt okoz?
(b) Mennyi annak az esélye, hogy a besugárzás hatására a várható értéknél több mutáció történik?

Megoldás. YouTube

(a) 2 (b) $\approx 0{,}68$

8. Feladat. Feldobok egy szabályos dobókockát, és legyen ξ a dobott érték kettővel, η pedig a dobott érték hárommal vett maradéka. Adjuk meg a két változó együttes eloszlását és korrelációs együtthatóját. Független egymástól a ξ és az η változó?

Megoldás. YouTube

9. Feladat. Egy vállalat egy hónapra eső nyeresége a havi teljes bevétel és a havi teljes kiadás különbségeként áll elő, ahol a bevétel és a kiadás is valószínűségi változó. A bevétel várható értéke 120 millió forint 30 millió forint szórással, míg a kiadás várható értéke 80 millió forint 20 millió forint szórással, és tegyük fel, hogy a bevétel és a kiadás közötti korrelációs együttható értéke $+0;8$. Lineáris regresszió segítségével fejezzük ki a bevételt a kiadás függvényeként. A regressziós modellben mennyi a hibatag szórása? Milyen becslést adhatunk a havi bevételre akkor, ha a havi kiadás 70 millió forint, illetve akkor, ha 90 millió forint volt?

Megoldás. YouTube

Kvízek

A csoport

1. Feladat. A híres kalocsai porcelánmanufaktúrában naponta 40 kézzel festett porcelán étkészletet gyártanak, de sajnos ebből 10 mindig selejt. A nap végén a Nemzeti Fogyasztóvédelmi Hatóság rögtönzött minőség ellenőrzést végez és megvizsgálnak 5 véletlenszerűen kiválasztott aznap készített étkészletet.

(a) A megvizsgált 5 termék közötti selejtes termékek száma milyen eloszlást követ?
(b) Várhatóan hány selejtes étkészletet vizsgálnak meg?
(c) Mennyi annak az esélye, hogy legfeljebb egy selejtes étkészlet lesz az ellenőrzöttek között?

2. Feladat. Húsvétra piacra kerültek a Kinder Meglepetés új, híres matematikusfigurákat tartalmazó Kinder tojásai. Átlagosan minden 4–edik tojás rejt matematikusfigurát, köztük van például Bernoulli, Cauchy, Lebesgue, Poisson, Darboux, és az egyetlen magyar figura Zádori is. Ompoly kapott a nagyszüleitől, Robinzontól és Jarmilától 10 Kindert.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy Ompoly 3 matematikust talált?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy megtalálta Bernoullit, ha a cég összesen 50 különböző híres matematikust rejtett a tojásokba?

B csoport

1. Feladat. A statisztikák alapján egy közönséges úton az egy évben történő balesetek száma Poisson–eloszlást követ. Magyarország legveszélyesebb főútvonala a 4–es főút, ahol átlagosan 200 baleset történik évente, és a balesetek 7%–a halálos kimenetelű. Mekkora a valószínűsége, hogy ebben az évben legalább 17 halálos baleset fog történni a 4–es főúton?

2. Feladat. A World of Warcraft játék Black Temple *raid*jében Illidan a főellenség. A Black Bow of the Betrayer fegyvert csak az ő megölésével lehet megszerezni. Annak a valószínűsége, hogy ezt a kardot a halála után ki lehet a holttestéből *loot*olni 17% (*dropp rate*), továbbá hetente csak egyszer lehet megölni.

(a) Átlagosan hányszor kell megölni Illidant, hogy megszerezzük a fegyverét.
(b) A játékokban általában szerencsétlennek mondható Zarnócz Tamás kollégánknak 12 alkalomba, azaz majd 3 hónapba telt megszerezni a fegyvert úgy, hogy minden héten próbálkozott. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan ennyi alkalom kell a tárgy megszerzéséhez?
(c) Mivel a 10 éves Pistikék sírnak, hogy nehéz a tárgyat megszerezni, ezért a Blizzard, a játék gyártója az új kiegészítőnél a 17%–os valószínűséget úgy szeretné módosítani, hogy legalább 50%–os eséllyel legfeljebb a második alkalommal megszerezhető a fegyver. Legalább mekkorának kell beállítani a Black Bow of the Betrayer *dropp rate*–jét?

C csoport

Feladat. Egy kínai tartományban a tüdőrákos megbetegedések ($\xi = 0, 1$) és a betegek dohányzási szokásai ($\mu = 0, 1, 2$) közti kapcsolatot vizsgálták. A ξ véletlen változó pontosan akkor nulla, ha a beteg nem tüdőrákos; μ pedig attól függően 0, 1, vagy 2, hogy a beteg nem dohányzik, kevesebb vagy legalább 10 szál cigit szív el egy nap. A megfigyelt 3000 beteg és 3000 egészséges egyén adatainak feldolgozása után a következő százalékos eredményt kapták.

$\xi \setminus \mu$	0	1	2
0	32	15	3
1	2	8	40

Határozzuk meg a két véletlen változó korrelációját.

Kvízek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása. Legyen ξ a megvizsgált termékek közötti hibás étkészletek száma.

(a) Ekkor ξ hipergeometrikus eloszlású $(40, 10, 5)$ paraméterekkel.

(b)

$$\mathrm{E}(\xi) = \frac{5 \cdot 10}{40}$$

(c)

$$\mathrm{P}(\xi \leq 1) = \mathrm{P}(\xi = 0) + \mathrm{P}(\xi = 1) = \frac{\binom{10}{0}\binom{40-10}{5-0}}{\binom{40}{5}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{40-10}{5-1}}{\binom{40}{5}}$$

1 pt

2. Feladat megoldása.

(a) Jelölje ξ a 10 tojásban talált matematikusfigurák számát. Ekkor ξ is binomiális eloszlású $n = 10$ és $p = 1/4$ paraméterekkel, ezért

$$\mathrm{P}(\xi = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{10-3}.$$

2 pt

(b) Jelölje η a 10 tojásban talált Bernoulli figurák számát. Ekkor η binomiális eloszlású $n = 10$ és

$$p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{50} = \frac{1}{200}$$

paraméterekkel, így

$$\mathrm{P}(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{200}\right)^0\left(\frac{199}{200}\right)^{10-0} = 1 - \left(\frac{199}{200}\right)^{10}.$$

3 pt

B csoport

1. Feladat megoldása. Legyen μ az egy évben bekövetkezett halálos balesetek száma, ekkor μ is Poisson–eloszlású, és

$$\mathrm{E}(\mu) = 200 \cdot 0{,}07 = 14$$

miatt $\lambda = 14$. Így

$$\mathrm{P}(\mu \geq 17) = 1 - \mathrm{P}(\mu < 17) = 1 - \sum_{k=0}^{16} \frac{14^k}{k!} e^{14}.$$ 1 pt

2. Feladat megoldása. Jelölje ξ a tárgy megszerzéséhez szükséges alkalmak (hetek) számát. Ekkor ξ geometriai eloszlású 0,17 paraméterrel.

(a)

$$\mathrm{E}(\xi) = \frac{1}{0{,}17}$$

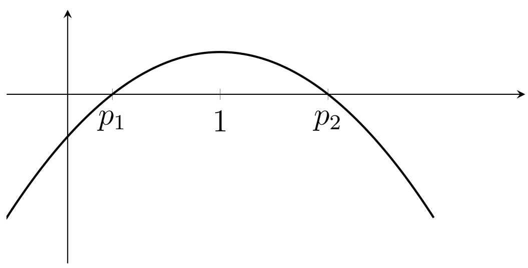
(b)

$$\mathrm{P}(\xi = 12) = 0{,}83^{11} \cdot 0{,}17$$ 2 pt

(c) Legyen a keresett valószínűség p. Ekkor a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\xi \leq 2) = \mathrm{P}(\xi = 1) + \mathrm{P}(\xi = 2) &\geq \frac{1}{2} \\ p + (1-p)p &\geq \frac{1}{2} \\ -p^2 + 2p &\geq \frac{1}{2} \\ -p^2 + 2p - \frac{1}{2} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -p^2 + 2p - \frac{1}{2} &= 0 \\ p &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-2}}{-2} \\ &= 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$



Tehát p legalább $p_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. 3 pt

C csoport

Feladat megoldása. Ekkor

$\xi \setminus \mu$	0	1	2	%
0	32	15	3	50
1	2	8	40	50
%	34	23	43	

és

$$\mathrm{E}(\xi) = 0 \cdot \frac{50}{100} + 1 \cdot \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \mathrm{E}(\mu) = 0 \cdot \frac{34}{100} + 1 \cdot \frac{23}{100} + 2 \cdot \frac{43}{100} = \frac{109}{100},$$

1 pt

$$\mathrm{E}(\xi^2) = 0^2 \cdot \frac{50}{100} + 1^2 \cdot \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \mathrm{E}(\mu^2) = 0^2 \cdot \frac{34}{100} + 1^2 \cdot \frac{23}{100} + 2^2 \cdot \frac{43}{100} = \frac{195}{100},$$

$$\mathrm{D}(\xi) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \quad \text{és} \quad \mathrm{D}(\mu) = \sqrt{\frac{195}{100} - \frac{109^2}{100^2}}\,.$$

Továbbá $\xi \cdot \mu$ százalékos eloszlása

$\xi \cdot \eta$	0	1	2
%	52	8	40

2 pt

Ebből

$$\mathrm{E}(\xi\mu) = 0 \cdot \frac{52}{100} + 1 \cdot \frac{8}{100} + 2 \cdot \frac{40}{200} = \frac{88}{100}$$

adódik, azaz

$$\mathrm{Cov}(\xi, \mu) = \frac{88}{100} - \frac{1}{2} \cdot \frac{109}{100} = \frac{67}{200},$$

tehát

$$\mathrm{corr}(\xi, \mu) = \frac{\frac{67}{200}}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{195}{100} - \frac{109^2}{100^2}}}\,.$$

3 pt

Megjegyzés. Mivel

$$\mathrm{corr}(\xi, \mu) \approx 0{,}768\,,$$

így a két változó között pozitív irányú közepesen erős lineáris kapcsolat van. ✠

12.

Folytonos eloszlások

Házi feladatok

Egy ξ véletlen változó folytonos eloszlású, ha létezik egy nemnegatív f függvény, melyre ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Az $f_\xi(x) = f(x)$ függvény a ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye, továbbá

$$\mathrm{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx\,, \quad \mathrm{E}(\xi^2) := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx\,.$$

Nevezetes folytonos eloszlások

Eloszlás	$f(x)$	$F(x)$		$\mathrm{E}(\xi)$	$\mathrm{D}^2(\xi)$
Egyenletes (a, b)	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponenciális (λ)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$x > 0$ $\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normális (μ, σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$		$-\infty < x < \infty$	μ	σ^2

1. Feladat. A Black Fridaykor megrendelt csomagomról értesítést kaptam a futárszolgálattól, hogy ma fogják kézbesíteni délután 1 és 4 között. A kézbesítés időpontja egyenletes eloszlást követ.

(a) A matekóráról csak délután kettőre tudok hazaérni. Mi a valószínűsége, hogy a futár akkor jön, amikor még nem vagyok otthon?
(b) Adjuk meg az eloszlásfüggvényt, majd ábrázoljuk is azt.

(c) Mennyi a valószínűsége, hogy 3 után érkezik meg a csomag?

(d) Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,, & \text{ha } x \in [1,4]\,, \\ 0\,, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény a futár érkezésének sűrűségfüggvénye, majd ábrázoljuk is a függvényt.

Megoldás. Jelölje ξ a futár érkezési időpontját.

(a) A ξ véletlen változó egyenletes eloszlást követ, így a keresett valószínűséget a kedvező intervallum, az $[1,2]$ és az összes intervallum, az $[1,4]$ hosszának hányadosaként számíthatjuk ki, azaz

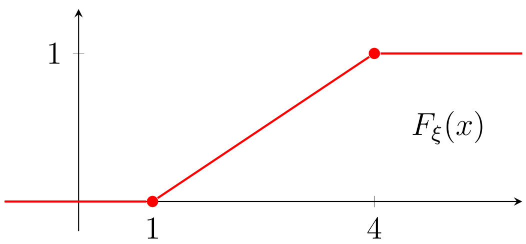
$$\mathrm{P}(\xi < 2) = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}\,.$$

(b) Az előző rész alapján, ha $x \in [1,4]$, akkor

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \frac{x-1}{3}\,.$$

Mivel annak, hogy délután egy előtt érkezik a futár, 0 a valószínűsége, továbbá ξ biztosan kisebb, mint 4, ezért az eloszlásfüggvény:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{3}\,, & \text{ha } 1 < x \le 4 \\ 1\,, & \text{ha } 4 < x\,. \end{cases}$$



Megjegyzés. Mivel $F_\xi(x)$ folytonos, így minden $x \in \mathbb{R}$ szám esetén $\mathrm{P}(\xi = x) = 0$, ezért $\mathrm{P}(\xi \le x) = \mathrm{P}(\xi < x) = F_\xi(x)$. ✠

(c) Ekkor

$$\mathrm{P}(\xi > 3) = 1 - \mathrm{P}(\xi \le 3) = 1 - F_\xi(3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

(d) Az $f(x)$ függvény nemnegatív. Megmutatjuk, hogy az integrálfüggvénye $F_\xi(x)$.
Ha $x < 1$, akkor

$$\int_{-\infty}^{x} f(u)\ du = \int_{-\infty}^{x} 0\ du = 0 = F_\xi(x)\,.$$

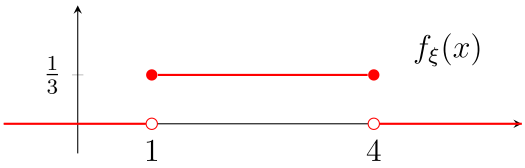
Ha $x \in [1,4]$, akkor

$$\int_{-\infty}^{x} f(u)\ du = \int_{-\infty}^{1} 0\ du + \int_{1}^{x} \frac{1}{3}\ du = 0 + \left[\frac{1}{3}u\right]_{u=1}^{x} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = F_\xi(x)\,.$$

Végül, ha $x > 4$, akkor

$$\int_{-\infty}^{x} f(u)\ du = \int_{-\infty}^{1} 0\ du + \int_{1}^{4} \frac{1}{3}\ du + \int_{4}^{x} 0\ du = 0 + \left[\frac{1}{3}u\right]_{u=1}^{4} + 0 = 1 = F_\xi(x)\,.$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



MEGJEGYZÉS. Minden pontban, ahol $f_\xi(x)$ folytonos, fennáll az

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x)$$

összefüggés. ✠

2. Feladat. Amikor telefonálok, a beszélgetéseim percekben kifejezett hosszúsága egy ξ valószínűségi változó, melynek értékei 1 és 5 közé esnek, továbbá sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2}\,, & \text{ha } 1 \le x \le 5\,, \\ 0\,, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg az a paraméter értékét, majd ábrázoljuk ξ sűrűségfüggvényét.
(b) Mennyi annak az esélye, hogy egy telefonhívásom hossza 3 és 10 perc közé esik?
(c) Átlagosan milyen hosszúak a beszélgetéseim, és mennyi a hívásaim hosszának szórása?

Megoldás.

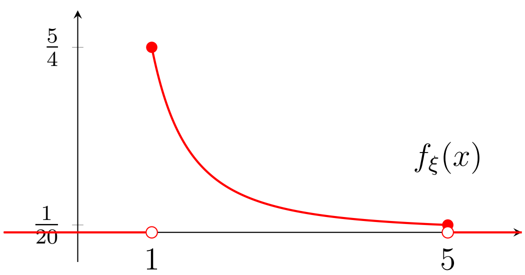
(a) Ahhoz, hogy $f_\xi(x)$ sűrűségfüggvény legyen, teljesülnie kell, hogy $f_\xi(x) \ge 0$, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)\;du = 1\,.$$

Ezért $a \ge 0$, továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)\;du = \int_1^5 \frac{a}{u^2}\;du = \int_1^5 au^{-2}\;du = \left[a \cdot \frac{u^{-1}}{-1}\right]_{u=1}^5$$
$$= \left[-\frac{a}{u}\right]_{u=1}^5 = -\frac{a}{5} + a = \frac{4}{5}a\,,$$

miatt $a = \dfrac{5}{4}$.



(b) A keresett valószínűséget az eloszlásfüggvény ismerete nélkül, a sűrűségfüggvényből is meghatározhatjuk:

$$\mathrm{P}(3 < \xi < 10) = \int_3^{10} f_\xi(x)\;dx = \int_3^5 \frac{\frac{5}{4}}{x^2}\;dx = \frac{5}{4}\left[-\frac{1}{x}\right]_3^5 = \frac{1}{6}\,.$$

(c) A ξ várható értéke

$$\mathrm{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx = \int_1^5 x \cdot \frac{\frac{5}{4}}{x^2}\,dx = \frac{5}{4}\int_1^5 x^{-1}\,dx$$
$$= \frac{5}{4}\left[\ln x\right]_{x=1}^5 = \frac{5}{4}(\ln 5 - \ln 1) = \frac{5}{4}\ln 5 \qquad \approx 2{,}01\,,$$

második momentuma

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx = \int_1^5 x^2 \cdot \frac{\frac{5}{4}}{x^2}\,dx = \int_1^5 \frac{5}{4}\,dx = \left[\frac{5}{4}x\right]_{x=1}^5 = \frac{5}{4}(5-1) = 5\,.$$

Így a szórásnégyzete

$$\mathrm{D}^2(\xi) = \mathrm{E}\left(\xi^2\right) - \mathrm{E}^2(\xi) = 5 - \left(\frac{5}{4}\ln 5\right)^2 \qquad \approx 0{,}95\,.$$

3. Feladat. Az okostelefonokról azt állapították meg, hogy élettartamuk exponenciális eloszlást követ, átlagosan 5 évig működik.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy okostelefon 5 éven belül elromlik?
(b) Hány éven belül megy tönkre a telefon 50%–os valószínűséggel?
(c) Ha a telefon kibírt már legalább 100 évet, akkor mennyi a valószínűsége, hogy kibír még legalább 5 évet?

Megoldás. Jelölje ξ az okostelefon élettartamát.

(a) A feladat szövege alapján $\mathrm{E}(\xi) = 5$. Mivel ξ exponenciális eloszlást követ, tehát $\mathrm{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, ezért az eloszlás paramétere $\lambda = \frac{1}{5}$. Ezek alapján

$$\mathrm{P}(\xi < 5) = F_\xi(5) = 1 - e^{-\frac{1}{5}\cdot 5} = 1 - \frac{1}{e} \qquad \approx 0{,}63\,.$$

(b) Azt az x értéket keressük, melyre teljesül, hogy $\mathrm{P}(\xi \le x) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \mathrm{P}(\xi \le x) = F_\xi(x)\\
\frac{1}{2} &= 1 - e^{-\frac{1}{5}x}\\
e^{-\frac{x}{5}} &= \frac{1}{2}\\
-\frac{x}{5} &= \ln\frac{1}{2}\\
x &= -5\ln\frac{1}{2} \qquad \approx 3{,}47\,.
\end{aligned}$$

(c) A $\mathrm{P}(\xi \ge 105 \mid \xi \ge 100)$ feltételes valószínűséget kell meghatározni.

$$\mathrm{P}(\xi \ge 105 \mid \xi \ge 100) = \frac{\mathrm{P}(\xi \ge 105\,,\ \xi \ge 100)}{\mathrm{P}(\xi \ge 100)} = \frac{\mathrm{P}(\xi \ge 105)}{\mathrm{P}(\xi \ge 100)} = \frac{1-\mathrm{P}(\xi < 105)}{1-\mathrm{P}(\xi < 100)}$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{5}\cdot 105}}{e^{-\frac{1}{5}\cdot 100}} = e^{-\frac{1}{5}\cdot(105-100)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Megjegyzés. Az (a) rész alapján

$$P(\xi \geq 105 \mid \xi \geq 100) = P(\xi \geq 5)\,,$$

azaz a telefon további működésének esélyét nem befolyásolja az, hogy már mennyi ideje üzemel. Ezt örökifjú tulajdonságának nevezzük, és ez csak az exponenciális eloszlásra igaz. ✠

4. Feladat. Egy telefonközpontba beérkező hívások száma Poisson–eloszlást, két hívás között eltelt idő pedig exponenciális eloszlást követ. Tíz perc alatt átlagosan 2 hívás érkezik.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy negyed óra alatt legalább 4 hívás érkezik?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy az első két hívás között legalább 10 perc telik el?

Megoldás.

(a) Ha 10 perc alatt átlagosan 2 hívás érkezik a telefonközpontba, akkor 15 perc alatt átlagosan másfélszer annyi, azaz 3 hívás érkezik. Így, amennyiben ξ jelöli a negyed óra alatt beérkező hívások számát, akkor az $\lambda = 3$ paraméterű Poisson eloszlást követ. Tehát

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 4) &= 1 - P(\xi < 4) \\ &= 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3)) \\ &= 1 - \left(e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{3^2}{2!}e^{-3} + \frac{3^3}{3!}e^{-3}\right) \qquad \approx 0{,}353\,. \end{aligned}$$

(b) Jelölje η a két hívás között eltelt időt percekben mérve. Mivel 10 perc alatt átlagosan 2 hívás érkezik, ezért két hívás között eltelt idő átlagosan 5 perc, azaz $E(\eta) = 5$. Tehát az η exponenciális eloszlás paramétere $\lambda = \frac{1}{5}$. Így

$$P(\eta \geq 10) = 1 - P(\eta < 10) = 1 - F_\eta(10) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{5}\cdot 10}) \qquad \approx 0{,}153\,.$$

5. Feladat. Epifánia néni a zöldség– és gyümölcsboltjában látszólag teljesen véletlenszerű áron kínálja az epret 1.000 és 3.000 Ft között. A szemfüles Tonuzóba bácsi azonban megfigyelte, hogy egy véletlenszerűen választott napon 1 kilogramm eper ára a következő sűrűségfüggvénnyel írható le:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{26}x^2\,, & \text{ha } x \in [1,3], \\ 0\,, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol az ár ezer forintban értendő.

(a) Átlagosan mennyibe kerül az eper Epifánia néninél?
(b) Mennyi annak az esélye, hogy Tonuzóba bácsi legalább 3 kiló epret tud venni, ha 5.000 forintot visz magával?
(c) Átlagosan hány kiló eperre lesz elég Tonuzóba bácsi 5.000 forintja?

Megoldás. Jelölje ξ az eper árát egy véletlenszerűen választott napon.

(a) Egy kilogramm eper árának várható értéke

$$\mathrm{E}(\xi) = \int_1^3 x \cdot \frac{3}{26}x^2 \, dx = \frac{3}{26}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3}{26} \cdot \frac{81-1}{4} \qquad \approx 2.308 \text{ Ft}\,.$$

(b) Három kiló eper ára 3ξ, így a keresett valószínűség:

$$\mathrm{P}(3\xi \le 5) = \mathrm{P}\left(\xi \le \frac{5}{3}\right) = \int_1^{\frac{5}{3}} \frac{3}{26}x^2 \, dx = \frac{3}{26}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{26} \cdot \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 1}{3} \qquad \approx 0{,}14\,.$$

(c) Tonuzóba bácsi ötezer forintból $\frac{5}{\xi}$ kiló epret tud venni. Így várhatóan

$$\mathrm{E}\left(\frac{5}{\xi}\right) = \int_1^3 \frac{5}{x} \cdot \frac{3}{26}x^2 \, dx = \frac{15}{26}\int_1^3 x \, dx = \frac{15}{26}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{15}{26} \cdot \frac{9-1}{2} \qquad \approx 2{,}308 \text{ kg}$$

epret tud hazavinni a családjának.

MEGJEGYZÉS. Vegyük észre, hogy $2.308 \cdot 2{,}308 = 5.325 \neq 5.000$. ✠

6. Feladat. Epifánia néni 1 kilós csomagokat is árul, mert tudja, hogy Tonuzóba bácsi unokája, Tarzíciusz mindig így kéri az epret. Átlagosan hány csomag kilós eperre lesz elég Tonuzóba bácsi 5.000 forintja, ha Tarzíciuszt küldi el epret venni?

Megoldás. Jelölje η, hogy hány csomag kilós epret tud venni Tarzíciusz. Ő csak egész csomagokat vásárol, ezért η diszkrét valószínűségi változó. Mivel 1.000 forintos eperár mellett öt kilóra, 3.000 forint esetén pedig csak egy kilóra elegendő 5.000 forint, ezért η lehetséges értékei $1, 2, 3, 4, 5$. Határozzuk meg η valószínűségeloszlását.

Akkor tudunk pontosan egy kilót venni, ha az eper ára 2.500 forintnál több, azaz

$$p_1 = \mathrm{P}(\eta = 1) = \mathrm{P}\left(\xi > \frac{5}{2}\right) = \int_{\frac{5}{2}}^3 \frac{3}{26}x^2 \, dx = \frac{3}{26}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{5}{2}}^3 = \frac{3}{26} \cdot \frac{3^3 - \left(\frac{5}{2}\right)^3}{3} \qquad \approx 0{,}437\,.$$

Hasonlóan végiggondolva

$$p_2 = \mathrm{P}(\eta = 2) = \mathrm{P}\left(\frac{5}{3} < \xi \le \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{26}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{2}} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^3 - \left(\frac{5}{3}\right)^3}{26} \qquad \approx 0{,}423\,,$$

$$p_3 = \mathrm{P}(\eta = 3) = \mathrm{P}\left(\frac{5}{4} < \xi \le \frac{5}{3}\right) = \frac{3}{26}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{4}\right)^3}{26} \qquad \approx 0{,}103\,,$$

$$p_4 = \mathrm{P}(\eta = 4) = \mathrm{P}\left(1 < \xi \le \frac{5}{4}\right) = \frac{3}{26}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{\frac{5}{4}} = \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^3 - 1}{26} \qquad \approx 0{,}037\,,$$

$$p_5 = \mathrm{P}(\eta = 5) = \mathrm{P}(\xi = 1) = 0\,.$$

Így η várható értéke

$$\mathrm{E}(\eta) = \sum_{k=1}^{5} k \cdot p_k \qquad \approx 1{,}739\,.$$

7. Feladat. Az eperszezon közepén megjelent a málna is Epifánia néninél. Tonuzóba bácsi barátnője a rejtvényfejtő klubból, Baucisz néni meghatározta, hogy az eper és a málna árának együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6}{13\,(1+e^2)} y x^2 \ln y\,, & \text{ha } x \in [1,3] \quad \text{és} \quad y \in [1,e]\,, \\ 0\,, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg a málna árának sűrűségfüggvényét.
(b) Független-e az eper és a málna ára egymástól?
(c) Mennyi a valószínűsége, hogy a málna ára 2.000 forintnál drágább?
(d) Mennyi a valószínűsége, hogy a málna drágább mint az eper?

Megoldás. Jelölje ζ a málna árát.

(a) Az együttes sűrűségfüggvény alapján a málna árának sűrűségfüggvénye

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx\,.$$

Ha $y \in [1,e]$, akkor

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_1^3 \frac{6}{13\,(1+e^2)} y x^2 \ln y\ dx = \frac{6}{13\,(1+e^2)} y \ln y \cdot \int_1^3 x^2\ dx \\ &= \frac{6}{13\,(1+e^2)} y \ln y \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{6}{13\,(1+e^2)} y \ln y \cdot \frac{27-1}{3} = \frac{4}{1+e^2} y \ln y\,, \end{aligned}$$

különben $g(y) = 0$.

(b) Mivel

$$f(x) \cdot g(y) = f(x,y)\,,$$

ezért az eper és a málna ára függetlenek egymástól.

(c) Ekkor a málna sűrűségfüggvényének ismeretében

$$\mathrm{P}(\zeta > 2) = \int_2^{\infty} g(y)\ dy = \int_2^e \frac{4}{1+e^2} y \ln y\ dy = \frac{4}{1+e^2} \int_2^e y \ln y\ dy\,.$$

Parciális integrálás segítségével

$$\int \underbrace{y \cdot \ln y}_{f' \cdot g}\ dy = \underbrace{\frac{y^2}{2} \cdot \ln y}_{f \cdot g} - \int \underbrace{\frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{y}}_{f \cdot g'}\ dy = \frac{y^2}{2} \ln y - \int \frac{y}{2}\ dy\,.$$

Így a keresett valószínűség

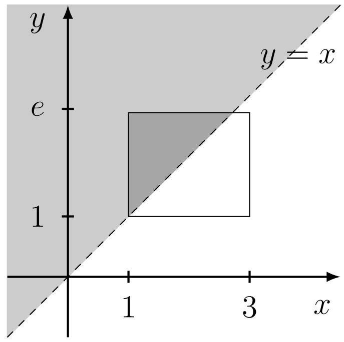
$$\mathrm{P}(\zeta > 2) = \frac{4}{1+e^2} \left[\frac{y^2}{2} \ln y - \frac{y^2}{4}\right]_2^e = \frac{4}{1+e^2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - (2\ln 2 - 1)\right) \qquad \approx 0{,}697\,.$$

(d)

Az együttes sűrűség függvény ismeretében kapjuk, hogy

$$P(\zeta > \xi) = \iint_{y>x} f(x,y)\ dxy$$

Az ábra alapján választjuk az integrálási sorrendet, továbbá a fenti integrálok alapján



$$\begin{aligned}
P(\zeta > \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\ dxdy = \int_1^e \left(\int_1^y \frac{6}{13\,(1+e^2)} yx^2 \ln y\ dx\right) dy \\
&= \int_1^e \frac{6}{13\,(1+e^2)} y \ln y \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=y} dy = \int_1^e \frac{6}{13\,(1+e^2)} y \ln y \cdot \left(\frac{y^3-1}{3}\right) dy \\
&= \int_1^e \frac{2}{13\,(1+e^2)} \left(y^4 - y\right) \ln y\ dy\,.
\end{aligned}$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\left(y^4 - y\right)\ln y}_{f'g}\ dy &= \underbrace{\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^2}{2}\right)\ln y}_{fg} - \int \underbrace{\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^2}{2}\right)\frac{1}{y}}_{fg'}\ dy \\
&= \left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^2}{2}\right)\ln y - \int \left(\frac{y^4}{5} - \frac{y}{2}\right) dy \\
&= \left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^2}{2}\right)\ln y - \frac{y^5}{25} + \frac{y^2}{4} + C\,,
\end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned}
P(\zeta > \xi) &= \frac{2}{13\,(1+e^2)} \left[\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^2}{2}\right)\ln y - \frac{y^5}{25} + \frac{y^2}{4}\right]_{y=1}^{y=e} \\
&= \frac{2}{13\,(1+e^2)} \left(\frac{e^5}{5} - \frac{e^2}{2} - \frac{e^5}{25} + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{25} - \frac{1}{4}\right) \qquad \approx 0{,}398\,.
\end{aligned}$$

Videók

Folytonos eloszlások

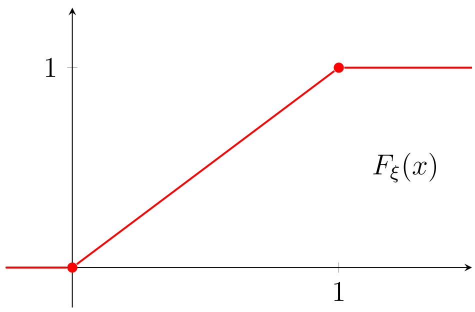
1. Feladat. Válasszunk a $[0,1]$ intervallumon véletlenszerűen egy pontot. Jelöljük a ξ valószínűségi változóval az origótól való távolságát. Adjuk meg ξ

(a) értékkészletét,
(b) eloszlásfüggvényét,
(c) sűrűségfüggvényét,
(d) várható értékét,
(e) szórását,
(f) a $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3} < \xi < \frac{3}{4}\right)$ valószínűséget,
(g) a $\mathrm{P}\left(|\xi - 1{,}2| \leq c\right)$ valószínűséget $(c > 0)$.

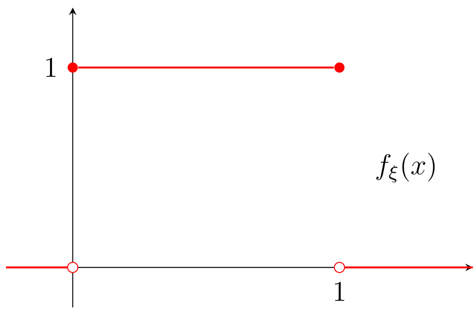
Megoldás.

(a) $R_\xi = [0,1]$

(b)



(c)



(d) $\frac{1}{2}$

(e) $\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$

(f) $\frac{5}{12}$

(g)

$$\mathrm{P}\left(|\xi - 1{,}2| \leq c\right) = \begin{cases} 2c, & 0 < c \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < c \end{cases}$$

2. Feladat. A biztosítótársaságok valószínűségi változókkal modellezik azt, hogy mekkora a kár nagysága, ha bekövetkezik a káresemény. Egy speciális biztosítás esetén a kár millió forintban kifejezett nagysága egy olyan folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye: $f(x) = 0$ ha x kisebb 1, és $f(x) = a/x^3$ egyébként.

(a) Ábrázoljuk a sűrűségfüggvényt és adjuk meg az „a" paraméter értékét! Mi a valószínűségi változó értékkészlete?

(b) Határozzuk meg a kárnagyság várható értékét és szórását!

Megoldás.

3. Feladat. Véletlenszerűen kiválasztunk egy egyedet egy állatpopulációból. A korábbi kutatások alapján ismert, hogy ekkor a kiválasztott egyed testtömege egy olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye: $\frac{3}{14}\sqrt{x}$ ha $1 \leq x \leq 4$, és $f(x) = 0$ egyébként.

(a) Határozzuk meg a változó értékkészletét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott egyed tömege legfeljebb 2? Mennyi annak az esélye, hogy az egyed tömege legalább 3? Mekkora valószínűséggel kapunk 2 egységnél kisebb tömegű egyedet?

(b) Írjuk fel a változó eloszlásfüggvényét! Határozzuk meg a változó mediánját illetve alsó és felső kvartilisét! Mi a jelentése ennek a három értéknek a populációra nézve?

Megoldás.

4. Feladat. Roger Federer a világ legsikeresebb teniszezője. Amikor szervál, a labda sebessége egy olyan valószínűségi változó, mely egyenletes eloszlást követ 48 és 60 m/s között. (Tehát 173 és 216 km/h között.)

(a) Federer szerváinál mennyi a labda sebességének várható értéke illetve szórása? A szervák mekkora hányada gyorsabb, mint 50 m/s?

(b) A teniszpályák 24 méter hosszúak. Jelölje η azt, hogy Federer adogatásainál a labda mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat! Adjuk meg az η valószínűségi változó értékkészletét! Mennyi annak az esélye, hogy az η kisebb, mint 0,48 másodperc? Ezek alapján az η változó egyenletes eloszlást követ?

(c) Határozzuk meg az „eta” valószínűségi változó várható értékét és szórását!

(d) Írjuk fel az „eta” változó eloszlásfüggvényét illetve sűrűségfüggvényét!

Megoldás.

5. Feladat. Két barát véletlenszerűen találkozik 8 és 10 óra között. Mennyi a valószínűsége, hogy lekésik a 9:30–as mozit?

Megoldás. $\frac{1}{4}$

6. Feladat. Egy internetes áruházban az egymást követő vásárlások között véletlen hosszúságú idő telik el, és ez az idő exponenciális eloszlást követ. Azt is tudjuk, hogy a vásárlások átlagosan 2 percenként követik egymást. A webáruházban éppen most vásárolt valaki, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy mikor érkezik be a következő rendelés.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő rendelés 1 percen belül megérkezik?

(b) Mennyi annak az esélye, hogy a következő rendelésre legalább 1, de legfeljebb 2 percet kell várni?

(c) Tegyük fel, hogy már 1 órája várunk a következő rendelésre! Mennyi az esélye, hogy ezek után a rendelés 1 percen belül meg fog majd érkezni?

Megoldás. YouTube

7. Feladat. Egy villanykörte átlagos élettartama exponenciális eloszlást követ, várhatóan 10.000 óra.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 10.000 órát világít?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy még legalább 5.000 órát világít, feltéve, hogy eddig már legalább 7.000 órája ég?

Megoldás. YouTube

(a) e^{-1}

(b) $e^{-\frac{1}{2}}$

8. Feladat. Egy szöveten a szövéshibák exponenciális eloszlást követnek. Azt tapasztaljuk, hogy 100 méteren 10 hiba található.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 méteren 3–nál több hiba található?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy hiba után legalább 8 méteren keresztül hibátlan az anyagunk?

Megoldás. YouTube

(a) $1-\left(e^{-2}+2\cdot e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}+\frac{2^3}{3!}\cdot e^{-2}\right)$

(b) $e^{-\frac{8}{5}}$

9. Feladat. Az ábrán a normális eloszlás sűrűségfüggvénye van ábrázolva különböző paraméterválasztások mellett. Adjunk becslést az f_1, f_2, f_3, f_4 sűrűségfüggvények paramétereire! Határozzuk meg, hogy a függvények közül melyik tartozik az alábbi μ várható értékkel és σ szórással definiált normális eloszlásokhoz! Ezek után adjuk meg a kimaradt sűrűségfüggvény pontos paramétereit is!

(a) $\mu = 2, \sigma = 0,5$

(b) $\mu = 2, \sigma = 1$

(c) $\mu = 0, \sigma = 2$

Megoldás. YouTube

10. Feladat. A kínai hölgyek átlagmagassága normális eloszlást követ. Az átlagmagasság 150 cm, 10 cm szórással. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy hölgyet véletlenszerűen választva

(a) magasabb, mint 160 cm,

(b) alacsonyabb, mint 145 cm?

Megoldás. YouTube

(a) $1-\Phi(1)$

(b) $1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$

11. Feladat. Legyen ξ egy véletlenszerűen kiválasztott felnőtt ember szisztolés vérnyomása higanymilliméterben (mmHg) kifejezve. A statisztikai adatok alapján ξ egy-egy földrajzi területen lognormális eloszlást követ, ami azt jelenti, hogy az $\ln\xi$ valószínűségi változó normális eloszlású. A paraméterek országonként változóak, például az Egyesült Államokban az $\ln\xi$ változó várható értéke és szórása $\mu = 4{,}78$ illetve $\sigma = 0{,}16$.

(a) Az orvosi szakirodalom a 140 mmHg feletti vérnyomást tekinti kórosan magasnak. Ez az amerikai felnőtt népesség mekkora hányadát érinti?

(b) Az emberek mekkora hányadának esik a vérnyomása az egészségesnek tekintett tartományba, tehát 90 és 130 mmHg közé?

(c) Adjunk meg egy olyan intervallumot, melyre teljesül, hogy a felnőtt népesség 95 százalékának a szisztolés vérnyomása ide esik!

Megoldás.

12. Feladat. Egy lift terhelése normális eloszlást követ. Az átlagos terhelés 660 kg, és tekintsük egy ember tömegét $\mathcal{N}(80, 100)$ eloszlásúnak.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a lift 8 embert elbír?

(b) Adjunk meg olyan, az együttes várható értékre szimmetrikus intervallumot, amely a 8 ember tömegét 0,95 valószínűséggel tartalmazza.

Megoldás.

(a) $\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) $[584, 696]$

Kvízek

A csoport

Feladat. Gotham Cityben annyira elharapózott a bűnözés, hogy óránként átlagosan 4–szer riasztják Batmant. A megfigyelések alapján a riasztások között eltelt idő exponenciális eloszlású, az óránként érkezett riasztások száma pedig Poisson–eloszlású.

(a) Két riasztás között átlagosan mennyi idő telik el?
(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy két riasztás között eltelt idő kevesebb, mint 10 perc?
(c) Mennyi a valószínűsége, hogy fél órán belül kevesebb, mint 3–szor riasztják Batmant?
(d) Ha feltételezzük, hogy Batman, mint minden rendes szuperhős, csak napi nyolc órát dolgozik, este 9 és hajnal 5 között, mekkora az esélye, hogy munkaidejében tényleg annyi riasztást kapott, amennyit várt?
(e) Kedden Batman rögtön riasztással kezdte a munkaidejét, utána viszont este 10–ig nem kapott riasztást. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő fél órában sem fog?

B csoport

1. Feladat. A Ferrari autógyárban az ikerpár Ozor és Ozul két gépen motordugattyúkat készít. Ezek élettartama exponenciális eloszlást követ, az első gépnél 15 év, a másodiknál 18 év várható értékkel. Az első gép a termelés 40%–át adja. Mekkora a valószínűsége, hogy az egy helyen gyűjtött dugattyúk közül a minőségellenőr Principusz egy olyat választ, amely tovább fog működni, mint 20 év?

2. Feladat. Egy erősen korrozív körülmények közé tervezett vezeték szigetelésének vastagsága egyenletes eloszlású 20 és 40 mikron között. Írjuk fel a szigetelés vastagságának eloszlásfüggvényét és ábrázoljuk is. Mekkora a valószínűsége, hogy a szigetelés vékonyabb, mint 35 mikron?

C csoport

1. Feladat. Egy csokoládégyárban a nugátkrémnyomó berendezés már nem számít újnak, átlagosan 20 percenként elakad és 5 percbe telik újra elindítani. Az elakadások között eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Várhatóan mennyi időbe telik, míg a berendezés egy nettó 1 órás munkát elvégez?

2. Feladat. A ξ véletlen változó sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} ax^2 \ln x, & \text{ha } x \in (1, e); \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az a paramétert. Mennyi ξ várható értéke?

D csoport

Feladat. Brit tudósok kimutatták, hogy karácsonykor a Tescoban kapható hecsedli (x) és puszedli (y) £–ban adott árának együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2 + xy + 1, & \text{ha } 0 \leq x, y \leq 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Mennyi a c paraméter értéke?
(b) Függetlenek–e a termékek árai egymástól?
(c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hecsedli drágább, mint a puszedli?

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása.

(a) Átlagosan 4 riasztás érkezik 60 percenként, tehát átlagosan

$$\frac{60}{4} = 15$$

perc a két riasztás között eltelt idő.

(b) Legyen ξ a két riasztás között eltelt idő percekben. Ekkor az (a) rész alapján $\mathrm{E}(\xi) = 15$, ezért $\lambda = \dfrac{1}{15}$.

$$\mathrm{P}\left(\xi < 10\right) = F_\xi\left(10\right) = 1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot 10}$$

1 pt

(c) Legyen η a félóránkénti riasztások száma. Mivel 30 perc alatt átlagosan 2 riasztás van, ezért $\mathrm{E}(\eta) = 2$ és így $\lambda = 2$.

$$\mathrm{P}(\eta < 3) = \mathrm{P}(\eta = 0) + \mathrm{P}(\eta = 1) + \mathrm{P}(\eta = 2) = e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!}$$

2 pt

(d) Jelölje ζ Batman munkaidejében történő riasztások számát. Munkaidejében, azaz 8 óra alatt átlagosan 32 riasztás történik, így $\mathrm{E}(\zeta) = 32$, azaz $\lambda = 32$.

$$\mathrm{P}(\zeta = 32) = \frac{32^{32} e^{-32}}{32!}$$

(e)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi > 90 \mid \xi > 60) &= \frac{\mathrm{P}(\xi > 90, \xi > 60)}{\mathrm{P}(\xi > 60)} = \frac{\mathrm{P}(\xi > 90)}{\mathrm{P}(\xi > 60)} = \frac{1 - \mathrm{P}(\xi \leq 90)}{1 - \mathrm{P}(\xi \leq 60)} \\ &= \frac{1 - (1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot 90})}{1 - (1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot 60})} = \frac{e^{-\frac{1}{15}\cdot 90}}{e^{-\frac{1}{15}\cdot 60}}\end{aligned}$$

3 pt

B csoport

1. Feladat megoldása. Legyen

$$A_1 = \text{Az első gépen gyártották}$$
$$A_2 = \text{A második gépen gyártották}$$

Ekkor

$$P(A_1) = 0{,}4 \quad P(A_2) = 0{,}6\,.$$

Ha ξ a kiválasztott dugattyú élettartama, akkor

$$\mathrm{P}(\xi > 20 \mid A_1) = 1 - \mathrm{P}(\xi \leq 20 \mid A_1) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot 20}\right) = e^{-\frac{20}{15}},$$

és

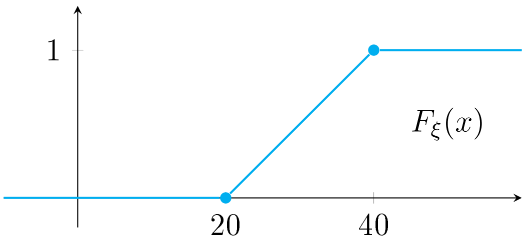
$$\mathrm{P}(\xi > 20 \mid A_2) = 1 - \mathrm{P}(\xi \leq 20 \mid A_2) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{18}\cdot 20}\right) = e^{-\frac{20}{18}}.$$ 1 pt

Tehát

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi > 20) &= \mathrm{P}(\xi > 20 \mid A_1)\,\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(\xi > 20 \mid A_2)\,\mathrm{P}(A_2)\\ &= e^{-\frac{20}{15}} \cdot 0{,}4 + e^{-\frac{20}{18}} \cdot 0{,}6\,.\end{aligned}$$

2. Feladat megoldása. Legyen ξ a szigetelés vastagsága, ekkor az eloszlásfüggvénye:

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 20;\\ \dfrac{x-20}{20}, & \text{ha } 20 \leq x \leq 40;\\ 1, & \text{különben.}\end{cases}$$ 2 pt



Így

$$\mathrm{P}(\xi < 35) = F_\xi(35) = \frac{35-20}{20} = \frac{15}{20}.$$ 3 pt

C csoport

1. Feladat megoldása. Az elakadások száma Poisson–eloszlást követ. Ha ξ az 1 óra alatt bekövetkező elakadások száma, akkor $\mathrm{E}(\xi) = 3$. A gép a 60 perces munkát $60 + 5\xi$ idő alatt végzi el, ennek a várható értéke

$$\mathrm{E}(60 + 5\xi) = 60 + 5\,\mathrm{E}(\xi) = 60 + 5 \cdot 3 = 75.$$

1 pt

2. Feladat megoldása. A sűrűségfüggvény tulajdonsága miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = a\int_1^e x^2 \ln x\,dx = 1\,.$$

Parciális integrálással

$$\int \underbrace{x^2}_{f'}\underbrace{\ln x}_{g}\,dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{f}\underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C\,,$$

azaz

$$\begin{aligned} a\int_1^e x^2 \ln x\,dx &= a\cdot\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e = a\left(\frac{e^3}{3}\ln e - \frac{e^3}{9} - \left(\frac{1}{3}\ln 1 - \frac{1}{9}\right)\right) \\ &= a\left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}\right) = a\cdot\frac{2e^3+1}{9} = 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad a = \frac{9}{2e^3+1}\,. \end{aligned}$$

2 pt

A ξ várható értéke

$$\mathrm{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx = \frac{9}{2e^3+1}\int_1^e x^3 \ln x\,dx\,,$$

ekkor

$$\int \underbrace{x^3}_{f'}\underbrace{\ln x}_{g}\,dx = \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{f}\underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

alapján

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\xi) = \frac{9}{2e^3+1}\left[\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}\right]_1^e &= \frac{9}{2e^3+1}\left(\frac{e^4}{4}\ln e - \frac{e^4}{16} - \frac{1}{4}\ln 1 + \frac{1}{16}\right) \\ &= \frac{9}{2e^3+1}\left(\frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16}\right)\,. \end{aligned}$$

3 pt

D csoport

Feladat megoldása.

(a) A sűrűségfüggvény tulajdonsága miatt az

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dxy = \iint_{[0,1]^2} (cx^2 + xy + 1)\ dxy = 1$$

egyenletet kell megoldanunk. Válasszuk a következő sorrendet:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (cx^2 + xy + 1) dy \right) dx = \int_0^1 \left[cx^2 y + \frac{xy^2}{2} + y \right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(cx^2 + \frac{x}{2} + 1 \right) dx = \left[c\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{c}{3} + \frac{1}{4} + 1 = 1$$

ezért $\frac{c}{3} = -\frac{1}{4}$, azaz $c = -\frac{3}{4}$. 1 pt

(b) Mivel

$$f_{\text{hecs}}(x) = \int_0^1 \left(-\frac{3}{4}x^2 + xy + 1 \right)\ dy = \left[-\frac{3}{4}x^2 y + \frac{xy^2}{2} + y \right]_{y=0}^{y=1} = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{x}{2} + 1$$

$$f_{\text{pusz}}(y) = \int_0^1 \left(-\frac{3}{4}x^2 + xy + 1 \right)\ dx = \left[-\frac{3}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} + x \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{4} + \frac{y}{2} + 1,$$

és

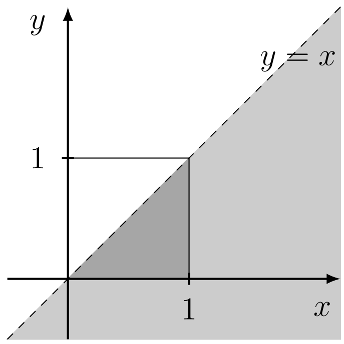
$$f(x,y) \neq f_{\text{hecs}}(x) \cdot f_{\text{pusz}}(y),$$ 2 pt

ezért a két termék ára nem független egymástól.

(c) Ha ξ jelöli a hecsedli árát és η a puszedliét, akkor az együttes sűrűség függvény ismeretében kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}(\xi > \eta) = \iint_{x>y} f(x,y)\ dxy$$

Az ábra alapján választjuk az integrálási sorrendet



$$\mathrm{P}(\xi > \eta) = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\ dydx = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(-\frac{3}{4}x^2 + xy + 1 \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{3}{4}x^2 y + \frac{xy^2}{2} + y \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{x^3}{2} + x \right) dx$$

$$= \left[-\frac{3}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}.$$ 3 pt

13.

Markov–egyenlőtlenség; centrális határeloszlás–tétel

Házi feladatok

Markov–, Csebisev–egyenlőtlenség

- *Markov–egyenlőtlenség. Ha a ξ nem negatív véletlen változónak létezik a várható értéke, akkor bármely $\alpha > 0$ esetén*
$$\mathrm{P}\left(\xi \geq \alpha\right) \leq \frac{\mathrm{E}(\xi)}{\alpha}\,.$$
- *Csebisev–egyenlőtlenség. Ha a ξ véletlen változónak létezik a szórása, akkor bármely $\alpha > 0$ esetén*
$$\mathrm{P}\left(|\xi - \mathrm{E}(\xi)| \geq \alpha\right) \leq \frac{\mathrm{D}^2(\xi)}{\alpha^2}\,.$$

1. Feladat. Vitálij bácsi, felesége, Vaszília néni unszolására minden évben vesz egy malacot, hogy felhizlalja karácsonyra. Mivel mindig ugyanúgy tartja a jószágot, ezért feltehető, hogy a disznó vágósúlya, ξ, egy olyan véletlen változó, amely csak a genetikától függ. Mivel már sok az unoka – a lányok Derien, Dusmáta, Firtos, Főbe, és a fiúk Acsád, Atád, Gyécs, Gyeke, Zerénd és Zebadiás –, ezért Vitálij azt szeretné, ha legalább 240 kilós lenne a disznó karácsonyra.

(a) Legfeljebb mekkora valószínűséggel teljesül Vitálij bácsi kívánsága, ha sokéves tapasztalata szerint a disznó várhatóan 200 kilós lesz.
(b) Hogyan változik a valószínűségre adható becslés, ha Vitálij fia, Zajzon azt is megfigyelte, hogy ξ átlagosan $\sqrt{1.200}$ kilóval tér el a 200 kg–tól.
(c) Vitálij unokája, a műszaki matekot is tanuló Zebadiás azt is megállapította, hogy ξ egyenletes eloszlást követ. Mennyi a valószínűsége, hogy Vitálij bácsi kívánsága teljesül?

Megoldás.

(a) A disznó súlya csak pozitív értékeket vehet fel, és a várható érték is létezik, így alkalmazhatjuk a Markov–egyenlőtlenséget. Mivel $\mathrm{E}(\xi) = 200$, ezért
$$\mathrm{P}(\xi \geq 240) \leq \frac{200}{240} \qquad \approx 0{,}833\,.$$

(b) A szórás, $D(\xi) = \sqrt{1.200}$ ismeretében a Csebisev–egyenlőtlenség pontosabb becslést ad. A Csebisev–egyenlőtlenség az

$$A = |\xi - E(\xi)| \geq \alpha = |\xi - 200| \geq \alpha$$

esemény valószínűséget becsli, és ennek segítségével becsüljük a

$$B = \xi \geq 240 = \xi - 200 \geq 40$$

esemény valószínűségét. Ezért $\alpha = 40$, és ekkor $B \subset A$ miatt $P(B) \leq P(A)$, tehát

$$P(\xi \geq 240) \leq P\big(|\xi - E(\xi)| \geq 40\big) \leq \frac{D^2(\xi)}{40^2} = \frac{1.200}{40^2} \qquad = 0{,}75\,.$$

(c) Az eloszlás ismeretében a keresett valószínűség pontosan meghatározható. Mivel ξ egyenletes eloszlást követ valamilyen $[a, b]$ intervallumon, így

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 240) &= 1 - P(\xi < 240) = 1 - F(240) \\ &= 1 - \frac{240 - a}{b - a} = \frac{b - 240}{b - a}\,, \end{aligned}$$

azaz meg kell határoznunk az a, b értékeket.
A várható érték és a szórás ismeretében kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \frac{a + b}{2} \\ 400 &= a + b \\ b &= 400 - a \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} D^2(\xi) &= \frac{(b - a)^2}{12} \\ 14400 &= (b - a)^2 \\ 120 &= b - a \\ b &= a + 120\,. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} 400 - a &= a + 120 \\ a &= 140\,, \end{aligned}$$

és ezért $b = 260$. Azaz a keresett valószínűség:

$$P(\xi \geq 240) = \frac{b - 240}{b - a} = \frac{260 - 240}{260 - 140} \qquad \approx 0{,}167\,.$$

2. Feladat. Rozsályon az éves csapadékmennyiség átlagos értéke 640 mm. Feltehető, hogy a csapadék mennyisége az egyes években független egymástól.

(a) Legfeljebb milyen valószínűséggel fog tíz év alatt összesen legalább 5.800 mm csapadék lehullani?
(b) Ha azt is tudjuk, hogy az évi csapadék szórása 100 mm, akkor legfeljebb mekkora eséllyel fog a tízéves csapadékmennyiség 6.000 és 6.800 mm közé esni?

Megoldás. Jelölje ξ_n az n-edik évben, η pedig a 10 év alatt hullott csapadék mennyiségét milliméterben.

(a) Amennyiben csak a várható értéket ismerjük, a Markov–egyenlőtlenség segítségével tudunk a keresett valószínűségre becslést adni.

$$\mathrm{P}(\eta \geq 5.800) \leq \frac{\mathrm{E}(\eta)}{5.800}.$$

Tudjuk, hogy minden n esetén $\mathrm{E}(\xi_n) = 640$, így a várható érték linearitása miatt

$$\mathrm{E}(\eta) = \mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^{10} \xi_n\right) = \sum_{n=1}^{10} \mathrm{E}(\xi_n) = 6.400.$$

Ezek alapján

$$\mathrm{P}(\eta \geq 5.800) \leq \frac{6.400}{5.800} \qquad \approx 1{,}103,$$

azaz a Markov–egyenlőtlenségből csak a triviális

$$\mathrm{P}(\eta \geq 5.800) \leq 1$$

becslést kaptuk.

(b) A Csebisev–egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(6.000 < \eta < 6.800) &= \mathrm{P}\left(-400 < \eta - 6.400 < 400\right) = \mathrm{P}\left(-400 < \eta - \mathrm{E}(\eta) < 400\right) \\ &= \mathrm{P}\left(|\eta - \mathrm{E}(\eta)| < 400\right) \leq \frac{\mathrm{D}^2(\eta)}{400^2}.\end{aligned}$$

Mivel ξ_n–ek függetlenek egymástól, ezért

$$\mathrm{D}^2(\eta) = \mathrm{D}^2\left(\sum_{n=1}^{10} \xi_n\right) = \sum_{n=1}^{10} \mathrm{D}^2(\xi_n) = \sum_{n=1}^{10} 100^2 = 100.000.$$

Tehát

$$\mathrm{P}(6.000 < \eta < 6.800) \leq \frac{100.000}{160.000} \qquad = 0{,}625.$$

Normális eloszlás

- *A ξ véletlen változó normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással, $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ha sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- *A $\mu = 0$ és $\sigma = 1$ paraméterekhez tartozó eloszlást standard normális eloszlásnak nevezzük, eloszlásfüggvénye*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

- *Standardizálás. Ha $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, akkor $\eta := \dfrac{\xi - \mu}{\sigma}$ standard normális eloszlást követ, azaz $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$.*

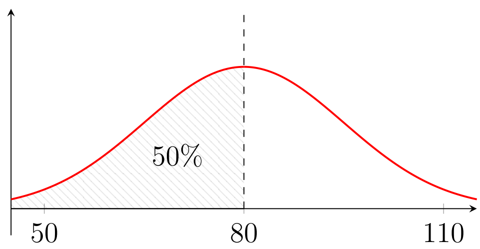
3. Feladat. A legutóbbi felmérések alapján a magyar egyetemisták testtömege normális eloszlást követ 80 kg várható értékkel és 15 kg szórással. Ennek fényében a közbeszerzésen 95 kg teherbírású székeket vettek a felújított egyetemre.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott egyetemista könnyebb 80 kg–nál?
(b) Mekkora valószínűséggel fog az új szék egy véletlenszerűen választott egyetemista alatt leszakadni?
(c) Mekkora teherbírású széket kellett volna beszerezni, ha azt szeretnénk, hogy az a hallgatók 95%–a alatt ne szakadjon le?
(d) A 10/2015. (VII.30.) HM rendelet alapján 50 kg a megengedett minimális testtömeg a harcoló alakulatoknál. A hallgatók hány százaléka alkalmatlan ezen követelmény miatt?

Megoldás. Jelölje ξ a véletlenszerűen választott egyetemista tömegét. Ekkor $\xi \sim \mathcal{N}(80, 15^2)$.

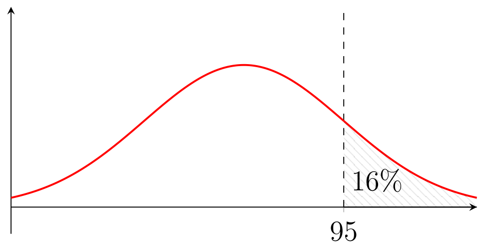
(a) A normális eloszlás sűrűségfüggvénye szimmetrikus az $x = \mathrm{E}(\xi)$ függőleges egyenesre, ezért

$$\mathrm{P}(\xi < 80) = \mathrm{P}\left(\xi < \mathrm{E}(\xi)\right) = \frac{1}{2}\,.$$



(b) A szék akkor szakad le, ha az egyetemista nehezebb mint 95 kg, ezért a $\mathrm{P}(\xi > 95)$ valószínűséget keressük. Ekkor az $\eta = \dfrac{\xi - 80}{15}$ véletlen változó kialakításával standardizálunk:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi > 95) &= \mathrm{P}\left(\xi - 80 > 95 - 80\right)\\ &= \mathrm{P}\left(\frac{\xi-80}{15} > \frac{95-80}{15}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\xi-80}{15} > 1\right)\\ &= \mathrm{P}(\eta > 1) = 1 - \mathrm{P}(\eta \le 1) = 1 - \Phi(1)\,.\end{aligned}$$



A fejezet végén található Φ eloszlástáblázat alapján $\Phi(1) \approx 0{,}8413$, tehát a keresett valószínűség

$$\mathrm{P}(\xi > 95) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0{,}8413 \qquad \approx 0{,}16\,.$$

(c) Keressük azt az x értéket, amelyre teljesül, hogy

$$\mathrm{P}(\xi \le x) = 0{,}95\,,$$

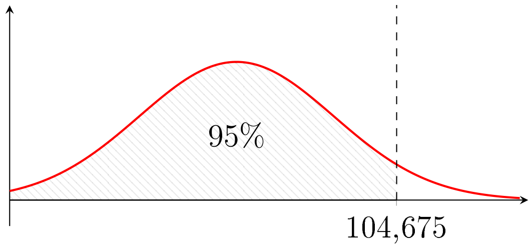
azaz

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi \le x) &= \mathrm{P}\left(\xi - 80 \le x - 80\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\xi-80}{15} \le \frac{x-80}{15}\right)\\ &= \mathrm{P}\left(\eta \le \frac{x-80}{15}\right) = \Phi\left(\frac{x-80}{15}\right) = 0{,}95\,.\end{aligned}$$

A standard normális eloszlás táblázata alapján

$$\frac{x-80}{15} \approx 1{,}645\,,$$

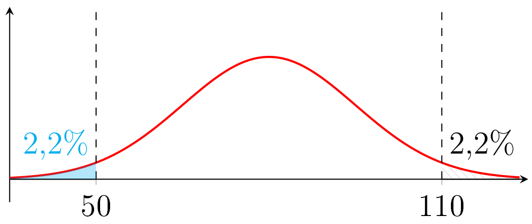
ahonnan $x \approx 104{,}675$. Tehát egy 105 kg teherbírású szék már megfelelt volna az igényeknek.



(d)

Ekkor a sűrűségfüggvény szimmetriája miatt

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\xi < 50) &= \mathrm{P}(\eta < -2) \\ &= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \\ &\approx 1 - 0{,}9773 \quad \approx 0{,}022\,, \end{aligned}$$



azaz a hallgatók 2,2 %–át biztosan nem vennék fel harcoló alakulathoz testtömegük miatt.

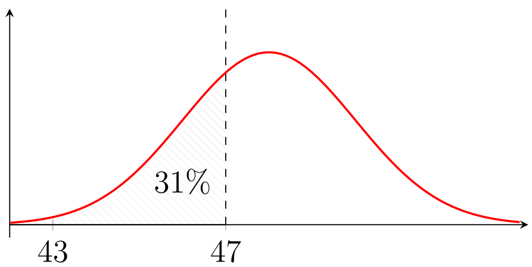
4. Feladat. Két jó barát, Barlám és Cirjék úgy döntött, hogy kézműves sört fognak előállítani. Vettek is ehhez egy adagológépet, amely 2 cl szórással dolgozik. A rafinált Barlám úgy állította be a gépet, hogy az átlagosan 4,8 dl sört töltsön minden üvegbe. Az elővigyázatos Cirjék azonban figyelmezteti, hogy ha a hatóság 470 ml–nél kevesebbet talál egy véletlenszerűen ellenőrzött üvegben, akkor megbüntetik őket.

(a) Mekkora valószínűséggel bünteti meg őket a hatóság?
(b) Barlám szerint vállalni kell a kockázatot, mert így is 10% felett van a fél liternél több sört tartalmazó üvegek részaránya. Igaza van? Mi az az érték, amely felett lesz az elkészített sörök 10%–a?
(c) Mekkora valószínűséggel esnek a sörök 4,5 és 5 dl közé?
(d) Cirjék azt szeretné kideríteni, hogy mely értékre áll fenn, hogy a sörök 95%–a ennél kevesebbel tér el a beállított 4,8 dl értéktől.

Megoldás. Jelölje ξ egy véletlenszerűen kiválasztott üvegben lévő sör mennyiségét centiliterben. Ekkor $\xi \sim \mathcal{N}(48, 4)$.

(a) Standardizálunk, majd bevezetjük az $\eta = \dfrac{\xi - 48}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$ valószínűségi változót. Így

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\xi < 47) &= \mathrm{P}\left(\frac{\xi-48}{2} < \frac{47-48}{2}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\eta < -\frac{1}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\approx 1 - 0{,}6915 \qquad \approx 0{,}31\,. \end{aligned}$$



(b) A fél liternél, azaz 50 cl–nél több sört tartalmazó üvegek részaránya

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi > 50) &= \mathrm{P}\left(\frac{\xi-48}{2} > \frac{50-48}{2}\right) = \mathrm{P}\left(\eta > 1\right)\\ &= 1-\mathrm{P}\left(\eta \le 1\right) = 1-\Phi\left(1\right) \approx 1-0{,}8413 \qquad \approx 0{,}16\,,\end{aligned}$$

tehát igaza van, az üvegek 16%–ában több sör van, mint fél liter.
Ha a 10%–os valószínűséghez tartozó érték x, akkor

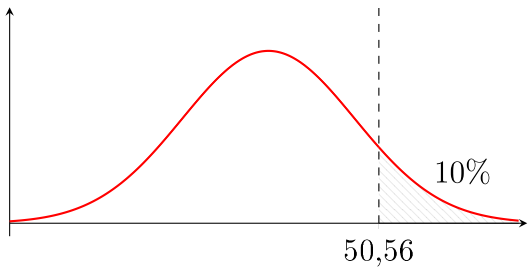
$$\begin{aligned}0{,}1 = \mathrm{P}(\xi > x) &= \mathrm{P}\left(\frac{\xi-48}{2} > \frac{x-48}{2}\right) = \mathrm{P}\left(\eta > \frac{x-48}{2}\right)\\ &= 1-\mathrm{P}\left(\eta \le \frac{x-48}{2}\right) = 1-\Phi\left(\frac{x-48}{2}\right)\end{aligned}$$

alapján

$$0{,}9 = \Phi\left(\frac{x-48}{2}\right)\,,$$

azaz

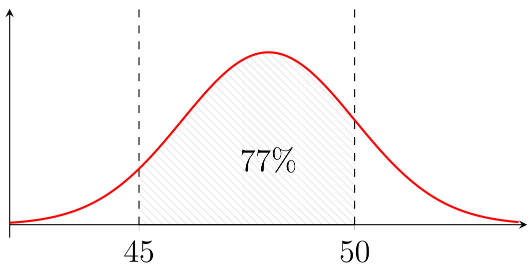
$$\begin{aligned}\frac{x-48}{2} &\approx 1{,}282\\ x-48 &\approx 2{,}562\\ x &\approx 50{,}56\,.\end{aligned}$$



(c) Annak a valószínűsége, hogy ξ értéke 45 és 50 közé esik

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(45 \le \xi \le 50) &= \mathrm{P}\left(\frac{45-48}{2} \le \frac{\xi-48}{2} \le \frac{50-48}{2}\right)\\ &= \mathrm{P}\left(-\frac{3}{2} \le \eta \le 1\right) = \mathrm{P}\left(\eta \le 1\right) - \mathrm{P}\left(\eta < -\frac{3}{2}\right)\\ &= \Phi(1) - \Phi\left(-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \Phi(1) - \left(1-\Phi\left(\frac{3}{2}\right)\right)\\ &= \Phi(1) + \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - 1\\ &\approx 0{,}8413 + 0{,}9332 - 1 \qquad \approx 0{,}77\,.\end{aligned}$$



(d) Most azt az x értéket keressük, melyre a sörök 95%–a $48 - x$ és $48 + x$ közé esik.

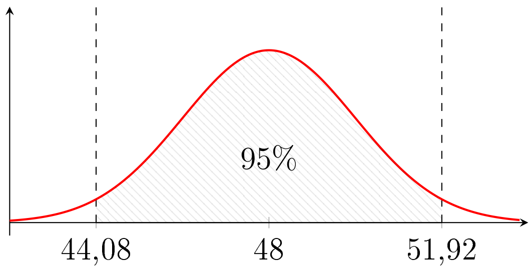
$$0{,}95 = \mathrm{P}(48 - x \le \xi \le 48 + x) = \mathrm{P}\left(\frac{-x}{2} \le \frac{\xi - 48}{2} \le \frac{x}{2}\right) = \mathrm{P}\left(-\frac{x}{2} \le \eta \le \frac{x}{2}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\eta \le \frac{x}{2}\right) - \mathrm{P}\left(\eta < -\frac{x}{2}\right) = \Phi\left(\frac{x}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{x}{2}\right) - 1\,.$$

Azaz

$$\Phi\left(\frac{x}{2}\right) = 0{,}975\,,$$

és így az eloszlástáblázat alapján

$$\frac{x}{2} \approx 1{,}96$$
$$x \approx 3{,}92\,.$$



Centrális határeloszlás–tétel

- *Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, azonos eloszlású véletlen változók, μ és σ közös várható értékkel és szórással, továbbá n elég nagy, akkor*
$$\mathrm{P}\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \approx \Phi(x)\,,$$
ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

5. Feladat. A Diablo 3 számítógépes játék elején sikerült egy *Fjord Cutter* fegyvert *loot*olni, amely ütésenként 8% eséllyel egy *Chilling Aura*t von körénk egy pillanatra, amely lefagyasztja a környezetünkben állókat. Az egyes fagyasztások bekövetkezése egymástól független. A *Fjord Cutter*t 2.500 ütés után cseréltük le, amikor is *loot*oltunk egy jobb fegyvert.

(a) Mi a valószínűsége, hogy használata során legalább 220 alkalommal vont körénk *Chilling Aura*t a fegyver?

(b) Adjunk meg egy olyan értéket, melyre teljesül, hogy 90%–os eséllyel ennél többször jelent meg *Chilling Aura* körülöttünk.

Megoldás. Jelölje ξ_i azt, hogy az i–edik ütés során jelent–e meg *Chilling Aura* körülöttünk, $i = 1, 2, \ldots 2.500 = n$. Ekkor a ξ_i–k egymástól függetlenek, Bernoulli–eloszlást követnek $p = 0{,}08$ paraméterrel, és így

$$\mu = \mathrm{E}(\xi_i) = 0{,}08 \quad \text{és} \quad \sigma = \mathrm{D}(\xi_i) = \sqrt{0{,}08 \cdot 0{,}92}\,.$$

(a) A centrális határeloszlás–tétel alapján

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{2.500} \xi_i \ge 220\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{2.500} \xi_i - 2.500 \cdot 0{,}08}{\sqrt{0{,}08 \cdot 0{,}92} \cdot \sqrt{2.500}} \ge \frac{220 - 2.500 \cdot 0{,}08}{\sqrt{0{,}08 \cdot 0{,}92} \cdot \sqrt{2.500}}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{2.500} \xi_i - 200}{\sqrt{184}} \ge \frac{20}{\sqrt{184}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{2.500} \xi_i - 200}{\sqrt{184}} < \frac{20}{\sqrt{184}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{184}}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}474) \approx 1 - 0{,}9292 \qquad \approx 0{,}071\,.$$

MEGJEGYZÉS. Természetesen

$$\eta = \sum_{i=1}^{2.500} \xi_i$$

binomiális eloszlást követ $p = 0{,}08$ és $n = 2.500$ paraméterekkel és

$$\mathrm{P}(\eta \geq 220) = \sum_{k=220}^{2.500} \binom{2.500}{k} 0{,}08^k \cdot 0{,}92^{2.500-k} \qquad \approx 0{,}076\,.$$

✠

(b) Ekkor azt az x értéket keressük, melyre

$$\begin{aligned} 0{,}9 = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{2.500} \xi_i > x\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{2.500} \xi_i - 200}{\sqrt{184}} > \frac{x-200}{\sqrt{184}}\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{2.500} \xi_i - 200}{\sqrt{184}} \leq \frac{x-200}{\sqrt{184}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{x-200}{\sqrt{184}}\right) = \Phi\left(-\frac{x-200}{\sqrt{184}}\right). \end{aligned}$$

Az eloszlástáblázat alapján

$$\begin{aligned} 1{,}282 &\approx -\frac{x-200}{\sqrt{184}} \\ x &\approx 200 - 1{,}282 \cdot \sqrt{184} \\ x &\approx 182{,}61\,. \end{aligned}$$

6. Feladat. Vitálij bácsi úgy döntött, hogy a disznóólba UV lámpát szerel fel, hogy a disznó ne fázzon, és ne is féljen a sötétben. Felvásárolta a helyi közértből az összes UV izzót, összesen 150 darabot. Az izzók élettartama egymástól független és exponenciális eloszlást követ. Sajnos az izzók igen gyenge minőségűek, és csak átlagosan 180 óráig működnek. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 3, de legfeljebb 3 és egynegyed évig lesz elegendő a megvásárolt izzómennyiség, ha amint kiég egy izzó, Vaszília néni rögtön betekeri a következőt?

Megoldás. Jelölje ξ_i az i–edik izzó élettartamát napokban. Mivel $\mathrm{E}(\xi_i) = \dfrac{180}{24} = 7{,}5$, ezért az exponenciális eloszlás paramétere $\lambda = \dfrac{1}{7{,}5}$, és így $\mathrm{D}(\xi_i) = 7{,}5$. Ha η jelöli, hogy hány napig elegendő a 150 izzó, akkor $\eta = \sum_{i=1}^{150} \xi_i$. Egy évet 365 naposnak számítva a keresett valószínűség

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(3 \cdot 365 \leq \eta \leq 3 \cdot 365 + \frac{365}{4}) &= \mathrm{P}(1095 \leq \eta \leq 1186{,}25) = \mathrm{P}(1095 \leq \sum_{i=1}^{150} \xi_i \leq 1186{,}25) \\ &= \mathrm{P}\left(-\frac{30}{150\sqrt{7{,}5}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{150} \xi_i - 150 \cdot 7{,}5}{150\sqrt{7{,}5}} \leq \frac{61{,}25}{150\sqrt{7{,}5}}\right) \\ &\approx \Phi(0{,}15) - \Phi(-0{,}07) = \Phi(0{,}15) + \Phi(0{,}07) - 1 \\ &\approx 0{,}5596 + 0{,}5279 - 1 \qquad \approx 0{,}088\,. \end{aligned}$$

Videók

Markov–, Csebisev–egyenlőtlenség

1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(a) A $\xi \geq 0$ véletlen változóra igaz, hogy $\mathrm{E}(\xi) = 5$. Legyen továbbá ξ eloszlásfüggvénye F. Becsüljük meg $\mathrm{P}(\xi \geq 12)$–t és $F_\xi(12)$–t.

(b) Egy üzletben hétfőn átlagosan 250–en vásárolnak. Becsüljük meg az

$$A = \text{hétfőn legfeljebb 300–an vásároltak}$$

esemény valószínűségét.

(c) A $\xi \geq 0$ véletlen változóra igaz, hogy $F_\xi(10) = 0{,}8$. Becsüljük meg $\mathrm{E}(\xi)$–t.

Megoldás.

(a) $\mathrm{P}(\xi \geq 12) \leq \dfrac{5}{12}$, $\dfrac{7}{12} \leq F_\xi(12)$

(b) $\mathrm{P}(A) \geq \dfrac{51}{301}$

(c) $\mathrm{E}(\xi) \geq 2$

2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi feladatokat a Csebisev–egyenlőtlenség segítségével.

(a) A ξ véletlen változóra igaz, hogy $\mathrm{E}(\xi) = 10$ és $\mathrm{D}(\xi) = 2$. Becsüljük meg a

$$\mathrm{P}(5 \leq \xi \leq 15)$$

esemény valószínűségét.

(b) A $\xi > 0$ véletlen változóra igaz, hogy $\mathrm{E}(\xi) = 5$ és $F_\xi(10) = 0{,}8$. Becsüljük meg $\mathrm{D}(\xi)$–t.

(c) Szegeden a sokéves átlagcsapadék 800 mm és a mért adatok szórása 50 mm. Becsüljük meg az

$$A = \text{900 mm–nél több csapadék hullott}$$

valószínűséget.

Megoldás.

(a) $\mathrm{P}(5 \leq \xi \leq 15) \geq \dfrac{21}{25}$

(b) $\mathrm{D}(\xi) \geq \sqrt{5}$

(c) $\mathrm{P}(A) \leq \dfrac{1}{4}$

Centrális határeloszlás–tétel

3. Feladat. A villanykörténk várható üzemideje 10.000 óra. Ebből 200 darabot véve, mennyi a valószínűsége, hogy

(a) átlagban 10.000 órát világítanak?
(b) átlagban legalább 9.000, de legfeljebb 11.000 órát világítanak?

Megoldás.

(a) $\dfrac{1}{2}$

(b) $2 \cdot \Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1$

4. Feladat. Az 1 kg–os liszt tömegét $\mathcal{N}(98, 9)$ eloszlásúnak tekintjük, ahol a tömeget dkg–ban értjük. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) egyet választva, az 96 dkg–nál kisebb tömegű, azaz selejt?
(b) ötöt választva legfeljebb kettő lesz selejt?

Megoldás.

(a) $1 - \Phi\left(\dfrac{2}{3}\right)$

(b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 + \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 + \dfrac{10}{16}\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$

5. Feladat. A valószínűségszámítás kurzust ebben a félévben 280 hallgató vette fel, és a korábbi tapasztalatok alapján az egyes hallgatók egymástól függetlenül 65% eséllyel teljesítik a kurzust.

(a) Várhatóan hányan fognak majd megbukni? Mennyi a bukott hallgatók számának a szórása?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy ebben a félévben legalább 90, de legfeljebb 106 bukás lesz?
(c) Milyen t értékre teljesül, hogy 0,9 eséllyel legfeljebb t hallgató bukik meg?

Megoldás.

6. Feladat. Egy játékautomatából egy mozgatható karral lehet plüsállatokat kiemelni, de ez egy kis szerencsét igényel. Az automatában 50 plüsállat van, egy játék 100 forintba kerül, és a próbálkozások egymástól függetlenül 20% valószínűséggel lesznek sikeresek.

(a) Várhatóan hány játék alatt fogynak el a plüsállatok az automatából? Mennyi a játékok számának a szórása?
(b) Várhatóan mennyi pénz lesz az automatában, mire elfogynak a plüsállatok? Mennyi az automatában összegyűlt pénz szórása?

Megoldás.

7. Feladat. Egy vállalat egy hónapra eső nyeresége a havi teljes bevétel és a havi teljes kiadás különbségeként áll elő, ahol a bevétel és a kiadás is valószínűségi változó. A bevétel várható értéke 120 millió forint 30 millió forint szórással, míg a kiadás várható értéke 80 millió forint 20 millió forint szórással. Határozzuk meg az egy hónapra jutó nyereség várható értékét és szórását akkor, ha a bevétel és a kiadás független, illetve akkor, ha a közöttük lévő korrelációs együttható 0,8! A korreláció függvényében írjuk fel formulával és ábrázoljuk grafikonon a nyereség várható értékét és varianciáját!

Megoldás.

8. Feladat. Adott egy kötvény és egy részvény. A kötvény a mai napon 1000 forintba kerül, és 8%-os éves hozamot fizet. A részvény jelenlegi ára 2000, és egy év múlva 1900, 2300 vagy 2700 forintot érhet rendre 0,3, 0,5 és 0,2 valószínűségekkel. 3 millió forint áll a rendelkezésünkre, ebből állítunk össze egy portfóliót.

(a) Ha "a" darab részvényt vásárolunk, akkor ez az értékpapírcsomag várhatóan mennyit fog majd érni egy év múlva? Mennyi a portfólió értékének a szórása? Ábrázoljuk a várható értéket és a szórást az "a" mennyiség függvényében.
(b) Hogyan állítsuk össze a portfóliónkat, ha az a célunk, hogy várható értékben 400 ezer forint hozamot realizáljunk?
(c) Hány darab részvényt vásároljunk, ha azt szeretnénk, hogy a portfólió jövőbeli értékének a szórása 140 ezer forint legyen? Mennyi ebben az esetben a hozam várható értéke?

Megoldás.

9. Feladat. Egy Coca-Cola autómatában 50 doboz jéghideg üdítő található. Egy forró nyári napon az emberek átlagosan 5 percenként vásárolnak egy doboz üdítőt, a vásárlások között eltelt idő szórása 3 perc.

(a) Várhatóan mennyi idő alatt fogy el az üdítő az autómatából? Mennyi ennek az időnek a szórása?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy ez az idő 220 és 270 perc közé esik?
(c) Adjunk meg egy olyan t értéket, melyre teljesül, hogy az autómata 99% eséllyel kifogy ennyi idő alatt.

Megoldás.

Kvízek

A csoport

Feladat. A mozambiki Zambézia Licua városában az ország fő exportcikkéből, kesudiófából épülnek az iskolák (is). A helyi lakosok, a makuák a bejárati ajtókat pontosan 120 cm szélesre építik. A malawi Chilwa tóban elő vízilovak átlag szélessége 115 cm, 8 cm szórással. A helyi makua iskolaigazgatónak, Oluwafunmilayo Quadratnak fel kell készülnie minden eshetőségre, ugyanis a víziló az egyik legveszélyesebb állat az emberre nézve Afrikában.

(a) Milyen becslést tudunk adni arra az esetre, hogy egy, az említett tóból elkóborolt víziló minden nehézség nélkül be tud menni egy iskola ajtaján?
(b) Mekkora ez a valószínűség, ha a vízilovak szélessége normális eloszlást követ?
(c) Mekkora lenne ez a valószínűség, ha a helyi asztalosok által készített ajtók szélessége is normális eloszlást követne 120 cm várható értékkel és 5 cm szórással.

B csoport

Feladat. A coloradói Oak Creek városkájának a Lupita Cantine's melletti üzemanyagtöltő állomás jelenlegi készlete 74.000 gallon ólmozatlan benzin. A heti fogyasztás normális eloszlást követ 50.000 gallonos várható értékkel és 10.000 gallonos szórással. A 900 lakost számláló kisvárosba azonban csak heti 47.000 gallon benzinutánpótlás érkezik.

(a) Ha 4 dollár/gallon üzemanyagárral számolunk, mekkora az esélye, hogy a heti bevétel nem éri el a 196.000 dollárt?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a 9. hét végére a benzinkút készlete 20.000 gallon alá esik?
(c) Mekkora szállítmányt kellene rendelni hetente, hogy az előbbi valószínűség 5% legyen?

C csoport

Feladat. Egy kupakgyűjtős nyereményjáték fődíjasaként a 23 éves Bakta Polidor ellátogathatott a Las Vegas-i Excalibur Casinoba, ahol még 2.000 szabadon elkölthető zsetont is kapott. A kaszinóban éppen játék–expo volt, ahol a játékgyártók új játékötleteit mutatták be. Polidor az új Kakekiko játékot probálta ki. Ebben a nyerési esély 1 a 10–hez, és nyereményként a játékos visszakapja a feltett összeget, és annak kilencszeresét. Bakta Polidor nagyon szeretett volna nyerni, mert a Budapest Főváros Kormányhivatalához benyújtott másodszori névváltoztatási kérelme, amelyben barátnője, a 22 éves Hina Ividő Kandida javaslatára a Sjám Upor Zdenkó név felvételét kérvényezte, már 50.000 Ft–ba kerül. Sajnos egy zseton csak 9,5 centet ért, és a bank 1 dollárt csak 250 Ft–ért vett meg. Ezért az óvatos Polidor a játék során midig csak egy zsetont tett fel. Mennyi a valószínűsége, hogy a 900–adik Kakekiko játék után 30–cal több zsetonja volt?

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása.

(a) Legyen η a vízilovak szélessége cm–ben. Ekkor

$$\mathrm{E}(\eta) = 115 \quad \text{és} \quad \mathrm{D}^2(\eta) = 64\,.$$

A $\mathrm{P}(\eta < 120)$ valószínűséget keressük, azonban becslést $\mathrm{P}(\eta \geq 120)$–ra tudunk adni. A Markov–egyenlőtlenség alapján

$$\mathrm{P}(\eta \geq 120) \leq \frac{115}{120}\,.$$

A Csebisev–egyenlőtlenség alapján

$$\mathrm{P}(\eta \geq 120) = \mathrm{P}(\eta - \mathrm{E}(\eta) \geq 5) \leq \mathrm{P}(|\eta - \mathrm{E}(\eta)| \geq 5) \leq \frac{64}{25}\,,$$

1 pt

ami nagyobb, mint 1. Ezek alapján a Markov–egyenlőtlenség adja a jobb becslést:

$$\mathrm{P}(\eta < 120) = 1 - \mathrm{P}(\eta \geq 120) \geq 1 - \frac{115}{120}\,.$$

(b) Ha $\eta \sim \mathcal{N}(115, 64)$, akkor

$$\mathrm{P}(\eta < 120) = \mathrm{P}\left(\frac{\eta - 115}{8} < \frac{5}{8}\right) = \Phi\left(\frac{5}{8}\right) = \Phi(0{,}65) \approx 0{,}7422.$$

2 pt

(c) Legyen ξ az ajtók szélessége cm–ben. Ekkor $\xi \sim \mathcal{N}(120, 25)$, és $\zeta = \eta - \xi \sim \mathcal{N}(-5, 89)$. A keresett valószínűség

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\eta < \xi) = \mathrm{P}(\zeta < 0) &= \mathrm{P}\left(\frac{\zeta + 5}{\sqrt{89}} < \frac{5}{\sqrt{89}}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{89}}\right) \approx \Phi\,(0{,}53) \approx 0{,}7019\,.\end{aligned}$$

3 pt

B csoport

Feladat megoldása. Jelölje ξ az egy heti fogyasztást ezer gallonban, ekkor $\xi \sim \mathcal{N}(50, 10^2)$.

(a) A heti bevétel 4ξ ezer dollárban. Ekkor

$$\mathrm{P}(4\xi \le 196) = \mathrm{P}(\xi \le 49) = \mathrm{P}\left(\frac{\xi - 50}{10} \le \frac{49 - 50}{10}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\xi - 50}{10} \le -0{,}1\right)$$
$$= \Phi(-0{,}1) = 1 - \Phi(0{,}1) \approx 1 - 0{,}5398.$$

1 pt

(b) Ha ξ_i jelöli a heti fogyasztást, akkor a 9. hét végén a készlet

$$74 + 9 \cdot 47 - \sum_{i=1}^{9} \xi_i$$

ezer gallon. Ekkor

$$\mathrm{P}\left(74 + 9 \cdot 47 - \sum_{i=1}^{9} \xi_i < 20\right) = \mathrm{P}\left(477 < \sum_{i=1}^{9} \xi_i\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{9} \xi_i \le 477\right)$$
$$= 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{9} \xi_i - 9 \cdot 50}{10\sqrt{9}} \le \frac{477 - 9 \cdot 50}{10\sqrt{9}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{9} \xi_i - 450}{30} \le 0{,}9\right)$$
$$\approx 1 - \Phi(0{,}9) \approx 1 - 0{,}8159\,.$$

2 pt

(c) Legyen a heti szállítmány x ezer gallon. Ekkor

$$\mathrm{P}\left(74 + 9 \cdot x - \sum_{i=1}^{9} \xi_i < 20\right) = \mathrm{P}\left(54 + 9x < \sum_{i=1}^{9} \xi_i\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{9} \xi_i \le 54 + 9x\right)$$
$$= 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{9} \xi_i - 9 \cdot 50}{10\sqrt{9}} \le \frac{54 + 9x - 9 \cdot 50}{10\sqrt{9}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{9x - 396}{30}\right) = 0{,}05\,,$$

azaz

$$\Phi\left(\frac{9x - 396}{30}\right) = 0{,}95\,.$$

A táblázat alapján $\Phi(1{,}645) \approx 0{,}95$, ezért

$$\frac{9x - 396}{30} \approx 1{,}645$$
$$x \approx \frac{1{,}645 \cdot 30 + 396}{9}$$

ezer gallon.

3 pt

C csoport

Feladat megoldása. Jelölje ξ_i az i–edik alkalommal nyert, vagy vesztett zsetonok számát. Ekkor

$$\mathrm{P}(\xi_i = 9) = \frac{1}{10} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{P}(\xi_i = -1) = \frac{9}{10}\,.$$

A

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{900} \xi_i > 30\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{900} \xi_i \le 30\right)$$ 1 pt

valószínűséget keressük. Mivel

$$\mathrm{E}(\xi_i) = 9 \cdot \frac{1}{10} - 1 \cdot \frac{9}{10} = 0\,,$$
$$\mathrm{E}(\xi_i^2) = 81 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{9}{10} = \frac{90}{10} = 9\,,$$

és

$$\mathrm{D}^2(\xi_i) = 9, \qquad \text{azaz} \qquad \mathrm{D}(\xi_i) = 3\,,$$ 2 pt

így

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{900} \xi_i \le 30\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{900} \xi_i - 0}{3\sqrt{900}} \le \frac{30-0}{3\sqrt{900}}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{900} \xi_i}{90} \le \frac{1}{3}\right) \approx \Phi(0{,}33) \approx 0{,}6293\,,$$

tehát

$$1 - \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{900} \xi_i \le 30\right) \approx 1 - 0{,}6293\,.$$ 3 pt

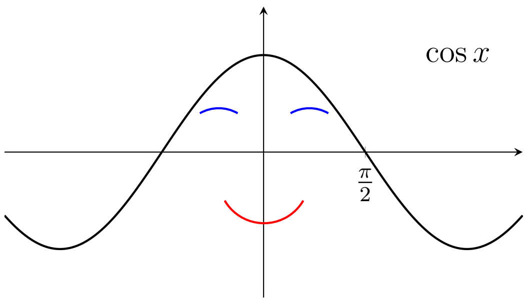
A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

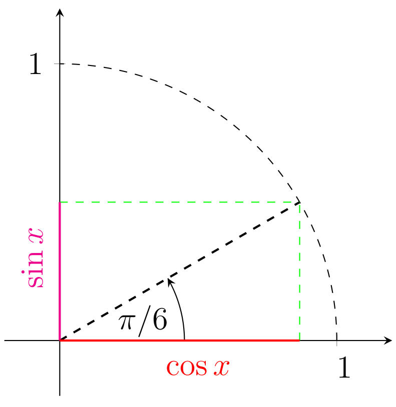
z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,01	0,5040	0,44	0,6700	0,87	0,8079	1,30	0,9032	1,73	0,9582	2,32	0,9898
0,02	0,5080	0,45	0,6736	0,88	0,8106	1,31	0,9049	1,74	0,9591	2,34	0,9904
0,03	0,5120	0,46	0,6772	0,89	0,8133	1,32	0,9066	1,75	0,9599	2,36	0,9909
0,04	0,5160	0,47	0,6808	0,90	0,8159	1,33	0,9082	1,76	0,9608	2,38	0,9913
0,05	0,5199	0,48	0,6844	0,91	0,8186	1,34	0,9099	1,77	0,9616	2,40	0,9918
0,06	0,5239	0,49	0,6879	0,92	0,8212	1,35	0,9115	1,78	0,9625	2,42	0,9922
0,07	0,5279	0,50	0,6915	0,93	0,8238	1,36	0,9131	1,79	0,9633	2,44	0,9927
0,08	0,5319	0,51	0,6950	0,94	0,8264	1,37	0,9147	1,80	0,9641	2,46	0,9931
0,09	0,5359	0,52	0,6985	0,95	0,8289	1,38	0,9162	1,81	0,9649	2,48	0,9934
0,10	0,5398	0,53	0,7019	0,96	0,8315	1,39	0,9177	1,82	0,9656	2,50	0,9938
0,11	0,5438	0,54	0,7054	0,97	0,8340	1,40	0,9192	1,83	0,9664	2,52	0,9941
0,12	0,5478	0,55	0,7088	0,98	0,8365	1,41	0,9207	1,84	0,9671	2,54	0,9945
0,13	0,5517	0,56	0,7123	0,99	0,8389	1,42	0,9222	1,85	0,9678	2,56	0,9948
0,14	0,5557	0,57	0,7157	1,00	0,8413	1,43	0,9236	1,86	0,9686	2,58	0,9951
0,15	0,5596	0,58	0,7190	1,01	0,8438	1,44	0,9251	1,87	0,9693	2,60	0,9953
0,16	0,5636	0,59	0,7224	1,02	0,8461	1,45	0,9265	1,88	0,9699	2,62	0,9956
0,17	0,5675	0,60	0,7257	1,03	0,8485	1,46	0,9279	1,89	0,9706	2,64	0,9959
0,18	0,5714	0,61	0,7291	1,04	0,8508	1,47	0,9292	1,90	0,9713	2,66	0,9961
0,19	0,5753	0,62	0,7324	1,05	0,8531	1,48	0,9306	1,91	0,9719	2,68	0,9963
0,20	0,5793	0,63	0,7357	1,06	0,8554	1,49	0,9319	1,92	0,9726	2,70	0,9965
0,21	0,5832	0,64	0,7389	1,07	0,8577	1,50	0,9332	1,93	0,9732	2,72	0,9967
0,22	0,5871	0,65	0,7422	1,08	0,8599	1,51	0,9345	1,94	0,9738	2,74	0,9969
0,23	0,5910	0,66	0,7454	1,09	0,8621	1,52	0,9357	1,95	0,9744	2,76	0,9971
0,24	0,5948	0,67	0,7486	1,10	0,8643	1,53	0,9370	1,96	0,9750	2,78	0,9973
0,25	0,5987	0,68	0,7517	1,11	0,8665	1,54	0,9382	1,97	0,9756	2,80	0,9974
0,26	0,6026	0,69	0,7549	1,12	0,8686	1,55	0,9394	1,98	0,9761	2,82	0,9976
0,27	0,6064	0,70	0,7580	1,13	0,8708	1,56	0,9406	1,99	0,9767	2,84	0,9977
0,28	0,6103	0,71	0,7611	1,14	0,8729	1,57	0,9418	2,00	0,9773	2,86	0,9979
0,29	0,6141	0,72	0,7642	1,15	0,8749	1,58	0,9429	2,02	0,9783	2,88	0,9980
0,30	0,6179	0,73	0,7673	1,16	0,8770	1,59	0,9441	2,04	0,9793	2,90	0,9981
0,31	0,6217	0,74	0,7704	1,17	0,8790	1,60	0,9452	2,06	0,9803	2,92	0,9983
0,32	0,6255	0,75	0,7734	1,18	0,8810	1,61	0,9463	2,08	0,9812	2,94	0,9984
0,33	0,6293	0,76	0,7764	1,19	0,8830	1,62	0,9474	2,10	0,9821	2,96	0,9985
0,34	0,6331	0,77	0,7794	1,20	0,8849	1,63	0,9484	2,12	0,9830	2,98	0,9986
0,35	0,6368	0,78	0,7823	1,21	0,8869	1,64	0,9495	2,14	0,9838	3,00	0,9987
0,36	0,6406	0,79	0,7852	1,22	0,8888	1,65	0,9505	2,16	0,9846	3,20	0,9993
0,37	0,6443	0,80	0,7881	1,23	0,8907	1,66	0,9515	2,18	0,9854	3,40	0,9997
0,38	0,6480	0,81	0,7910	1,24	0,8925	1,67	0,9525	2,20	0,9861	3,60	0,9998
0,39	0,6517	0,82	0,7939	1,25	0,8944	1,68	0,9535	2,22	0,9868	3,80	0,9999
0,40	0,6554	0,83	0,7967	1,26	0,8962	1,69	0,9545	2,24	0,9875	4,00	1,0000
0,41	0,6591	0,84	0,7995	1,27	0,8980	1,70	0,9554	2,26	0,9881		
0,42	0,6628	0,85	0,8023	1,28	0,8997	1,71	0,9564	2,28	0,9887		
0,43	0,6664	0,86	0,8051	1,29	0,9015	1,72	0,9573	2,30	0,9893		

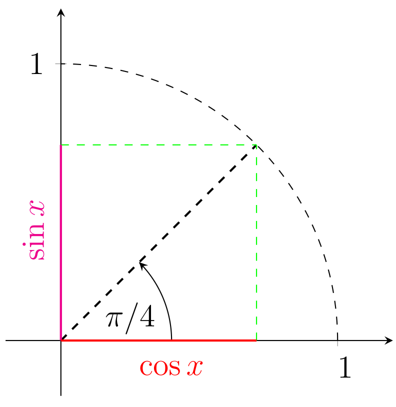
Előismeretek

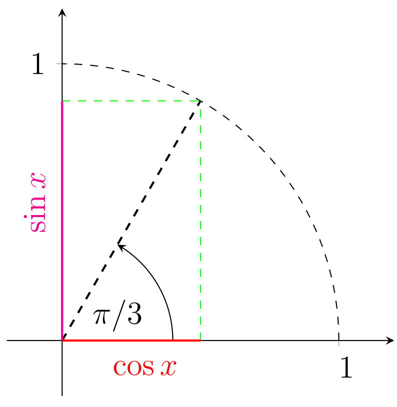
Trigonometrikus függvények

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–









Sorok

- Ha $a_n \not\to 0$, akkor a $\sum a_n$ számsor divergens,
  ha $a_n \to 0$, akkor további vizsgálat szükséges.
- A $\sum q^n$ geometriai sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor
  $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,.$$
- A $\sum \frac{1}{n^p}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $p > 1$.

- Összehasonlító teszt. Amennyiben $a_n, b_n > 0$ és
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^+ ,$$
akkor $\sum a_n \sim \sum b_n$, azaz a két sor hasonlóan viselkedik, vagyis, ha valamelyik konvergens (divergens), akkor a másik is konvergens (divergens).
- Hányados teszt. Legyen $a_n > 0$, és
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varrho \in \mathbb{R}_0^+ ,$$
ekkor a $\sum a_n$ sor
$$\begin{aligned} &\varrho < 1 \text{ esetén konvergens} , \\ &\varrho > 1 \text{ esetén divergens} , \\ &\varrho = 1 \text{ esetén további vizsgálat szükséges} . \end{aligned}$$
- A $\sum b_n$ sor
  - abszolút konvergens, amennyiben a $\sum |b_n|$ sor konvergens;
  - feltételesen konvergens, amennyiben konvergens, de nem abszolút konvergens.
- Legyen $a_n > 0$, ekkor a $\sum(-1)^n a_n$ számsort alternáló sornak nevezzük.
- Leibniz–kritérium. Ha $a_n \to 0$ és a_n monoton csökkenő, akkor a $\sum(-1)^n a_n$ alternáló sor konvergens.
- A $\sum f_n(x)$ függvénysor konvergens az x_0 pontban, amennyiben a $\sum f_n(x_0)$ számsor konvergens. Egy függvénysor konvergenciatartománya a közös értelmezési tartomány azon pontjainak a halmaza, amelyekben a megfelelő számsorok konvergensek.
- Néhány nevezetes függvény $a = 0$ pont körüli Taylor–sora:
$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} , \quad x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} , \quad x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} , \quad x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} , \quad x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} , \quad x \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$
- Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén, ha $|x| < 1$, akkor
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n ,$$
ahol
$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \text{és} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$
az általánosított binomiális együtthatók.

Fourier–sor

A 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény valós Fourier–sora az

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

függvénysor, ahol

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx\,, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\ dx\,, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\ dx\,.$$

Halmazelmélet

De Morgan–azonosságok és következmények:

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\
A \cup B &= \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \\
A \cap B &= \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \\
A \setminus B &= A \cap \overline{B}\,.
\end{aligned}$$