

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

MŰSZAKI MATEMATIKA 1

GYAKORLATI JEGYZET

Készítette: Fülöp Vanda és Szabó Tamás

Utoljára módosítva: 2022. február 3.

SZÉCHENYI 



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

© Szegedi Tudományegyetem, Természettudományi és Informatikai Kar, Bolyai Intézet

Lektorálta: Bogya Norbert

Grafikai szerkesztő: Szilas László

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014, „A Szegedi Tudományegyetem oktatási és szolgáltatási teljesítményének innovatív fejlesztése a munkaerő-piaci és a nemzetközi verseny kihívásaira való felkészülés jegyében”.

Tartalomjegyzék

Előszó	1
1. Iránymező; szétválasztható változójú differenciálegyenlet	2
Házi feladatok	2
Videók	10
Kvízek	13
2. Változóiban homogén fokszámú differenciálegyenlet; lineáris differenciálegyenlet	18
Házi feladatok	18
Videók	24
Kvízek	26
3. Másodrendű hiányos differenciálegyenlet	32
Házi feladatok	32
Videók	38
Kvízek	40
4. Laplace-transzformált; alkalmazás	44
Házi feladatok	44
Videók	51
Kvízek	55
5. Geometriai sor; teleszkopikus sor; összehasonlító teszt	61
Házi feladatok	61
Videók	68
Kvízek	72
6. Gyök, hányados teszt; integrál teszt; alternáló sor; számsor becslése	77
Házi feladatok	77
Videók	84
Kvízek	89
7. Függvénysor konvergenciája; Fourier-sor	93
Házi feladatok	93
Videók	100
Kvízek	104

8. Taylor–sor; binomiális sor	108
Házi feladatok	108
Videók	114
Kvízek	119
9. Többváltozós függvények értelmezési tartománya, határértéke	123
Házi feladatok	123
Videók	131
Kvízek	135
10. Derivált; lokális szélsőérték	139
Házi feladatok	139
Videók	146
Kvízek	149
11. Feltételes szélsőérték	153
Házi feladatok	153
Videók	161
Kvízek	164
12. Egzakt differenciálegyenlet; vonalintegrál	168
Házi feladatok	168
Videók	174
Kvízek	177
13. Integrál	181
Házi feladatok	181
Videók	189
Kvízek	194
Előismeretek	198
Értelmezési tartomány	198
Polinomosztás; elemi törtekre bontás	199
Sorozatok határértéke	202
Valós függvények határértéke	204
Differenciálhányados; L'Hospital–szabály	206
Szélsőérték	208
Határozatlan integrál	209
Határozott integrál; improprius integrál	213

Előszó

Ezt a jegyzetet az elmúlt években tartott régi Műszaki matematika kurzus anyaga alapján, a teljesség igényével állítottuk össze a műszaki informatikus hallgatóknak tartott új Műszaki matematika 1. tárgy gyakorlati részéhez.

Az első 13 fejezetet a gyakorlati óráknak megfelelően alakítottuk ki. Minden egyes részben 3 alfejezetben – Házi feladat, Videók, Kvízek – ismételjük át, egészítjük ki, mélyítjük el, majd kérjük számon az adott gyakorlat anyagát. Részletes megoldások ismertetésével kezdünk, ezt követően további példákon keresztül, több mint 200 videó segítségével fejlesztjük a hallgatók megoldási készségét, végezetül lehetőséget biztosítunk az önértékelésre, a felkészültségük ellenőrzésére. Az utolsó fejezetben – Előismeretek – foglaltuk össze a kurzus előfeltételének, a Kalkulus I. informatikusoknak tárgy gyakorlati anyagának azon részeit, melyek ismerete elengedhetetlenül szükséges az új anyag sikeres elsajátításához.

Biztosak vagyunk abban, hogy a gyakorlaton való aktív részvétel és ezen jegyzet feladatainak megoldása után a hallgató képes matematikai modellek azonosítására, rendszerbe foglalására, emlékezetébe vési és így felismeri a feladattípusokat, felidézi a lehetséges megoldásokat, meghatározza a helyes eljárást és megvalósítja azt. Készségeinek fejlesztése mellett olyan képesség birtokába kerül, melyek segítségével tisztán és egyértelműen elmagyarázza, kifejti eredményét.

Köszönjük Balázs Benája, Bogya Rancióna, Borsos Adelgund, Csányi Adeodáta, Dénes Csaga, Dudás Erátó, Fekete Fehér Fehérke, Gémes Ifigénia, Dr. Gyöngyösi Lulané, Herczeg Immakuláta, Karsai Psziché, Dr. Kátai–Urbán Nurbanuné, Kertész Szüntüké, Dr. Kiss Anfetamea, Möczyné Ünige Gábor, Kosztolányi Maminti, Lantos Mátka, Dr. Nagy Szengláhák, Osztyényi Cilané, Patai Annunciáta, Pete Ájlin, Dr. Pósfai Akaiéna, Pósfai Baucisz, Rácz Témisz, Dr. Rója Szengláhák, Rovó Pszichá, Ruff Nájiká, Szijártó Vrindávani, Dr. Tekeli Csaga, Tekeli Kandida Kilit, Trungel–Nagy Ánfissza, Dr. Varga Tamerlán, Zarnócz Manóhar, Zombory Naftali, Balázs Táblácska, Bogya Cukorka, Borsos Balaton, Csányi Főni, Dr. Dénes Havadisa, Dr. Dudás Jinx, Fekete Móka Fajsz, Gémes Polikárp, Gyöngyösi Vérbulcsú, Dr. Herczeg Kandida, Karsai Küllikki, Dr. Kátai–Urbán Skolasztika, Kertész Cvi, Dr. Kiss Jukundusz, Dr. Körmöczyné Bozsó Modesztusz, Kosztolányi Manóhar, Lantos Góvinda, Dr. Nagy Kratosz, Osztyényi Odiló, Dr. Patai Polikárp, Dr. Pete Piramusz, Pósfai Nepomuk, Pósfai Kücsid, Rácz Csatár, Rója Alpikár, Rovó Apaj, Dr. Ruff Euszták, Szíjjártó Agamennon, Szbtmsz, Tekeli Karcsa, Tekeli Karion, Dr. Trungel–Nagy Tonuzóba, Varga Vitályos, Zarnócz Zilió, Zombory Zuriel segítségét.

A készítőik

1.

Íránymező; szétválasztható változójú differenciálegyenlet

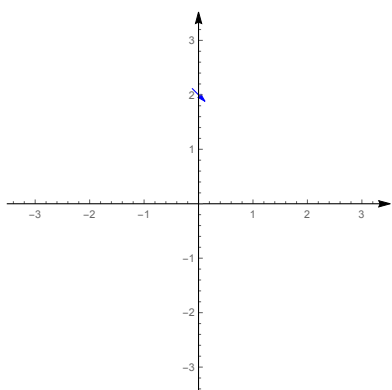
Házi feladatok

Íránymező

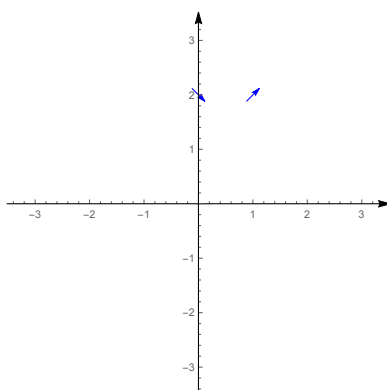
1. Feladat. Vázlatosan ábrázoljuk az $y' = 2x - y + 1$ differenciálegyenlethez tartozó iránymezőt.

Megoldás. A megoldás során azt a tényt használjuk, hogy egy differenciálható függvény egyenlővel megközelíthető, pontosabban az érintő egyenlővel helyettesíthető az érintési pont kis környezetében. Ezeket a kis érintő szakaszokat felvéve kapjuk meg a differenciálegyenlethez tartozó iránymezőt.

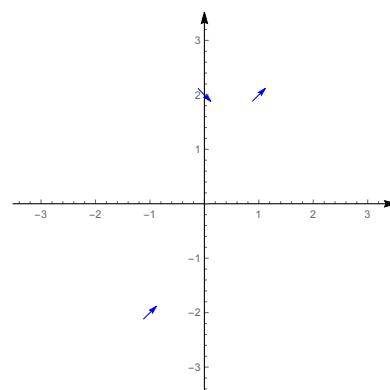
A fenti egyenletből kapjuk, hogy az (x, y) ponton áthaladó megoldásfüggvény érintőjének meredeksége az $y' = 2x - y + 1$ összefüggés alapján kiszámítható. Így például a $(0, 2)$ pontban, azaz az $x = 0$ és $y = 2$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $y' = -1$. Ennek megfelelően a $(0, 2)$ pontba egy -1 meredekségű szakaszt rajzolunk (1. ábra). Hasonlóan kapjuk, hogy az $(1, 2)$ pontban, $y' = 1$ (2. ábra). De a $(-1, -2)$ pontban is $y' = 1$ ugyanúgy, mint az előbb (3. ábra).



1. ábra



2. ábra

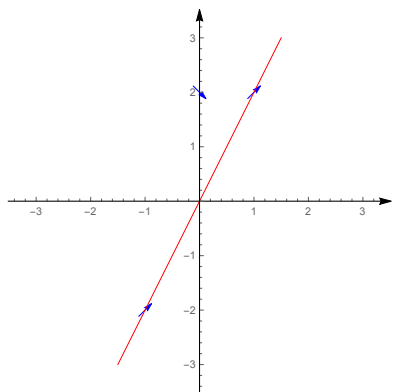


3. ábra

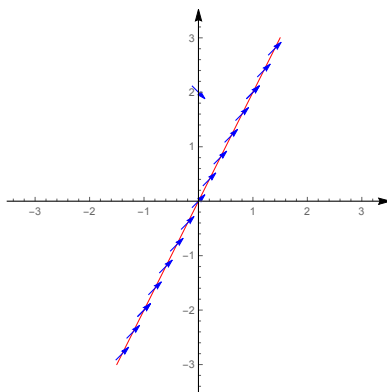
Ha az egyenletben az $y' = 1$ helyettesítéssel élünk, akkor megkapjuk a sík azon pontjait, melynek minden pontjában a megoldásfüggvénynek 1 a meredeksége, tehát $1 = 2x - y + 1$

alapján az $y = 2x$ egyenletű egyenest (4. ábra). Így sokkal több szakaszt tudunk felvenni egy lépésben (5. ábra).

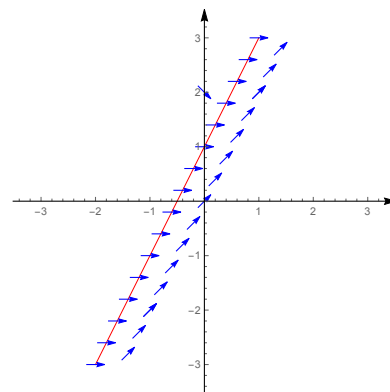
Ezért a továbbiakban így haladunk tovább, azaz a derivált függvénynek, y' -nek adunk értéket. Például az $y' = 0$ helyettesítésből az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenest kapjuk, melynek minden pontjában a megoldásfüggvénynek 0 a meredeksége (6. ábra).



4. ábra

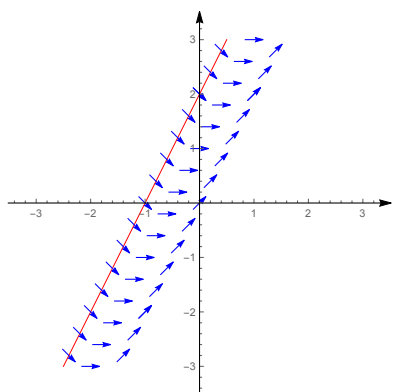


5. ábra

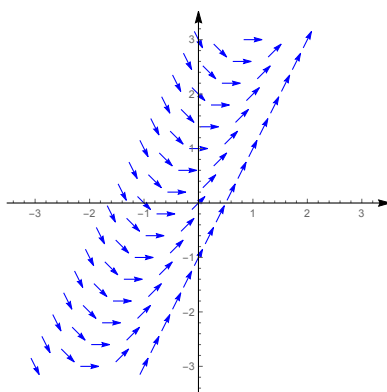


6. ábra

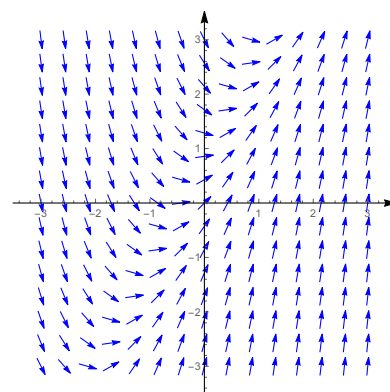
Amennyiben $y' = -1$, akkor $y = 2x + 2$ (7. ábra). Hasonlóan kapjuk, hogy a meredekség $y' = 2$, illetve $y' = -2$ az $y = 2x - 1$, illetve az $y = 2x + 3$ egyenes pontjaiban (8. ábra). Így már jól látható a tényleges megoldás (9. ábrán), ezt számítógépes programmal készítettük.



7. ábra



8. ábra



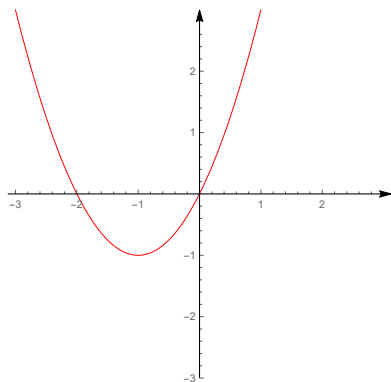
9. ábra

2. Feladat. Vázlatosan ábrázoljuk az $y' = x^2 + 2x - y$ differenciálegyenlethez tartozó iránymezőt.

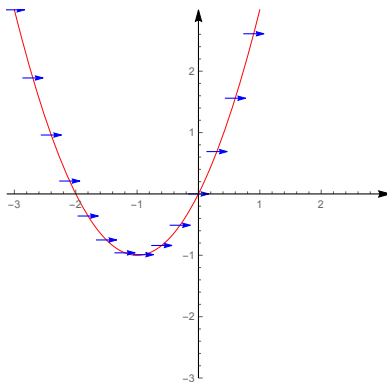
Megoldás. Az előző feladat alapján már rögtön azzal kezdünk, hogy meghatározzuk azokat a pontokat a síkon melyekben a megoldásfüggvény érintőjének meredeksége állandó, például $y' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ stb.

Ha $y' = 0$, akkor az egyenletbe behelyettesítve az $y = x^2 + 2x$ görbét kapjuk (1. ábra), és a 0 meredekség miatt vízszintes szakaszokat rajzolunk (2. ábra). Az $y' = 1$, illetve $y' = 2$ helyettesítéssel az $y = x^2 + 2x - 1$, illetve $y = x^2 + 2x - 2$ görbéket kapjuk (3. ábra), melyek pontjaiba 1, illetve 2 meredekségű kis szakaszokat rajzolunk (4. ábra).

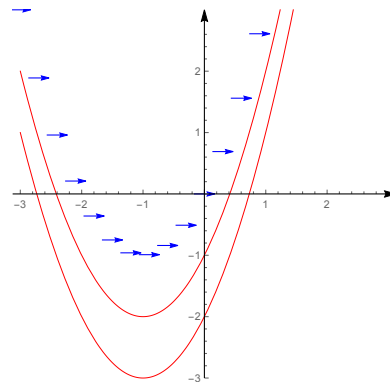
Hasonlóan kapjuk az $y' = -1$, illetve $y' = -2$ meredekségű kis szakaszokat az $y = x^2 + 2x + 1$, illetve $y = x^2 + 2x + 2$ görbék pontjaiban (5. ábra). A tényleges iránymezőt a 6. ábrán láthatjuk.



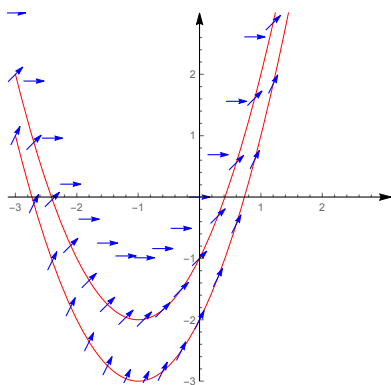
1. ábra



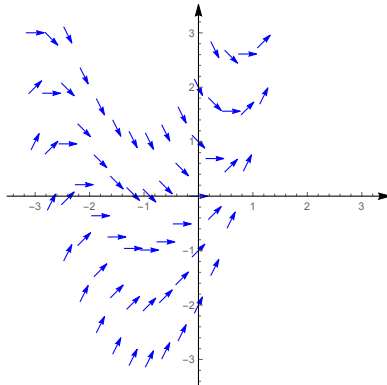
2. ábra



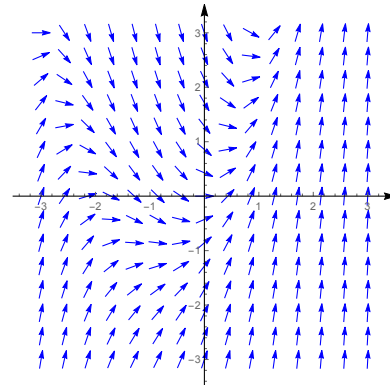
3. ábra



4. ábra



5. ábra



6. ábra

Szétválasztható változójú differenciálegyenlet

Egy differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak nevezünk, amennyiben

$$f(y)y' = g(x)$$

alakúra tudjuk hozni.

3. Feladat. Adjuk meg az $y^2 y' = \frac{1}{x} - x$ differenciálegyenlet összes megoldását.

Megoldás. Az egyenlet eleve $f(y)y' = g(x)$ alakú, így természetesen szétválasztható változójú. Ekkor mindkét oldalt x szerint integrálva azonnal megkapjuk a feladat megoldását. Ugyanakkor, a helyettesítéssel integrálás szabálya alapján a bal oldalon ez majd y szerinti integrálást

eredményez. Ez az $y' = \frac{dy}{dx}$ jelölés használatával jól látható:

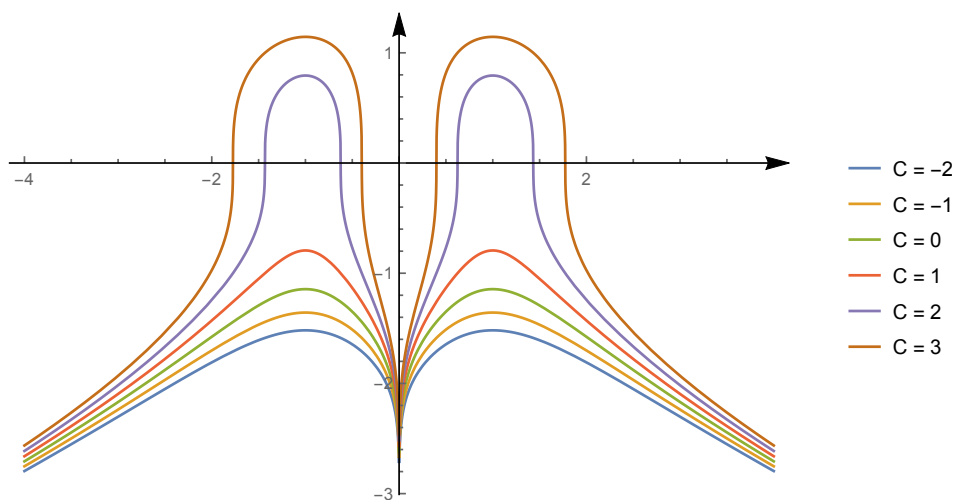
$$\begin{aligned} y^2 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} - x, \quad \text{azaz} \\ \int y^2 dy &= \int \left(\frac{1}{x} - x \right) dx, \quad \text{amelyből} \\ \frac{y^3}{3} + C_1 &= \ln |x| - \frac{x^2}{2} + C_2, \quad \text{ahol } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} y^3 &= 3 \ln |x| - \frac{3}{2} x^2 + 3C_3, \quad \text{ahol } C_2 - C_1 = C_3 \in \mathbb{R}, \quad \text{ahonnan} \\ y &= \sqrt[3]{3 \ln |x| - \frac{3}{2} x^2 + C_4}, \quad \text{ahol } 3C_3 = C_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

adja a differenciálegyenlet általános (összes) megoldását.

MEGJEGYZÉS. Jól láthatóan a C konstansok mindegyike tetszőleges valós számot jelöl. Így elég csak az egyik (jobb oldali) primitív függvényénél szerepeltetni, továbbá felesleges indexelni. Ezt követően így járunk el. Amennyiben változik a C konstans alaphalmaza, azt az egyenlet jobb oldalán jelezzük. $\boxtimes$



A fenti ábra a differenciálegyenlet néhány megoldását mutatja a megfelelő C konstans értékek esetén.

4. Feladat. Oldjuk meg: $\operatorname{tg} x \, dy - y \, dx = 0$.

Megoldás. Az egyenletet az $y' = \frac{dy}{dx}$ összefüggés alapján, majd rendezéssel a következő alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \cdot y' - y &= 0 \\ \operatorname{tg} x \cdot y' &= y \\ y' &= y \cdot \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy szétválasszuk a változókat, osztanunk kell y -nal, az ismeretlen függvénnyel. Ekkor, hogy ne veszítsünk függvényt megoldást, a következő eseteket kell vizsgálnunk.

(1) Ha $y = 0$, akkor $y' = 0$, ezt visszahelyettesítve az átalakított differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot \operatorname{ctg} x, \text{ azaz} \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

tehát $y = 0$ megoldása a differenciálegyenletnek.

MEGJEGYZÉS. Csak az x változót tartalmazó kifejezéssel oszthatunk esetvizsgálat nélkül. ✚

(2) Amennyiben $y \neq 0$, akkor az előző feladat alapján dolgozunk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' &= \operatorname{ctg} x \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{ctg} x \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \operatorname{ctg} x \, dx. \end{aligned}$$

A jobb oldali integrált helyettesítéssel,

$$z = \sin x, \quad dz = \cos x \, dx$$

alapján oldjuk meg:

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \, dx = \int \frac{1}{z} \, dz = \ln |z| + C = \ln |\sin x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Abban az esetben, amikor a változót, x -et tartalmazó oldal integrálásakor logaritmikus kifejezést kapunk, célszerű a C konstans $\ln C$ alakban fölírni. Ugyanis a logaritmusfüggvény értékkészlete a valós számok halmaza, továbbá használni tudjuk a logaritmus azonosságait, azaz

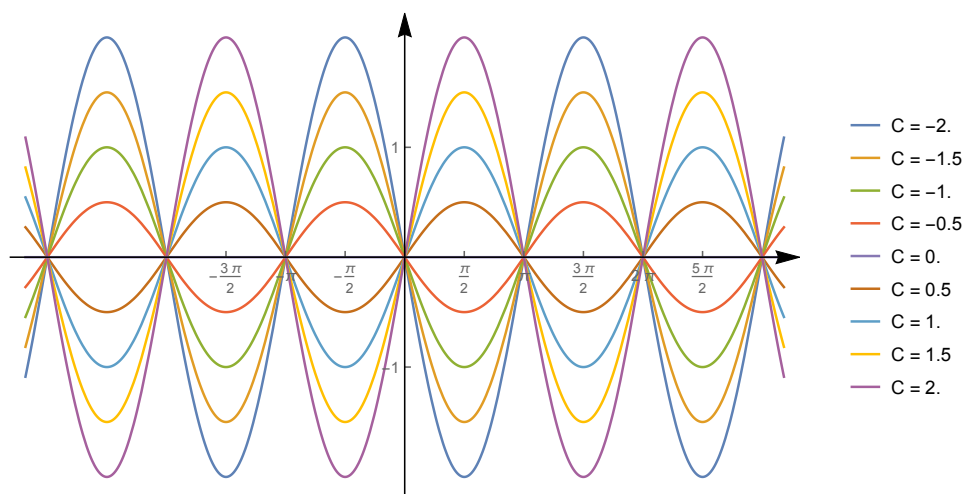
$$\begin{aligned} \ln |y| &= \ln |\sin x| + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \\ \ln |y| &= \ln C + \ln |\sin x| \\ |y| &= C |\sin x| \\ y &= \pm C \sin x \\ y &= C \sin x, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

A differenciálegyenlet összes megoldása tehát

$$y = C \sin x, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{továbbá az első esetben kapott } y = 0.$$

Ez a két megoldáshalmaz összevonható, amennyiben megengedjük, hogy C felvegye a 0 értéket is. Így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = C \sin x, \quad C \in \mathbb{R}.$$



5. Feladat. Oldjuk meg: $x^2 y' - y \ln y = x y'$, $y(-1) = e$.

Megoldás. A kezdeti érték probléma megoldását azzal kezdjük, hogy megadjuk a differenciálegyenlet összes megoldását.

Rendezzük az egyenletet, hogy a deriváltak ugyanazon az oldalon legyenek:

$$\begin{aligned} x^2 y' - x y' &= y \ln y \\ (x^2 - x) y' &= y \ln y \\ y' &= y \ln y \cdot \frac{1}{x^2 - x}. \end{aligned}$$

Jól látható, hogy az egyenlet szétválasztható változójú.

(1) Az $y \ln y = 0$ esetben, mivel a differenciálegyenlet csak $y > 0$ esetén értelmezett, az $\ln y = 0$ feltételt adja. Ebből kapjuk, hogy $y = 1$ és így $y' = 0$. Helyettesítés után írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{x^2 - x}, \quad \text{azaz} \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

tehát $y = 1$ megoldás.

(2) Ha $y \ln y \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{y \ln y} \cdot y' &= \frac{1}{x^2 - x}, \quad \text{azaz} \\ \frac{1}{y \ln y} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x^2 - x}, \quad \text{ahonnan} \\ \int \frac{1}{y \ln y} dy &= \int \frac{1}{x^2 - x} dx. \end{aligned}$$

Az egyenlet bal oldalán helyettesítéssel integrálunk,

$$z = \ln y, \quad dz = \frac{1}{y} dy$$

szerint

$$\int \frac{1}{y \ln y} dy = \int \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{z} dz = \ln |z| + C = \ln |\ln y| + C.$$

A jobb oldalon elemi törtre bontás módszerével dolgozunk:

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)},$$

ahonnan

$$1 = A(x-1) + Bx.$$

A gyökök behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x=0 \quad \text{esetén} \quad 1 &= A \cdot (-1), \quad \text{azaz} \quad A = -1, \\ x=1 \quad \text{esetén} \quad 1 &= B \cdot 1, \quad \text{azaz} \quad B = 1. \end{aligned}$$

Azaz

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}.$$

Innen

$$\int \frac{1}{x^2 - x} dx = \ln|x-1| - \ln|x| + \ln C = \ln \frac{|x-1|}{|x|} C, \quad C \in \mathbb{R}^+.$$

Ezek alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \ln|\ln y| &= \ln \frac{|x-1|}{|x|} C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \\ |\ln y| &= \frac{|x-1|}{|x|} C \\ \ln y &= \pm \frac{x-1}{x} C \\ \ln y &= \frac{x-1}{x} C, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y &= e^{\frac{x-1}{x} C}, \end{aligned}$$

amely a $C = 0$ választással tartalmazza a fenti $y = 1$ megoldást is. Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása:

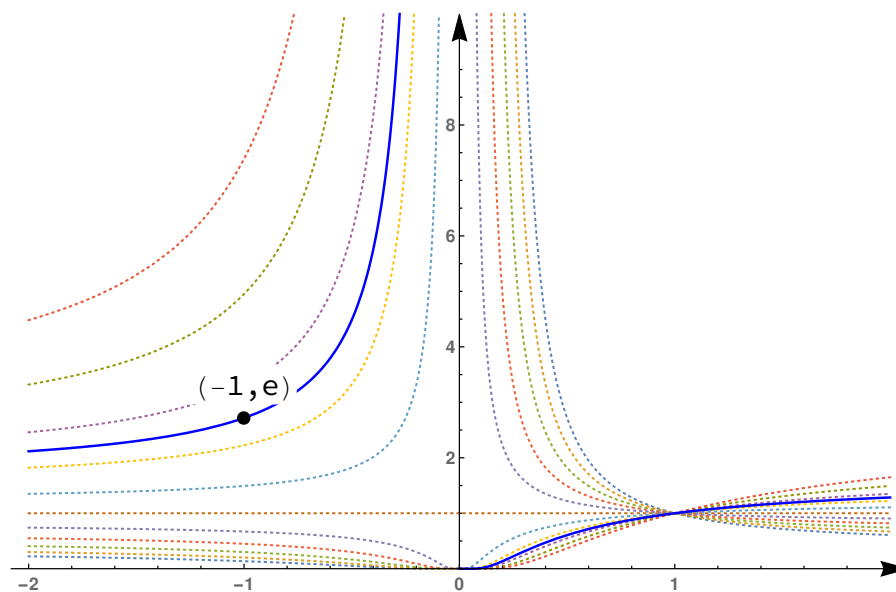
$$y = e^{\frac{x-1}{x} C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ezek után vizsgáljuk az $y(-1) = e$ kezdeti feltételt. Ez azt jelenti, hogy ha $x = -1$, akkor a megoldásfüggvény az e értéket veszi fel, azaz $y = e$. Ezeket az adatokat visszahelyettesítve az általános megoldásba kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} e &= e^{\frac{-1-1}{-1} C} = e^{2C}, \quad \text{így} \\ 1 &= 2C, \quad \text{ahonnan} \quad C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tehát a kezdeti érték probléma megoldása

$$y = e^{\frac{x-1}{x} \cdot \frac{1}{2}}.$$



A kezdeti feltétel a megoldássereget szűkíti. Esetünkben csak egy olyan görbe van, amely eleget tesz a feltételnek, átmegy a $(-1, e)$ ponton.

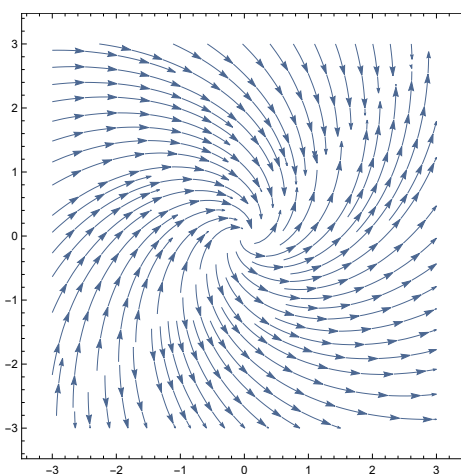
Videók

Íránymező

Vázlatosan ábrázoljuk a differenciálegyenlethez tartozó iránymezőt. (Az itt szereplő megoldásokban számítógéppel készült ábrák szerepelnek, a kézzel történő vázlatos ábrázolás a megfelelő videóban megtalálható.)

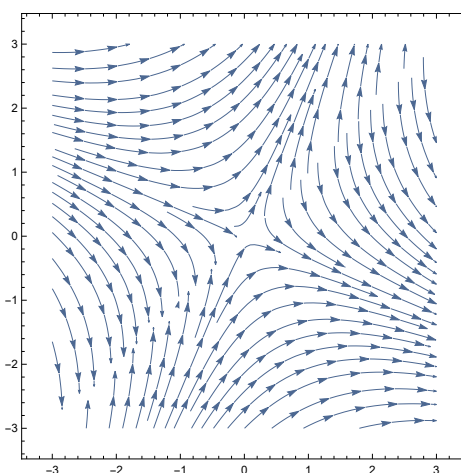
1. Feladat. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

Megoldás.



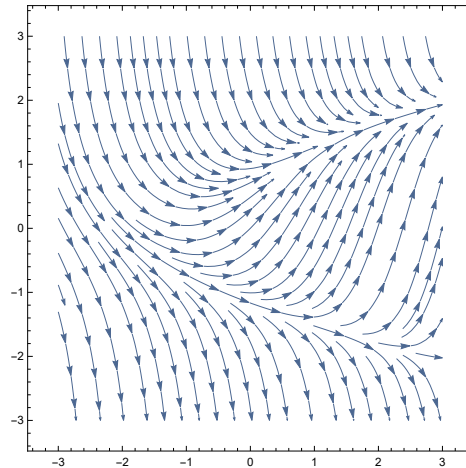
2. Feladat. $y' = \frac{x+y}{y-x}$

Megoldás.



3. Feladat. $y' = 1 + x - y^2$

Megoldás.



Szétválasztható változójú differenciálegyenlet

Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

4. Feladat. $y' = -2xy$

Megoldás. $y = Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$



5. Feladat. $y' = \frac{3y}{y^2 + 1}$

Megoldás. $\frac{1}{3} \left(\frac{y^2}{2} + \ln |y| \right) = x + C$, $C \in \mathbb{R}$, $y = 0$



6. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát: $xy' = y - y'$, $y(1) = -1$

Megoldás. $y = -\frac{1}{2}(1 + x)$



7. Feladat. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet: $(x^2 + x) dy - y^2 dx = 0$

Megoldás. $-\frac{1}{y} = \ln \frac{C|x|}{|x+1|}$, $C \in \mathbb{R}^+$, $y = 0$



8. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémákat:

$$(x+1) dy = (x - y^2 x) dx, \quad \text{a) } y(0) = 0, \quad \text{b) } y(0) = 1, \quad \text{d) } y(2) = -1.$$

Megoldás.

$$\text{a) } \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = 2x - 2 \ln |x+1|$$

$$\text{b) } y = 1$$

$$\text{d) } y = -1$$



9. Feladat. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(y+2)u' = \frac{u}{y}, \quad (u = u(y)).$$

Megoldás. $u = C \cdot \sqrt{\left| \frac{y}{y+2} \right|}, \quad C \in \mathbb{R}$



10. Feladat. Oldjuk meg a következő kezdeti érték problémát:

$$(t^2 + 1)x' + tx + t = 0, \quad (x = x(t)), \quad x(1) = -2.$$

Megoldás. $x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2 + 1}} - 1$



Kvizek

A csoport

1. Feladat. Az $y' = 0, \pm 1, 1/2$ értékek használatával vázlatosan adjuk meg az $y' = \frac{x^2 + y}{x + 2y}$ egyenlethez tartozó iránymezőt.

2. Feladat. Oldjuk meg az $\int \frac{x-1}{2x^2+x-1} dx$ határozatlan integrált.

B csoport

Feladat. Oldjuk meg az $xy' + 2y = y^2 + 1$, $y(-e) = \frac{1}{2}$ kezdeti érték problémát.

C csoport

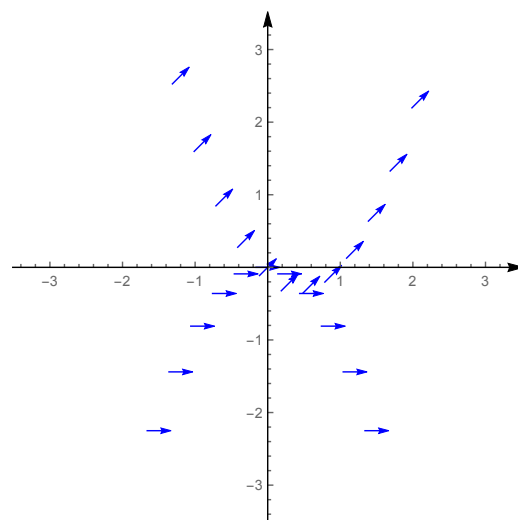
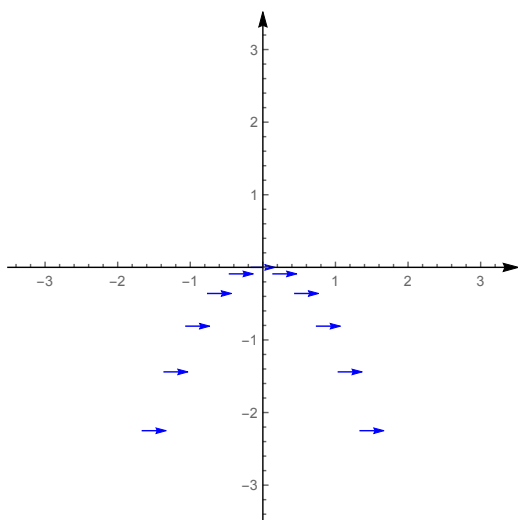
Feladat. Oldjuk meg az $e^x y' + 2xy = xy^2$ differenciálegyenletet.

Kvízek megoldása

A csoport

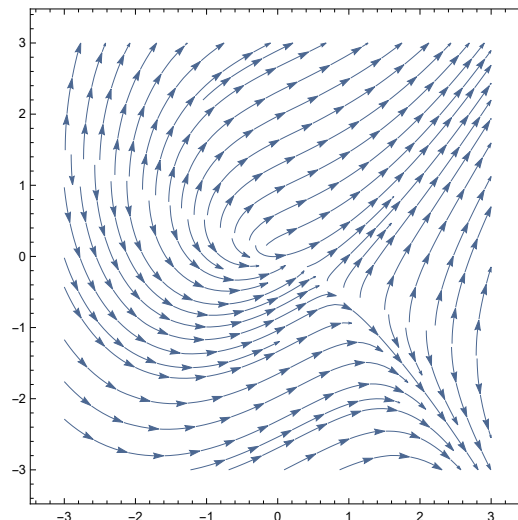
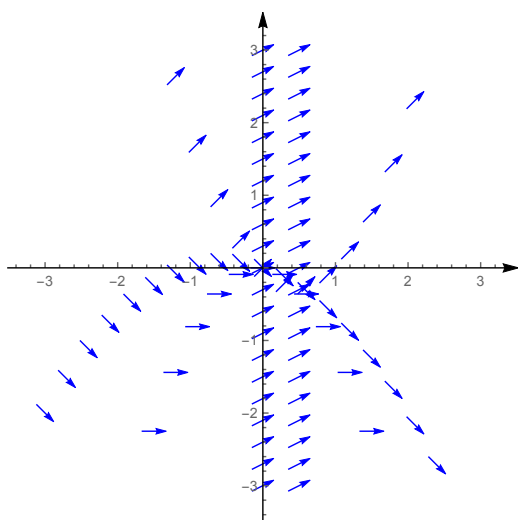
1. Feladat megoldása. Az $x + 2y = 0$ egyenes pontjaiban nem vehetünk fel szakaszokat.

Az $y' = 0$ meredekségű helyek a $0 = \frac{x^2 + y}{x + 2y}$ egyenletből az $x^2 + y = 0$, azaz az $y = -x^2$ parabola pontjai. Ha $y' = 1$, akkor $1 = \frac{x^2 + y}{x + 2y}$, tehát $x + 2y = x^2 + y$, így az $y = x^2 - x$ parabolát kapjuk.



1 pt

Ha $y' = -1$, akkor $-1 = \frac{x^2 + y}{x + 2y}$, tehát $-x - 2y = x^2 + y$, azaz $y = -\frac{x^2 + x}{3}$. Ha $y' = \frac{1}{2}$, akkor $\frac{1}{2} = \frac{x^2 + y}{x + 2y}$, tehát $\frac{1}{2}x + y = x^2 + y$, így a $0 = x^2 - \frac{x}{2}$ egyenletből az $x = 0$ és $x = \frac{1}{2}$ egyeneseket kapjuk.



2. Feladat megoldása. A $2x^2 + x - 1 = 0$ egyenlet megoldása a megoldóképlet segítségével

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

azaz $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Így

$$2x^2 + x - 1 = 2(x+1) \left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+1)(2x-1).$$

2 pt

Ekkor

$$\frac{x-1}{2x^2+x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1) + B(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$
$$x-1 = A(2x-1) + B(x+1).$$

Ha $x = -1$, akkor

$$-2 = -3A, \text{ azaz } A = \frac{2}{3}.$$

Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor

$$-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}B, \text{ azaz } B = -\frac{1}{3}.$$

Így

$$\int \frac{x-1}{2x^2+x-1} dx = \int \left(\frac{2/3}{x+1} - \frac{1/3}{2x-1} \right) dx = \frac{2}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \ln|2x-1| \cdot \frac{1}{2} + C, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

3 pt

B csoport

Feladat megoldása. Rendezzük az egyenletet:

$$\begin{aligned} xy' + 2y &= y^2 + 1 \\ xy' &= y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

Ha $y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2 = 0$, azaz $y = 1$, akkor $y' = 0$ és így

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= 1 - 2 + 1, \quad \text{azaz} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

alapján az $y = 1$ konstans függvény megoldása a differenciálegyenletnek, de jól láthatóan nem elégíti ki a kezdeti feltételt: $y(-e) = 1 \neq 1/2$.

1 pt

Ha $y^2 - 2y + 1 \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2 - 2y + 1} \cdot y' &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{1}{(y - 1)^2} dy &= \int \frac{1}{x} dx \\ -\frac{1}{y - 1} &= \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ y - 1 &= \frac{-1}{\ln|x| + C} \\ y &= 1 - \frac{1}{\ln|x| + C} \end{aligned}$$

az egyenlet megoldása, és nincs olyan C érték mely az $y = 1$ megoldást adná.

2 pt

A kezdeti feltétel $y(-e) = \frac{1}{2}$. Így

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 1 - \frac{1}{\ln|-e| + C} \\ -\frac{1}{2} &= -\frac{1}{1 + C} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{1 + C} \\ C &= 1 \end{aligned}$$

alapján a kezdeti érték probléma megoldása

$$y = 1 - \frac{1}{\ln|x| + 1}.$$

3 pt

C csoport

Feladat megoldása. Rendezzük az egyenletet:

$$\begin{aligned} e^x y' + 2xy &= xy^2 \\ e^x y' &= xy^2 - 2xy \\ e^x y' &= x(y^2 - 2y). \end{aligned}$$

Ha $y^2 - 2y = y(y - 2) = 0$, akkor

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{vagy} \quad y = 2 \\ y' = 0 & y' = 0 \\ e^x \cdot 0 = x \cdot 0 & e^x \cdot 0 = x \cdot (4 - 4) \\ 0 = 0 & 0 = 0 \end{array}$$

alapján az $y = 0$ és $y = 2$ konstans függvények megoldásai a differenciálegyenletnek.

Ha $y^2 - 2y \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2 - 2y} \cdot y' &= xe^{-x} \\ \int \frac{1}{y^2 - 2y} dy &= \int xe^{-x} dx. \end{aligned}$$

A bal oldalon előbb elemi racionális törteket alakítunk ki:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2 - 2y} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{y - 2} = \frac{A(y - 2) + By}{y(y - 2)} \\ 1 &= A(y - 2) + By. \end{aligned}$$

Ha $y = 0$, akkor

$$1 = -2A, \text{ azaz } A = -\frac{1}{2}.$$

Ha $y = 2$, akkor

$$1 = 2B, \text{ azaz } B = \frac{1}{2}.$$

Így

$$\int \frac{1}{y^2 - 2y} dy = \int \left(\frac{-1/2}{y} + \frac{1/2}{y - 2} \right) dy = -\frac{1}{2} \ln |y| + \frac{1}{2} \ln |y - 2| + C.$$

Az egyenlet jobb oldalán a parciális integrálás módszerével, $s = x$, $t' = e^{-x}$, $s' = 1$ és $t = -e^{-x}$ szerint

$$\int \underbrace{xe^{-x}}_{st'} dx = \underbrace{-xe^{-x}}_{st} - \int \underbrace{-e^{-x}}_{s't} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

A fentiek alapján az implicit megoldás

$$\frac{1}{2}(\ln |y - 2| - \ln |y|) = -e^{-x}(x + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

amely nem tartalmazza az $y = 0$, $y = 2$ megoldásokat.

2.

Változóiban homogén fokszámú differenciálegyenlet; lineáris differenciálegyenlet

Házi feladatok

Változóiban homogén fokszámú differenciálegyenlet

A differenciálegyenletet változóiban homogén fokszámúnak nevezzük, amennyiben

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{vagy} \quad y' = g\left(\frac{x}{y}\right)$$

alakra tudjuk hozni.

1. Feladat. Adjuk meg az $xyy' = y^2 - x^2y'$ differenciálegyenlet összes megoldását.

Megoldás. Első lépésben összevonjuk az y' -t tartalmazó tagokat

$$\begin{aligned} xyy' &= y^2 - x^2y' \\ xyy' + x^2y' &= y^2 \\ (xy + x^2)y' &= y^2. \end{aligned}$$

Az egyenletben mind a három tag, xy , x^2 és y^2 is másodfokú kifejezés azonos fokszámú. Így az x^2 kifejezéssel való osztás után a differenciálegyenlet jól láthatóan változóiban homogén fokszámú:

$$\left(\frac{y}{x} + 1\right)y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Ez a típusú differenciálegyenlet az $u = y/x$, $y = ux$, $y' = u'x + u$ helyettesítésekkel mindig szétválasztható egyenletet ad, amit az előző fejezetben tanultak alapján oldunk meg:

$$\begin{aligned} (u + 1)(u'x + u) &= u^2 \\ (u + 1)u'x + u^2 + u &= u^2 \\ (u + 1)u'x &= -u. \end{aligned}$$

Az $u = 0$ megoldása az egyenletnek. Amennyiben $u \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{u+1}{u}u' &= -\frac{1}{x} \\ \left(1 + \frac{1}{u}\right) \frac{du}{dx} &= -\frac{1}{x} \\ \int \left(1 + \frac{1}{u}\right) du &= -\int \frac{1}{x} dx \\ u + \ln|u| &= -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

mely nem tartalmazza az $u = 0$ megoldást. Tehát az egyenlet megoldása:

$$u + \ln|u| = -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{és } u = 0.$$

Mivel $u = y/x$, az eredeti egyenlet (implicit) megoldása

$$\frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{és } y = 0.$$

MEGJEGYZÉS. Ezt a feladatot megoldhatjuk a $v = x/y$ helyettesítés alkalmazásával is. Ugyanis y^2 -tel osztva (feltéve, hogy $y \neq 0$, az $y = 0$ függvény nyilván megoldás), az

$$(xy + x^2)y' = y^2$$

egyenletet, az alábbi alakot ölti:

$$\left(\frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right) y' = 1.$$

Ekkor a $v = x/y$ miatt $y = x/v$, $y' = \frac{v - xv'}{v^2}$ alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(v + v^2) \frac{v - xv'}{v^2} &= 1 \\ \frac{v + v^2}{v^2} (v - xv') &= 1 \\ \frac{1 + v}{v} (v - xv') &= 1 \\ (1 + v)(v - xv') &= v \\ v + v^2 - (1 + v)xv' &= v \\ v^2 &= (1 + v)xv' \\ \frac{1}{x} &= \frac{1 + v}{v^2} v' \\ \int \frac{1}{x} dx &= \int \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v}\right) dv \\ \ln|x| + C &= -\frac{1}{v} + \ln|v|, \quad C \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

amely ugyanazt a megoldást szolgáltatja, mint az előző módszer. Általában ezzel a helyettesítéssel bonyolultabb egyenletet kapunk. $\boxtimes$

2. Feladat. Oldjuk meg az $y' = -\frac{x+2y}{y}$, $y(2) = -2$ kezdeti érték problémát.

Megoldás. A kifejezés rögtön átírható az

$$y' = -\frac{x}{y} - 2$$

alakra, azaz egyértelmű, hogy változóiban homogén fokszerű, továbbá az is, hogy a $v = \frac{x}{y}$, $y = \frac{x}{v}$, $y' = \frac{v - xv'}{v^2}$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} - 2 \\ \frac{v - xv'}{v^2} &= -v - 2 \\ v - xv' &= -v^3 - 2v^2 \\ xv' &= v^3 + 2v^2 + v \\ xv' &= v(v^2 + 2v + 1) = v(v+1)^2. \end{aligned}$$

A $v = x/y$ helyettesítésből következik, hogy $v \neq 0$. A $v = -1$ függvény jól láthatóan megoldása az egyenletnek. Ha $v \neq -1$, akkor oszthatunk a jobb oldali kifejezéssel is:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(v+1)^2} v' &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{1}{v(v+1)^2} dv &= \int \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Elemi törtekre bontás alapján

$$\frac{1}{v(v+1)^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1} + \frac{C}{(v+1)^2} = \frac{A(v+1)^2 + Bv(v+1) + Cv}{v(v+1)^2},$$

ahonnan

$$1 = A(v+1)^2 + Bv(v+1) + Cv.$$

Helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} v=0 \quad \text{esetén} \quad & 1 = A \cdot 1, \quad \text{azaz} \quad A = 1, \\ v=-1 \quad \text{esetén} \quad & 1 = C \cdot (-1), \quad \text{azaz} \quad C = -1, \\ v=1 \quad \text{esetén} \quad & 1 = A \cdot 4 + B \cdot 2 + C \cdot 1 = 4 + 2B - 1, \quad \text{azaz} \quad B = -1, \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{1}{v(v+1)^2} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} - \frac{1}{(v+1)^2}.$$

Így

$$\ln |v| - \ln |v+1| + \frac{1}{v+1} = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tehát az egyenlet összes megoldása:

$$\ln \left| \frac{x}{y} \right| - \ln \left| \frac{x}{y} + 1 \right| + \frac{1}{\frac{x}{y} + 1} = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{és } y = -x.$$

Behelyettesítés után azt tapasztaljuk, hogy az $y(2) = -2$ feltételnek csak az

$$y = -x$$

függvény tesz eleget.

Lineáris differenciálegyenlet

A differenciálegyenletet lineárisnak nevezzük, amennyiben az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

alakra tudjuk hozni. Továbbá az egyenlet homogén, ha $q(x) = 0$, inhomogén, ha $q(x) \neq 0$.

3. Feladat. Oldjuk meg az $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ differenciálegyenletet.

Megoldás. A differenciálegyenlet a fenti alakú, inhomogén lineáris differenciálegyenlet. Az ilyen típusú differenciálegyenlet megoldása három lépésből áll:

(1) Első lépésben megadjuk a homogén egyenlet általános megoldását. A homogenizált

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0$$

egyenlet mindig szétválasztható változójú, az $y = 0$ függvény mindig megoldása a homogén egyenletnek, továbbá a megoldás mindig $y_h = C \cdot f(x)$ alakú:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x-1}{x^2}y \\ \frac{y'}{y} &= \frac{2x-1}{x^2} \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{2x-1}{x^2} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\ \ln |y| &= 2 \ln |x| + \frac{1}{x} + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \\ \ln |y| &= \ln Cx^2 + \frac{1}{x} \\ y &= Cx^2 e^{1/x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y_h &= Cx^2 e^{1/x}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) Második lépésben a konstans variálás módszerével adjuk meg az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. A homogén egyenlet általános megoldását tekintjük, amelyben a C konstans helyett egy $c(x)$ függvényt írunk:

$$y_p = c(x)x^2 e^{1/x} = cx^2 e^{1/x}.$$

Ekkor, figyelve arra, hogy c most függvény, adódik, hogy

$$y_p' = c'x^2e^{1/x} + c2xe^{1/x} + cx^2e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2}.$$

Ezt visszahelyettesítve az eredeti inhomogén differenciálegyenletbe kapjuk, hogy

$$c'x^2e^{1/x} + c2xe^{1/x} + cx^2e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1-2x}{x^2}cx^2e^{1/x} = 1,$$

ahonnan egyszerű összevonás után (a c -t tartalmazó tagok mindig kiesnek) írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} c'x^2e^{1/x} &= 1 \\ c' &= x^{-2}e^{-1/x}. \end{aligned}$$

Innen helyettesítéses integrálással,

$$u = -1/x, \quad du = x^{-2} dx$$

szerint kapjuk, hogy

$$c = \int x^{-2}e^{-1/x} dx = \int e^u du = e^u + D = e^{-1/x} + D.$$

Mivel az inhomogén egyenletnek csak egy konkrét megoldását keressük, ezért a D konstanszt válasszuk pl. nullának, vagyis

$$c(x) = e^{-1/x},$$

ahonnan

$$y_p = e^{-1/x}x^2e^{1/x} = x^2.$$

(3) Az inhomogén egyenlet összes megoldását megkapjuk, ha összeadjuk az **(1)** lépésben kapott homogén egyenlet általános megoldását a **(2)** lépésben kapott inhomogén egyenlet partikuláris megoldásával, azaz

$$y = y_h + y_p.$$

Így a differenciálegyenlet összes megoldása:

$$y = Cx^2e^{1/x} + x^2.$$

4. Feladat. Oldjuk meg: $y' \cos x + y \sin x = 1$, $y(\pi) = 2$.

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát a $\cos x$ kifejezéssel osztva kapjuk, hogy

$$y' + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot y = \frac{1}{\cos x}.$$

Ez az egyenlet jól láthatóan inhomogén lineáris differenciálegyenlet.

(1) A homogenizált

$$y' + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot y = 0$$

egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{\sin x}{\cos x} \cdot y \\ \frac{y'}{y} &= -\frac{\sin x}{\cos x} \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx. \end{aligned}$$

A jobb oldali integrált a

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x \, dx$$

helyettesítés segítségével kapjuk meg.

$$c = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + D = \ln |\cos x| + D.$$

Így

$$\begin{aligned} \ln |y| &= \ln |\cos x| + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \\ \ln |y| &= \ln C + \ln |\cos x| \\ y_h &= C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) A partikuláris megoldást az alábbi alakban keressük:

$$y_p = c(x) \cos x = c \cos x.$$

Ekkor

$$y_p' = c' \cos x - c \sin x$$

alapján visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c' \cos x - c \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot c \cos x &= \frac{1}{\cos x} \\ c' \cos x &= \frac{1}{\cos x} \\ c' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ c &= \operatorname{tg} x, \end{aligned}$$

ahonnan

$$y_p = \operatorname{tg} x \cos x = \sin x.$$

(3) Ezért

$$y = y_h + y_p = C \cos x + \sin x.$$

Az $y(\pi) = 2$ kezdeti feltétel miatt

$$2 = C \cos \pi + \sin \pi = -C, \quad \text{azaz} \quad C = -2,$$

így a kezdeti érték probléma megoldása

$$y = -2 \cos x + \sin x.$$

Videók

Változóiban homogén fokszámú differenciálegyenlet

Oldjuk meg a következő egyenleteket.

1. Feladat. $x^2y' + xy = 4x^2$

Megoldás. $y = 2x - \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$



2. Feladat. $(2y - 3x)dx + xdy = 0, y(1) = 2$

Megoldás. $y = x + \frac{1}{x^2}$



3. Feladat. $y' = \frac{x+y}{y-x}$

Megoldás. $y^2 - 2xy - x^2 = C, C \in \mathbb{R}$



4. Feladat. $2xy' + 3y = -yy'$

Megoldás. $y^2(y + 5x)^3 = C, C \in \mathbb{R}$



5. Feladat. $(xy - x^2)dy - y^2dx = 0, y(1) = 1$

Megoldás. $\frac{y}{x} - \ln \left| \frac{y}{x} \right| = 1 + \ln |x|$



6. Feladat. $yyu' + u^2 = y^2, (u = u(y))$

Megoldás. $u^2 = \frac{1}{2}y^2 - \frac{C}{y^2}, C \in \mathbb{R}$



7. Feladat. $2e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y} \right) y' + 2e^{x/y} + 1 = 0$

Megoldás. $2ye^{x/y} + x = C, C \in \mathbb{R}$



Lineáris differenciálegyenlet

Oldjuk meg a következő egyenleteket.

8. Feladat. $y' + 2xy = x$

Megoldás. $y = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}, C \in \mathbb{R}$



9. Feladat. $(x+1)y' - \frac{y}{x} = xe^x, y(1) = e$

Megoldás. $y = \frac{x}{x+1}(e^x + e)$



10. Feladat. $y' + 2y = e^{-2x}, y(0) = 2$

Megoldás. $y = (x+2)e^{-2x}$



11. Feladat. $(x^2+1)y' + xy + x = 0, y(0) = 2$

Megoldás. $y = \frac{3}{\sqrt{x^2+1}} - 1$



12. Feladat. $(2y-3x)dx + xdy = 0, y(2) = 1$

Megoldás. $y = x - \frac{4}{x^2}$



13. Feladat. $(e^{-x^2} + 2xy - x)dx + dy = 0$

Megoldás. $y = (C-x)e^{-x^2} + \frac{1}{2}, C \in \mathbb{R}$



14. Feladat. $xu' + 1 = u + 4x^2 - u', (u = u(x))$

Megoldás. $u = (4x - 8 \ln|x+1| + C)(x+1) - 3, C \in \mathbb{R}$



15. Feladat. $\frac{y' - 1}{y - x} = 2 \operatorname{ctg} 2x$

Megoldás. $y = C \cdot \sin 2x + x, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Kvízek

A csoport

Feladat. Oldjuk meg a $(2xy - y^2)dx = x^2dy$ egyenletet.

B csoport

Feladat. Oldjuk meg az $yy' \sin \frac{x}{y} + y \cos \frac{x}{y} = xy' \cos \frac{x}{y}$ egyenletet.

C csoport

Feladat. Oldjuk meg az $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$, $y(0) = 2$ kezdeti érték feladatot.

D csoport

Feladat. Oldjuk meg az $xy' + y = x \ln x$, $y(1) = -2$ kezdeti érték problémát.

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása.

$$\begin{aligned}
 (2xy - y^2)dx &= x^2 dy \\
 x^2 y' &= 2xy - y^2 \\
 y' &= \frac{2xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} \\
 y' &= 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2
 \end{aligned}$$

Innen $u = y/x$, $y = ux$, $y' = u'x + u$ alapján

$$\begin{aligned}
 u'x + u &= 2u - u^2 \\
 u'x &= u - u^2 \\
 u'x &= u(1 - u).
 \end{aligned}$$

Ha $u = 0$, vagy $u = 1$, akkor mindkét esetben $u' = 0$ és

$$\begin{array}{ccc}
 0 \cdot x &= 0 \cdot 1 & \text{vagy} \quad x \cdot 0 = 1 \cdot (1 - 1) \\
 0 &= 0 & 0 = 0
 \end{array}$$

alapján az $u = 0$ és $u = 1$ konstans függvények megoldásai a differenciálegyenletnek (így $y = 0$ és $y = x$ megoldásai az eredeti egyenletnek).

Ha $u(1 - u) \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}
 \frac{u'}{u(1 - u)} &= \frac{1}{x} \\
 \int \frac{1}{u(1 - u)} du &= \int \frac{1}{x} dx.
 \end{aligned}$$

A bal oldalon elemi törteket alakítunk ki:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{u(1 - u)} &= \frac{A}{u} + \frac{B}{1 - u} = \frac{A(1 - u) + Bu}{u(1 - u)} \\
 1 &= A(1 - u) + Bu.
 \end{aligned}$$

Ha $u = 0$, akkor $1 = A$, ha $u = 1$, akkor $1 = B$. Így

$$\int \frac{1}{u(1 - u)} du = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1 - u} \right) du = \ln |u| - \ln |1 - u| + C.$$

1 pt

2 pt

Tehát

$$\ln |u| - \ln |1 - u| = \ln |x| + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+$$

$$\ln \left| \frac{u}{1 - u} \right| = \ln C|x|$$

$$\frac{u}{1 - u} = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$u = C(1 - u)x = Cx - Cux$$

$$u + Cux = Cx$$

$$u(1 + Cx) = Cx$$

$$u = \frac{Cx}{1 + Cx},$$

amely a $C = 0$ választással tartalmazza az $u = 0$ megoldást is, de az $u = 1$ megoldást nem, tehát

$$u = \frac{Cx}{1 + Cx}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad u = 1.$$

Így az eredeti egyenlet összes megoldása

$$y = \frac{Cx^2}{1 + Cx}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad y = x.$$

3 pt

B csoport

Feladat megoldása. Ekkor nyilván az $y \neq 0$ és a $v = \frac{x}{y}$, $y = \frac{x}{v}$, $y' = \frac{v - xv'}{v^2}$ helyettesítéseket alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} yy' \sin \frac{x}{y} + y \cos \frac{x}{y} &= xy' \cos \frac{x}{y} \\ y' \sin \frac{x}{y} - \frac{x}{y} y' \cos \frac{x}{y} &= -\cos \frac{x}{y} \\ \left(\sin \frac{x}{y} - \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} \right) y' &= -\cos \frac{x}{y} \\ (\sin v - v \cos v) \frac{v - xv'}{v^2} &= -\cos v \\ v \sin v - v^2 \cos v - (\sin v - v \cos v) xv' &= -v^2 \cos v \\ v \sin v &= (\sin v - v \cos v) xv'. \end{aligned}$$

Mivel $v \neq 0$, így a $\sin v = 0$ egyenletből a $v = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ konstans függvényeket kapjuk. Ekkor $v' = 0$ és

$$\begin{aligned} v \cdot 0 &= (0 - v \cos v)x \cdot 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

alapján ezek megoldások (és így $y = x/(k\pi)$ is az).

Ha $\sin v \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} v \sin v &= (\sin v - v \cos v) xv' \\ \frac{1}{x} &= \left(\frac{1}{v} - \frac{\cos v}{\sin v} \right) v' \\ \int \frac{1}{x} dx &= \int \left(\frac{1}{v} - \frac{\cos v}{\sin v} \right) dv. \end{aligned}$$

A $z = \sin v$, $dz = \cos v dv$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos v}{\sin v} dv &= \int \frac{1}{z} dz \\ &= \ln |z| + C = \ln |\sin v| + C. \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \ln |x| &= \ln |v| - \ln |\sin v| + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \\ \ln |x| &= \ln \left| \frac{v}{\sin v} \right| + \ln C \\ x &= \frac{v}{\sin v} C, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \frac{x}{v} \sin v &= C \\ y \sin \frac{x}{y} &= C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

az implicit megoldás, mely tartalmazza az $y = \frac{x}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ megoldásokat is.

C csoport

Feladat megoldása. A homogenizált

$$y' - \frac{2y}{x+1} = 0$$

egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2y}{x+1} \\ \frac{y'}{y} &= \frac{2}{x+1} \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{2}{x+1} dx \\ \ln |y| &= 2 \ln |x+1| + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \\ \ln |y| &= \ln C(x+1)^2 \\ y_h &= C(x+1)^2, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1 pt

A partikuláris megoldásra

$$y_p = c(x)(x+1)^2 = c(x+1)^2, \quad y'_p = c'(x+1)^2 + 2c(x+1)$$

alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c'(x+1)^2 + 2c(x+1) - \frac{2c(x+1)^2}{x+1} &= (x+1)^2 \\ c'(x+1)^2 &= (x+1)^2 \\ c' &= 1 \\ c &= x \\ y_p &= x(x+1)^2. \end{aligned}$$

2 pt

Ezért

$$y = y_h + y_p = C(x+1)^2 + x(x+1)^2 = (x+C)(x+1)^2.$$

Az $y(0) = 2$ kezdeti feltétel miatt

$$2 = (0+C) \cdot (0+1)^2 = C,$$

így a kezdeti érték probléma megoldása

$$y = (x+2)(x+1)^2.$$

3 pt

D csoport

Feladat megoldása. A homogenizált $xy' + y = 0$ egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} xy' &= -y \\ \frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x} \\ \int \frac{1}{y} dy &= -\int \frac{1}{x} dx \\ \ln |y| &= -\ln |x| + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \\ \ln |y| &= \ln \frac{C}{|x|} \\ y_h &= \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1 pt

A partikuláris megoldásra

$$y_p = \frac{c(x)}{x} = \frac{c}{x}, \quad y'_p = \frac{c'x - c}{x^2}$$

alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x \frac{c'x - c}{x^2} + \frac{c}{x} &= x \ln x \\ c' - \frac{c}{x} + \frac{c}{x} &= x \ln x \\ c' &= x \ln x. \end{aligned}$$

Parciális integrálással, $f' = x$, $g = \ln x$, $f = x^2/2$ és $g' = 1/x$ alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c &= \int \underbrace{x \cdot \ln x}_{f' \cdot g} dx = \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \ln x}_{f \cdot g} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}}_{f \cdot g'} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

2 pt

Így

$$y_p = \frac{c}{x} = \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4},$$

azaz

$$y = y_h + y_p = \frac{C}{x} + \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4}.$$

Az $y(1) = -2$ kezdeti feltétel miatt

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{C}{1} + \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} = C - \frac{1}{4} \\ C &= -\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Tehát a kezdeti érték probléma megoldása

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4}.$$

3 pt

3.

Másodrendű hiányos differenciálegyenlet

Házi feladatok

Másodrendű hiányos: nincs y

Amennyiben a másodrendű (y'' -t is tartalmazó) differenciálegyenletben nem szerepel az y függvény, akkor az $u(x) = u = y'$ helyettesítéssel, $u' = y''$ alapján visszavezetjük a feladatot elsőrendű differenciálegyenletre. Az így kapott elsőrendű egyenlet a korábban tanult típusok bármelyike lehet: szétválasztható változójú, változóiban homogén fokszámú vagy lineáris differenciálegyenlet.

1. Feladat. Adjuk meg az $(x \ln x)y'' - y' = \frac{\ln^2 x}{x}$ differenciálegyenlet összes megoldását.

Megoldás. Az $u(x) = u = y'$ helyettesítéssel, $u' = y''$ alapján elsőrendű differenciálegyenletet kapunk:

$$(x \ln x)u' - u = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

Jól láthatóan ez az egyenlet lineáris:

$$u' - \frac{1}{x \ln x}u = \frac{\ln x}{x^2}.$$

(1) A homogenizált

$$u' - \frac{1}{x \ln x}u = 0$$

egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{x \ln x}u \\ \frac{u'}{u} &= \frac{1}{x \ln x}, \end{aligned}$$

a jobb oldalon a

$$z = \ln x, \quad dz = \frac{1}{x} dx$$

helyettesítéssel

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{z} dz = \ln |z| + C = \ln |\ln x| + C$$

adódik, ahonnan

$$\begin{aligned} \ln |u| &= \ln |C \ln x|, & C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ u_h &= C \ln x, & C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) A partikuláris megoldás

$$u_p = c(x) \ln x = c \ln x, \quad u'_p = c' \ln x + c \frac{1}{x}$$

alapján:

$$\begin{aligned} c' \ln x + c \frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln x} c \ln x &= \frac{\ln x}{x^2} \\ c' \ln x &= \frac{\ln x}{x^2} \\ c' &= \frac{1}{x^2} \\ c &= -\frac{1}{x}, \end{aligned}$$

vagyis

$$u_p = c \ln x = -\frac{1}{x} \ln x.$$

(3) Innen

$$u = u_h + u_p = C \ln x - \frac{1}{x} \ln x.$$

Mivel $u(x) = u = y'$, ezért

$$\begin{aligned} y' &= C \ln x - \frac{1}{x} \ln x \\ y &= \int \left(C \ln x - \frac{1}{x} \ln x \right) dx = \int C \ln x dx - \int \frac{1}{x} \ln x dx. \end{aligned}$$

Az első integrált parciális integrálással, az

$$f' = C, \quad g = \ln x, \quad f = Cx, \quad g' = 1/x$$

választással oldjuk meg:

$$\int \underbrace{C \cdot \ln x}_{f' \cdot g} dx = \underbrace{Cx \cdot \ln x}_{f \cdot g} - \int \underbrace{Cx \cdot \frac{1}{x}}_{f \cdot g'} dx = Cx \ln x - \int C dx = Cx \cdot \ln x - Cx + D.$$

A másodikat ismételten a $z = \ln x$, $dz = \frac{1}{x} dx$ helyettesítéssel számoljuk ki:

$$\int \frac{1}{x} \ln x dx = \int z dz = \frac{z^2}{2} + D = \frac{\ln^2 x}{2} + D.$$

Így az eredeti egyenlet megoldása:

$$y = C(x \ln x - x) - \frac{\ln^2 x}{2} + D.$$

2. Feladat. Oldjuk meg az $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$, $y(2) = e/2$, $y'(1) = e$ kezdeti érték problémát.

Megoldás. Az $u(x) = u = y'$ helyettesítéssel, $u' = y''$ szerint kapott

$$xu' = u(\ln u - \ln x)$$

elsőrendű differenciálegyenlet változóiban homogén fokszámú, ami az

$$u' = \frac{u}{x} \ln \frac{u}{x}$$

alakból jól látható.

Alkalmazzuk most az $v = u/x$, $u = vx$, $u' = v'x + v$ helyettesítést:

$$\begin{aligned} v'x + v &= v \ln v \\ v'x &= v \ln v - v. \end{aligned}$$

A $v \ln v - v = v(\ln v - 1) = 0$ összefüggés, csak $v = e$ esetén teljesül, ugyanis $\ln v$ miatt $v > 0$. Amennyiben $v \neq e$, akkor írhatjuk, hogy

$$\frac{v'}{v(\ln v - 1)} = \frac{1}{x}.$$

A jobb oldalon a

$$z = \ln v - 1, \quad dz = \frac{1}{v} dv$$

helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{v(\ln v - 1)} dv = \int \frac{1}{z} dz = \ln |z| + C = \ln |\ln v - 1| + C,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \ln |\ln v - 1| &= \ln |Cx|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \ln v &= Cx + 1 \\ v &= e^{Cx+1}, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

amely tartalmazza a $v = e$ megoldást is, amennyiben $C = 0$.

Mivel $u = vx$, így

$$u = xe^{Cx+1}, \quad C \in \mathbb{R},$$

és ebből $u = y'$ miatt adódik, hogy

$$y' = xe^{Cx+1}.$$

Az $y'(1) = e$ kezdeti feltétel alapján:

$$\begin{aligned} e &= 1 \cdot e^{C \cdot 1 + 1} = e^{C+1} \\ 1 &= C + 1 \\ C &= 0, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}y' &= ex \\y &= \int ex \, dx \\y &= e \frac{x^2}{2} + D.\end{aligned}$$

Az $y(2) = e/2$ tulajdonság miatt

$$\begin{aligned}\frac{e}{2} &= e \frac{4}{2} + D \\-\frac{3}{2}e &= D.\end{aligned}$$

Így a kezdeti érték probléma megoldása

$$y = e \frac{x^2}{2} - \frac{3e}{2}.$$

Másodrendű hiányos: nincs x , de van y

Ebben az esetben is visszavezetjük a feladatot elsőrendű differenciálegyenletre, de most a $v(y) = v(y(x)) = v = y'$ helyettesítéssel kell dolgoznunk. Ekkor $v' = \frac{dv}{dy}$ és az összetett függvény deriválási szabálya alapján kapjuk, hogy $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx} = v'y' = v'v$.

3. Feladat. Oldjuk meg az $yy'' + 2(y')^2 = 0$ differenciálegyenletet.

Megoldás. Az egyenletben nincs x , de van y ; ezért a $v(y) = v = y'$ helyettesítéssel kell dolgoznunk. Ekkor $y'' = vv'$. Így az

$$yvv' + 2v^2 = 0$$

elsőrendű egyenletet kapjuk, melynek a $v = 0$ függvény nyilván megoldása. Amennyiben $v \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}yv' + 2v &= 0 \\ \frac{v'}{v} &= -\frac{2}{y},\end{aligned}$$

azaz az elsőrendű egyenlet szétválasztható változójú. Ekkor

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{v} dv &= - \int \frac{2}{y} dy \\ \ln |v| &= -2 \ln |y| + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+ \\ v &= \frac{C}{y^2}, \quad C \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

amely tartalmazza a $v = 0$ megoldást, ha $C = 0$. Visszahelyettesítve az

$$y' = \frac{C}{y^2}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet kapjuk, melyet a tanult módon oldunk meg:

$$\begin{aligned} y^2 y' &= C \\ \int y^2 dy &= \int C dx \\ \frac{y^3}{3} &= Cx + D, \quad D \in \mathbb{R} \\ y &= \sqrt[3]{Cx + D}. \end{aligned}$$

4. Feladat. Oldjuk meg a $2yy' - y'' = 0$ differenciálegyenletet.

Megoldás. Az egyenletben nincs x , de van y ; ezért a $v(y) = v = y'$ helyettesítéssel kell dolgoznunk. Ekkor $y'' = vv'$. Így a

$$2yv - vv' = 0$$

elsőrendű szétválasztható egyenletet kapjuk. A $v = 0$ függvény nyilván megoldást szolgáltat. Amennyiben $v \neq 0$, akkor

$$v' = 2y,$$

azaz

$$v = y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

amely nem tartalmazza a $v = 0$ megoldást. Tehát

$$y' = y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}; \quad \text{vagy} \quad y' = 0.$$

Ha $y' = 0$, akkor

$$y = D, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Ha $y' \neq 0$, akkor az $y' = y^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$ egyenletből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2 + C} &= 1 \\ \int \frac{1}{y^2 + C} dy &= \int 1 dx = x + D, \quad D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A bal oldali integrál függ C értékétől.

(1) Ha $C = 0$, akkor

$$\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} = x + D,$$

azaz

$$y = \frac{-1}{x + D}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

(2) Ha C pozitív, akkor egyszerű integrált kapunk és

$$\int \frac{1}{y^2 + C} dy = \frac{1}{C} \int \frac{1}{(\frac{y}{\sqrt{C}})^2 + 1} dy = \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C}} = x + D,$$

azaz

$$y = \sqrt{C} \operatorname{tg}(\sqrt{C}x + D), \quad C \in \mathbb{R}^+, \quad D \in \mathbb{R}.$$

(3) Ha C negatív, akkor elemi törtekre bontunk, ugyanis

$$y^2 + C = y^2 - (-C) = (y - \sqrt{-C})(y + \sqrt{-C}),$$

ezért

$$\frac{1}{(y - \sqrt{-C})(y + \sqrt{-C})} = \frac{A}{y - \sqrt{-C}} + \frac{B}{y + \sqrt{-C}} = \frac{A(y + \sqrt{-C}) + B(y - \sqrt{-C})}{(y - \sqrt{-C})(y + \sqrt{-C})},$$

ahonnan

$$1 = A(y + \sqrt{-C}) + B(y - \sqrt{-C}).$$

A gyökök behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$\begin{array}{ll} x = \sqrt{-C} \text{ esetén} & 1 = A \cdot 2\sqrt{-C}, \quad \text{azaz} \quad A = 1/2\sqrt{-C}, \\ x = -\sqrt{-C} \text{ esetén} & 1 = B \cdot (-2)\sqrt{-C}, \quad \text{azaz} \quad B = -1/2\sqrt{-C}. \end{array}$$

Azaz

$$\frac{1}{y^2 - (-C)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{-C}}}{y - \sqrt{-C}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{-C}}}{y + \sqrt{-C}}.$$

Így ebben az esetben

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 - (-C)} dy &= \int \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{-C}}}{y - \sqrt{-C}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{-C}}}{y + \sqrt{-C}} \right) dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-C}} \left(\ln |y + \sqrt{-C}| - \ln |y - \sqrt{-C}| \right) = x + D, \quad C \in \mathbb{R}^-, \quad D \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

adja az (implicit) megoldást.

Videók

Másodrendű hiányos: nincs y

Oldjuk meg a következő egyenleteket.

1. Feladat. $y'' + y' \operatorname{tg} x = 0$

Megoldás. $y = C \cdot \sin x + D, \quad C, D \in \mathbb{R}$



2. Feladat. $y'' - 2y' = x, \quad y(0) = -1/2, \quad y'(0) = -1$

Megoldás. $y = -\frac{3}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$



3. Feladat. $x^2y'' + 2xy' = \ln x, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$

Megoldás. $y = 3 - \frac{3}{x} + \frac{1}{2}\ln^2 x - \ln|x|$



4. Feladat. $y'' + 2xy' + e^{-x^2} - x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2$

Megoldás. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}$



5. Feladat. $y'' + y' = e^{-x} + x + 2, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$

Megoldás. $y = -xe^{-x} - 2e^{-x} + \frac{x^2}{2} + x + 1$



6. Feladat. $x^2y'' - (y')^2 + 2x^2 = 0, \quad y(0) = 1/2, \quad y'(1) = -1$

Megoldás. $y = \frac{1-x^2}{2}$



7. Feladat. $2y'' - (y')^2 + 4 = 0$

Megoldás.

$$y = 2x - 2 \ln|1 - Ce^{2x}| + B, \quad y = -2x + D, \quad B, C, D \in \mathbb{R}$$



8. Feladat. $y' + \ln y'' = 0, \quad y(1) = -2, \quad y'(1) = 0$

Megoldás. $y = x \ln x - x - 1$



Másodrendű hiányos: nincs x , de van y

Oldjuk meg a következő kezdeti érték problémákat.

9. Feladat. $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

Megoldás. $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



10. Feladat. $y'' = e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -\sqrt{2}$

Megoldás. $y = -2 \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1\right)$



11. Feladat. $y^2 y'' = 1$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$

Megoldás. $y = -2\left(1 - \frac{3}{4}x\right)^{2/3}$



12. Feladat. $yy'' + (y')^2 = y^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -\sqrt{2}$

Megoldás. $y = 2e^{-x/\sqrt{2}}$



Kvízek

A csoport

Feladat. Oldjuk meg: $3y'y'' = e^y$, $y(-3) = 0$, $y'(-3) = 1$.

B csoport

Feladat. Oldjuk meg az $y'' = \frac{y'}{x} + x \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 0$ kezdeti érték problémát.

C csoport

Feladat. Oldjuk meg a $2y'' + y(y')^3 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$ kezdeti érték feladatot.

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása. A $v(y) = v = y'$, $y'' = vv'$ helyettesítéssel a

$$3v^2v' = e^y$$

szétválasztott változójú egyenletet kapjuk. Ez megoldva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3v^2v' &= e^y \\ \int 3v^2 dv &= \int e^y dy \\ v^3 &= e^y + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ (y')^3 &= e^y + C \\ y' &= \sqrt[3]{e^y + C}. \end{aligned}$$

1 pt

Felhasználva, hogy $y(-3) = 0$ és $y'(-3) = 1$ azt kapjuk, hogy

$$1 = \sqrt[3]{e^0 + C} = \sqrt[3]{1 + C}, \quad \text{amiből} \quad C = 0.$$

Tehát az egyenlet

$$y' = \sqrt[3]{e^y} = e^{y/3},$$

ami szétválasztható változójú:

$$\begin{aligned} e^{-y/3}y' &= 1 \\ \int e^{-y/3} dy &= \int 1 dx \\ -3e^{-y/3} &= x + D, \quad D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2 pt

Az $y(-3) = 0$ kezdeti feltétel miatt

$$-3e^0 = -3 + D, \quad \text{amiből} \quad D = 0.$$

Így a kezdeti érték probléma implicit megoldása

$$-3e^{-y/3} = x.$$

3 pt

B csoport

Feladat megoldása. Az $u(x) = y'$ helyettesítéssel $y'' = u'$ és

$$u' = \frac{u}{x} + x \sin x,$$

ami egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet. A homogenizált egyenlet

$$u' = \frac{u}{x}$$

megoldása

$$\begin{aligned} \frac{u'}{u} &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{1}{u} du &= \int \frac{1}{x} dx \\ \ln |u| &= \ln |x| + \ln C = \ln C|x|, \quad C \in \mathbb{R}^+ \\ u_h &= Cx, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1 pt

A partikuláris megoldás $u_p = c(x)x = cx$, ekkor $u' = c'x + c$, és így

$$\begin{aligned} c'x + c &= c + x \sin x \\ c' &= \sin x \\ c &= -\cos x, \end{aligned}$$

azaz $u_p = -x \cos x$. Tehát

$$y' = u = u_h + u_p = Cx - x \cos x.$$

Az $y'(\pi) = 0$ feltételből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= C \cdot \pi - \pi \cos \pi \\ 0 &= C \cdot \pi + \pi \\ C &= -1, \end{aligned}$$

azaz

$$y' = -x - x \cos x.$$

2 pt

Parciális integrálással, $s = x$, $t' = \cos x$, $s' = 1$, $t = \sin x$ alapján

$$\begin{aligned} y &= \int (-x - \underbrace{x \cos x}_{st'}) dx = -\frac{x^2}{2} - \underbrace{x \sin x}_{st} + \int \underbrace{\sin x}_{s't} dx \\ &= -\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + D. \end{aligned}$$

Az $y(0) = 1$ feltételből:

$$1 = -1 + D,$$

azaz $D = 2$. Ezért

$$y = -\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + 2.$$

3 pt

C csoport

Feladat megoldása. Az egyenletben nincs x de van y , ezért a helyettesítés: $v = v(y) = y'$, $y'' = vv'$. A

$$2vv' + yv^3 = 0$$

egyenlet szétválasztható.

Ha $v = 0$, akkor $v' = 0$ és $2 \cdot 0 \cdot 0 + y \cdot 0 = 0$ alapján ez megoldása a differenciálegyenletnek. De az $y' = v = 0$ függvény nem rendelkezik az $y'(1) = 4$ feltétellel, tehát a kezdeti érték problémájának ez nem megoldása.

Ha $v \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} 2vv' + yv^3 &= 0 \\ 2vv' &= -yv^3 \\ \frac{2v'}{v^2} &= -y \\ \int \frac{2}{v^2} dv &= - \int y dy \\ -\frac{2}{v} &= -\frac{y^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ -\frac{2}{v} &= -\frac{y^2 + C}{2} \\ \frac{v}{2} &= \frac{2}{y^2 + C} \\ y' = v &= \frac{4}{y^2 + C} \end{aligned}$$

A $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$ feltételből kapjuk, hogy

$$4 = \frac{4}{1 + C},$$

azaz $C = 0$. Tehát

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4}{y^2} \\ y^2 y' &= 4 \\ \int y^2 dy &= \int 4 dx \\ \frac{y^3}{3} &= 4x + D, \quad D \in \mathbb{R} \\ y &= \sqrt[3]{12x + D}. \end{aligned}$$

Ekkor $y(1) = 1$ alapján $1 = \sqrt[3]{12 + D}$, azaz $D = -11$, tehát a feladat megoldása

$$y = \sqrt[3]{12x - 11}.$$

4.

Laplace–transzformált; alkalmazás

Házi feladatok

Laplace–transzformált

Az $f(x)$ függvény Laplace–transzformáltja $L[f(x)](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx$.

Tulajdonságai:

$$\begin{aligned} L[c \cdot f(x) + g(x)](p) &= c \cdot L[f(x)](p) + L[g(x)](p), \quad c \in \mathbb{R}; \\ L[e^{ax} \cdot f(x)](p) &= L[f(x)](p - a), \quad a \in \mathbb{R}; \\ L[x \cdot f(x)](p) &= -L'[f(x)](p) = -\frac{dL[f(x)](p)}{dp}. \end{aligned}$$

Néhány függvény Laplace–transzformáltja:

$$\begin{aligned} L[1](p) &= \frac{1}{p}; & L[x^n](p) &= \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}; \\ L[\cos ax](p) &= \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R}; & L[\operatorname{ch} ax](p) &= \frac{p}{p^2 - a^2}, \quad a \in \mathbb{R}; \\ L[\sin ax](p) &= \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R}; & L[\operatorname{sh} ax](p) &= \frac{a}{p^2 - a^2}, \quad a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 4$ függvény Laplace–transzformáltját.

Megoldás.

$$\begin{aligned} L[f(x)](p) &= L[2x^5 - 3x^2 + 4](p) \\ &= 2 \cdot L[x^5](p) - 3 \cdot L[x^2](p) + 4 \cdot L[1](p) \\ &= 2 \cdot \frac{5!}{p^{5+1}} - 3 \cdot \frac{2!}{p^{2+1}} + 4 \cdot \frac{1}{p} \\ &= \frac{2 \cdot 5!}{p^6} - \frac{6}{p^3} + \frac{4}{p}. \end{aligned}$$

2. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = \cos 2x - e^x \operatorname{sh} 3x + 2e^{-4x}$ függvény Laplace–transzformáltját.

Megoldás.

$$\begin{aligned} L[f(x)](p) &= L[\cos 2x](p) - L[e^x \operatorname{sh} 3x](p) + L[2e^{-4x}](p) \\ &= L[\cos 2x](p) - L[\operatorname{sh} 3x](p-1) + 2 \cdot L[1](p+4) \\ &= \frac{p}{p^2+4} - \frac{3}{(p-1)^2-9} + 2 \cdot \frac{1}{p+4}. \end{aligned}$$

MEGJEGYZÉS. Ezen feladatban is megmutattuk, és később is gyakran használjuk, hogy

$$L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a}, \quad a \in \mathbb{R}.$$



3. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = e^{5x} \cos 4x + xe^{-3x} - x \operatorname{ch} 2x + xe^{-x} \sin 3x$ függvény Laplace–transzformáltját.

Megoldás.

$$\begin{aligned} L[f(x)](p) &= L[e^{5x} \cos 4x](p) + L[xe^{-3x}](p) - L[x \operatorname{ch} 2x](p) + L[xe^{-x} \sin 3x](p) \\ &= L[\cos 4x](p-5) + L[x](p+3) + L'[\operatorname{ch} 2x](p) - L'[\sin 3x](p+1) \\ &= \frac{p-5}{(p-5)^2+16} + \frac{1}{(p+3)^2} + \left[\frac{p}{p^2-4} \right]' - \left[\frac{3}{(p+1)^2+9} \right]' \\ &= \frac{p-5}{(p-5)^2+16} + \frac{1}{(p+3)^2} - \frac{p^2+4}{(p^2-4)^2} + \frac{6(p+1)}{((p+1)^2+9)^2}. \end{aligned}$$

MEGJEGYZÉS. Elemi számolás után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} L[x \cos ax](p) &= - \left[\frac{p}{p^2+a^2} \right]' = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \\ L[x \operatorname{ch} ax](p) &= - \left[\frac{p}{p^2-a^2} \right]' = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \\ L[x \sin ax](p) &= - \left[\frac{a}{p^2+a^2} \right]' = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}, \\ L[x \operatorname{sh} ax](p) &= - \left[\frac{a}{p^2-a^2} \right]' = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}. \end{aligned}$$



Inverz Laplace-transzformált

A Laplace-transzformált ismeretében határozzuk meg az eredeti függvényt.

4. Feladat. $L[f(x)](p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{p}{p^2-1}.$

Megoldás. A fent ismertetett transzformáltak és tulajdonságok ismeretében rögtön írhatjuk, hogy

$$f(x) = 1 + e^{-x} + xe^x + \operatorname{ch} x.$$

5. Feladat. $L[f(x)](p) = \frac{1}{(p+1)^3} - \frac{3}{p+2} + \frac{p-5}{p^2+9}.$

Megoldás. Alakítsuk át a feladat jobb oldalát a következőképpen:

$$\frac{1}{(p+1)^3} - \frac{3}{p+2} + \frac{p-5}{p^2+9} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{2!}{(p+1)^3} - 3 \cdot \frac{1}{p+2} + \frac{p}{p^2+9} - \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{p^2+9},$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} - 3e^{-2x} + \cos 3x - \frac{5}{3}\sin 3x.$$

6. Feladat. $L[f(x)](p) = \frac{p+2}{p^2-2p-3} - \frac{p}{(p^2+9)^2}.$

Megoldás. Az első tagot elemi racionális törtekre bontás segítségével lineáris nevezőjű kifejezések összegére bontjuk:

$$\frac{p+2}{p^2-2p-3} = \frac{p+2}{(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-3} = \frac{A(p-3) + B(p+1)}{(p+1)(p-3)}$$

ahonnan

$$p+2 = A(p-3) + B(p+1).$$

$$\begin{array}{ll} \text{Ha } p = -1, & \text{akkor } 1 = A \cdot (-4), \text{ azaz } A = -1/4, \\ \text{ha } p = 3, & \text{akkor } 5 = B \cdot 4, \text{ azaz } B = 5/4. \end{array}$$

azaz

$$\frac{p+2}{p^2-2p-3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{p-3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p+1}$$

A második tagot pedig a következőképpen alakítjuk:

$$\frac{p}{(p^2+9)^2} = \frac{1}{6} \frac{6p}{(p^2+9)^2}.$$

Így az előző megjegyzésben kiszámolt eredményeket felhasználva adódik, hogy

$$f(x) = \frac{5}{4}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{6}x \sin 3x.$$

7. Feladat. $L[f(x)](p) = \frac{1}{(p^2-4p+5)(p^2-4p+8)}.$

Megoldás. Elemi racionális törtekre kell bontanunk a kifejezést. A $p^2 - 4p + 5 = (p - 2)^2 + 1$ és a $p^2 - 4p + 8 = (p - 2)^2 + 4$ átalakítások alapján jól látható, hogy a nevező két szorzótényezőjének nincs valós gyöke, így a helyes felbontás:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 - 4p + 5)(p^2 - 4p + 8)} &= \frac{Ap + B}{p^2 - 4p + 5} + \frac{Cp + D}{p^2 - 4p + 8} \\ &= \frac{(Ap + B)(p^2 - 4p + 8) + (Cp + D)(p^2 - 4p + 5)}{(p^2 - 4p + 5)(p^2 - 4p + 8)} \end{aligned}$$

Most az egyenlő együtthatók módszerével dolgozunk.

$$\begin{aligned} 1 &= (Ap + B)(p^2 - 4p + 8) + (Cp + D)(p^2 - 4p + 5) \\ 1 &= p^3(A + C) + p^2(B + D - 4A - 4C) + p(8A - 4B + 5C - 4D) + (8B + 5D) \end{aligned}$$

Vagyis az

$$\begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = B + D - 4A - 4C \\ 0 = 8A - 4B + 5C - 4D \\ 1 = 8B + 5D, \end{cases}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az első egyenletből például $A = -C$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$0 = B + D + 4C - 4C = B + D,$$

ahonnan $B = -D$. Ezeket az utolsó két egyenletbe írva kapjuk, hogy

$$0 = -8C + 4D + 5C - 4D = -3C,$$

azaz $C = 0$, és így $A = 0$. Továbbá

$$1 = -8D + 5D = -3D,$$

ahonnan $D = -1/3$ és így $B = 1/3$. Ezért

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 - 4p + 5)(p^2 - 4p + 8)} &= \frac{1}{3} \frac{1}{p^2 - 4p + 5} - \frac{1}{6} \frac{2}{p^2 - 4p + 8} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{(p - 2)^2 + 1} - \frac{1}{6} \frac{2}{(p - 2)^2 + 4} \end{aligned}$$

adódik, így

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{2x} \sin x - \frac{1}{6}e^{2x} \sin 2x.$$

Alkalmazás

Amennyiben az $y = y(x)$ függvény Laplace–transzformáltját $Y := L[y](p)$ -vel jelöljük, akkor y deriváltjának Laplace–transzformáltjára teljesül, hogy

$$L[y'](p) = pY - y(0), \quad L[y''](p) = p^2Y - py(0) - y'(0).$$

8. Feladat. Oldjuk meg Laplace–transzformáció segítségével az $y'' - y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti érték feladatot.

Megoldás. Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace–transzformáltját, majd rendezzük az egyenletet Y -ra:

$$\begin{aligned} y'' - y &= e^x \\ L[y''] - L[y] &= L[e^x] \\ p^2Y - py(0) - y'(0) - Y &= \frac{1}{p-1} \\ p^2Y - p \cdot 1 - 0 - Y &= \frac{1}{p-1} \\ p^2Y - p - Y &= \frac{1}{p-1} \\ Y(p^2 - 1) &= \frac{1}{p-1} + p \\ Y &= \frac{1}{(p-1)(p^2-1)} + \frac{p}{p^2-1}. \end{aligned}$$

A jobb oldal első tagját elemi racionális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{(p-1)(p^2-1)} = \frac{1}{(p-1)^2(p+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p+1},$$

ahonnan

$$1 = A(p-1)(p+1) + B(p+1) + C(p-1)^2$$

$$\begin{aligned} p = 1 \quad \text{esetén} \quad 1 &= B \cdot 2, \quad \text{azaz} \quad B = 1/2, \\ p = -1 \quad \text{esetén} \quad 1 &= C \cdot 4, \quad \text{azaz} \quad C = 1/4, \\ p = 0 \quad \text{esetén} \quad 1 &= A \cdot (-1) + B + C = -A + 1/2 + 1/4, \quad \text{azaz} \quad A = -1/4. \end{aligned}$$

Ezért

$$\frac{1}{(p-1)(p^2-1)} = -\frac{1}{4} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{p+1},$$

vagyis

$$Y = -\frac{1}{4} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2-1}.$$

Végül a Laplace–transzformált ismeretében meghatározzuk az eredeti függvényt, így a feladat megoldása

$$y = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \text{ch } x.$$

MEGJEGYZÉS. Természetesen az Y -t először összevonhattuk volna egyetlen tört kifejezéssé. Ekkor, ugyan csak ezt az egy kifejezést kell elemi törtekre bontanunk, ám ez a legtöbb esetben jóval bonyolultabb, mint több, de egyszerűbb kifejezéssel dolgozni. Ezért a további feladatokban is egyszerű felbontásokat számolunk ki többször. ✖

9. Feladat. Oldjuk meg az $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ kezdeti érték feladatot Laplace–transzformáció segítségével.

Megoldás. Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace–transzformáltját, majd rendezzük az egyenletet Y -ra:

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= xe^{-x} \\ L[y''] + 3L[y'] + 2L[y] &= L[xe^{-x}] \\ p^2Y - p - 1 + 3(pY - 1) + 2Y &= \frac{1}{(p+1)^2} \\ Y(p^2 + 3p + 2) - p - 4 &= \frac{1}{(p+1)^2} \\ Y &= \frac{1}{(p+1)^2(p^2 + 3p + 2)} + \frac{p+4}{p^2 + 3p + 2} \\ Y &= \frac{1}{(p+1)^3(p+2)} + \frac{p+4}{(p+1)(p+2)}. \end{aligned}$$

Elemi racionális törtekre bontással kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(p+1)^3(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{(p+1)^3} + \frac{D}{p+2},$$

ahonnan

$$1 = A(p+1)^2(p+2) + B(p+1)(p+2) + C(p+2) + D(p+1)^3.$$

Behelyettesítéssel

$$\begin{aligned} p = -1 \text{ esetén} \quad & 1 = C \cdot 1, \quad \text{azaz} \quad C = 1, \\ p = -2 \text{ esetén} \quad & 1 = D \cdot (-1), \quad \text{azaz} \quad D = -1, \\ p = 0 \text{ esetén} \quad & 1 = 2A + 2B + 2 - 1, \quad \text{ahonnan} \quad A = -B, \\ p = 1 \text{ esetén} \quad & 1 = 12A + 6B + 3 - 8 = -12B + 6B - 5, \quad \text{ahonnan} \quad B = -1 \text{ és így} \quad A = 1 \end{aligned}$$

adódik. Továbbá

$$\frac{p+4}{(p+1)(p+2)} = \frac{E}{p+1} + \frac{F}{p+2},$$

ahonnan

$$p+4 = E(p+2) + F(p+1).$$

$$\begin{aligned} \text{Ha } p = -1, \text{ akkor} \quad & 3 = E \cdot 1, \quad \text{azaz} \quad E = 3, \\ \text{ha } p = -2, \text{ akkor} \quad & 2 = F \cdot (-1), \quad \text{azaz} \quad F = -2. \end{aligned}$$

Ezért

$$Y = \frac{4}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} - \frac{3}{p+2},$$

így a feladat megoldása

$$y = 4e^{-x} - xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} - 3e^{-2x}.$$

10. Feladat. Oldjuk meg az $y'' + 4y = \cos 2x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$ kezdeti érték problémát.

Megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned} p^2Y - 3p + 1 + 4Y &= \frac{p}{p^2 + 4} \\ Y(p^2 + 4) &= \frac{p}{p^2 + 4} + 3p - 1 \\ Y &= \frac{p}{(p^2 + 4)^2} + \frac{3p - 1}{p^2 + 4} \\ Y &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4p}{(p^2 + 4)^2} + 3 \cdot \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2 + 4} \end{aligned}$$

alapján a feladat megoldása

$$y = \frac{1}{4}x \sin 2x + 3 \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Videók

Laplace–transzformált

Adjuk meg a következő függvények Laplace–transzformáltját.

1. Feladat.

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = 1 & f_4(x) = 5x^2 - 2x + 1/4 & f_6(x) = x^2 e^{3x} \\ f_2(x) = x & f_5(x) = e^{2x} & f_7(x) = x e^x \\ f_3(x) = x^2 & & \end{array}$$

Megoldás.



$$\begin{array}{lll} L[f_1](p) = \frac{1}{p} & L[f_4](p) = 5 \cdot \frac{2}{p^3} - 2 \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p} & \\ L[f_2](p) = \frac{1}{p^2} & L[f_5](p) = \frac{1}{p-2} & \\ L[f_3](p) = \frac{2}{p^3} & L[f_6](p) = \frac{2}{(p-3)^3} & L[f_7](p) = \frac{1}{(p-1)^2} \end{array}$$

2. Feladat.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \sin 3x - \cos 2x & f_4(x) = x \cdot \cos 2x \\ f_2(x) = e^{2x} \sin x + 2e^{-x} \cos 3x & f_5(x) = x e^{-2x} \sin 3x \\ f_3(x) = x \cdot \sin 3x & \end{array}$$

Megoldás.



$$\begin{array}{ll} L[f_1](p) = \frac{3}{p^2+9} - \frac{p}{p^2+4} & L[f_4](p) = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} \\ L[f_2](p) = \frac{1}{(p-2)^2+1} + 2 \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2+9} & L[f_5](p) = \frac{6(p+2)}{((p+2)^2+9)^2} \\ L[f_3](p) = \frac{6p}{(p^2+9)^2} & \end{array}$$

3. Feladat.

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = \operatorname{sh} 2x & f_4(x) = e^{ax} \operatorname{ch} bx & f_6(x) = x \operatorname{ch} ax \\ f_2(x) = \operatorname{ch} 3x & f_5(x) = x \operatorname{sh} ax & f_7(x) = x e^{-x} \operatorname{ch} 3x \\ f_3(x) = e^x \operatorname{sh} 2x & & \end{array}$$

Megoldás.



$$\begin{aligned}
 L[f_1](p) &= \frac{2}{p^2 - 4} & L[f_4](p) &= \frac{p - a}{(p - a)^2 - b^2} & L[f_6](p) &= \frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2} \\
 L[f_2](p) &= \frac{p}{p^2 - 9} & L[f_5](p) &= \frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2} & L[f_7](p) &= \frac{(p + 1)^2 + 9}{((p + 1)^2 - 9)^2} \\
 L[f_3](p) &= \frac{2}{(p - 1)^2 - 4}
 \end{aligned}$$

Inverz Laplace-transzformált

A Laplace-transzformált ismeretében határozzuk meg az eredeti függvényt.

4. Feladat.

$$\begin{aligned}
 L[f_1](p) &= \frac{1}{p} + \frac{3}{p^2} - \frac{1}{(p + 2)^2} & L[f_4](p) &= \frac{p + 1}{p^2 - 3p + 2} \\
 L[f_2](p) &= \frac{2}{p + 1} + \frac{5}{(p + 1)^3} - \frac{3}{p^2 + 4} & L[f_5](p) &= \frac{2p - 1}{p^2 - 4p + 4} \\
 L[f_3](p) &= \frac{p + 2}{p^2 + 9} + \frac{p - 2}{(p - 2)^2 + 9}
 \end{aligned}$$

Megoldás.



$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 1 + 3x - xe^{-2x} & f_4(x) &= 3e^{2x} - 2e^x \\
 f_2(x) &= 2e^{-x} + \frac{5}{2}x^2e^{-x} - \frac{3}{2}\sin 2x & f_5(x) &= 2e^{2x} + 3xe^{2x} \\
 f_3(x) &= \cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x + e^{2x}\cos 3x
 \end{aligned}$$

5. Feladat.

$$L[f_1](p) = \frac{2p + 5}{p^2 - 9} + \frac{p - 3}{p^2 - 9} \quad L[f_2](p) = \frac{2p - 1}{p^2(p^2 - 9)} \quad L[f_3](p) = \frac{2p - 1}{(p + 3)(p^2 - 9)}$$

Megoldás.



$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \frac{11}{6}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{-3x} + e^{-3x} & f_3(x) &= -\frac{5}{36}e^{-3x} + \frac{7}{6}xe^{-3x} + \frac{5}{36}e^{3x} \\
 f_2(x) &= -\frac{2}{9} + \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}\operatorname{ch} 3x - \frac{1}{27}\operatorname{sh} 3x
 \end{aligned}$$

6. Feladat.

$$L[f_1](p) = \frac{p + 3}{p^2 + 2} \quad L[f_2](p) = \frac{3p + 2}{p^2 - 4p + 5} \quad L[f_3](p) = \frac{p + 1}{p^2 - 4p + 3}$$

Megoldás.



$$f_1(x) = \cos \sqrt{2}x + \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x$$

$$f_2(x) = 3e^{2x} \cos x + 8e^{2x} \sin x$$

$$f_3(x) = e^{2x} \operatorname{ch} x + 3e^{2x} \operatorname{sh} x$$

7. Feladat. $L[f](p) = \frac{p+2}{(p^2-6p+8)^2}$

Megoldás. $f(x) = \frac{5}{4}e^{2x} + xe^{2x} - \frac{5}{4}e^{4x} + \frac{3}{2}xe^{4x}$



8. Feladat. $L[f](p) = \frac{p+2}{(p^2+9)^2}$

Megoldás. $f(x) = \frac{1}{6}x \sin 3x - \frac{1}{9}x \cos 3x + \frac{1}{27} \sin 3x$



9. Feladat. $L[f](p) = \frac{p-1}{(p^2+2p+2)^2}$

Megoldás. $f(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{2}x \sin x + x \cos x - \sin x \right)$



Alkalmazás

Laplace–transzformációval oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatokat.

10. Feladat. $y' + 2y = e^{-2x}, \quad y(0) = 2$

Megoldás. $y = 2e^{-2x} + xe^{-2x}$



11. Feladat. $y'' - 4y = x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

Megoldás. $y = \frac{9}{4} \operatorname{ch} 2x + \frac{5}{8} \operatorname{sh} 2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$



12. Feladat. $y'' - 4y = e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$

Megoldás. $y = \frac{15}{16}e^{-2x} - \frac{1}{4}xe^{-2x} + \frac{1}{16}e^{2x}$



13. Feladat. $y'' + y' = e^{-x} + x + 2, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$

Megoldás. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - 2e^{-x} - xe^{-x}$



14. Feladat. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$

Megoldás. $y = -4e^{-x} + 2e^{-2x} + xe^{-x}$



15. Feladat. $y'' + 2y' + y = e^{-x} + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

Megoldás. $y = e^{-x} + 4xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} + 1$



16. Feladat. $y'' + 4y = \sin 2x - 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

Megoldás. $y = \frac{5}{4} \cos 2x + \frac{9}{8} \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x - \frac{1}{4}$



17. Feladat. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

Megoldás. $y = e^{2x} \cos 3x - e^{2x} \sin 3x + \frac{1}{6}xe^{2x} \sin 3x$



Kvízek

A csoport

1. Feladat. Határozzuk meg az $x^2 \cos 5x$ függvény Laplace-transzformáltját.

2. Feladat. Határozzuk meg az eredeti függvényt, ha $L[f(x)](p) = \frac{3p^2 - 7}{p^3 - 16p} + \frac{p + 1}{p^2 - 9}$.

B csoport

Feladat. Laplace-transzformációval oldjuk meg az

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

kezdeti érték problémát.

C csoport

Feladat. Laplace-transzformációval oldjuk meg az

$$y'' - 4y = 4e^{-2x} - 8 \sin 2x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$$

kezdeti érték problémát.

Kvízek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása. Mivel

$$L[x^2 \cos 5x] = L[x \cdot x \cos 5x] = -L'[x \cos 5x],$$

és

$$L[x \cos 5x] = -L'[\cos 5x] = -\left[\frac{p}{p^2 + 25}\right]' = -\frac{1 \cdot (p^2 + 25) - p \cdot 2p}{(p^2 + 25)^2} = \frac{p^2 - 25}{(p^2 + 25)^2}$$

ezért

$$\begin{aligned} L[x^2 \cos 5x] &= -L'[x \cos 5x] = -\left[\frac{p^2 - 25}{(p^2 + 25)^2}\right]' = -\frac{2p(p^2 + 25)^2 - (p^2 - 25)2(p^2 + 25)2p}{(p^2 + 25)^4} \\ &= -\frac{2p(p^2 + 25) - (p^2 - 25)2 \cdot 2p}{(p^2 + 25)^3} = \frac{2p^3 - 150p}{(p^2 + 25)^3}. \end{aligned}$$

1 pt

2. Feladat megoldása.

$$L[f(x)](p) = \frac{3p^2 - 7}{p^3 - 16p} + \frac{p + 1}{p^2 - 9}$$

Az első tagot elemi racionális törtekre bontjuk:

$$\frac{3p^2 - 7}{p^3 - 16p} = \frac{3p^2 - 7}{p(p^2 - 16)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p - 4} + \frac{C}{p + 4},$$

ahonnan

$$3p^2 - 7 = A(p - 4)(p + 4) + Bp(p + 4) + Cp(p - 4).$$

- Ha $p = 0$, akkor $-7 = A \cdot (-16)$, amiből $A = 7/16$.
- Ha $p = 4$, akkor $3 \cdot 16 - 7 = B \cdot 4 \cdot 8$, amiből $41 = 32B$, azaz $B = 41/32$.
- Ha $p = -4$, akkor $41 = 32C$, azaz $C = 41/32$.

2 pt

Így

$$\begin{aligned} \frac{3p^2 - 7}{p^3 - 16p} &= \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{p} + \frac{41}{32} \cdot \frac{1}{p - 4} + \frac{41}{32} \cdot \frac{1}{p + 4} = \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{p} + \frac{41}{32} \cdot \frac{2p}{p^2 - 16} \\ &= \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{p} + \frac{41}{16} \cdot \frac{p}{p^2 - 4^2} = \frac{7}{16}L[1](p) + \frac{41}{16}L[\operatorname{ch} 4x](p). \end{aligned}$$

Tekintsük a második tagot:

$$\frac{p + 1}{p^2 - 9} = \frac{p}{p^2 - 3^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{p^2 - 3^2} = L[\operatorname{ch} 3x](p) + \frac{1}{3}L[\operatorname{sh} 3x](p),$$

tehát

$$f(x) = \frac{7}{16} + \frac{41}{16} \operatorname{ch} 4x + \operatorname{ch} 3x + \frac{1}{3} \operatorname{sh} 3x.$$

3 pt

Kvízek megoldása

*B csoport***Feladat megoldása.** Az $Y = Y(p) = L[y](p)$ jelöléssel

$$L[y''] = p^2 Y - p - 1, \quad L[y'] = pY - 1.$$

Ezért

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= xe^{-x} \\ p^2 Y - p - 1 + 3(pY - 1) + 2Y &= \frac{1}{(p+1)^2} \\ p^2 Y + 3pY + 2Y &= \frac{1}{(p+1)^2} + p + 4 \\ (p^2 + 3p + 2)Y &= \frac{1}{(p+1)^2} + p + 4 \\ Y &= \frac{1}{(p+1)^2(p^2 + 3p + 2)} + \frac{p+4}{p^2 + 3p + 2}. \end{aligned}$$

A $p^2 + 3p + 2 = (p+2)(p+1)$ szorzattá bontás alapján

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+1)^3(p+2)} &= \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{(p+1)^3} + \frac{D}{p+2} \\ 1 &= A(p+1)^2(p+2) + B(p+1)(p+2) + C(p+2) + D(p+1)^3. \end{aligned}$$

- A $p = -2$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $1 = -D$, azaz $D = -1$.
- A $p = -1$ helyettesítéssel $C = 1$ adódik.
- Ha $p = 0$, akkor

$$\begin{aligned} 1 &= 2A + 2B + 2C + D = 2A + 2B + 2 - 1 = 2A + 2B + 1 \\ 0 &= 2A + 2B \\ A &= -B. \end{aligned}$$

- Ha $p = 1$, akkor

$$\begin{aligned} 1 &= 12A + 6B + 3C + 8D = -12B + 6B + 3 - 8 = -6B - 5 \\ 6 &= -6B \\ B &= -1, \end{aligned}$$

és így $A = 1$.

Tehát

$$\frac{1}{(p+1)^3(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} - \frac{1}{p+2}.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \frac{p+4}{p^2 + 3p + 2} &= \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} \\ p+4 &= A(p+2) + B(p+1). \end{aligned}$$

1 pt

- A $p = -2$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $2 = -B$, azaz $B = -2$.
- A $p = -1$ helyettesítésével $A = 3$ adódik.

2 pt

Azaz

$$\frac{p+4}{p^2+3p+2} = \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p+2}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{(p+1)^2(p^2+3p+2)} + \frac{p+4}{p^2+3p+2} \\ &= \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} - \frac{1}{p+2} + \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p+2} \\ &= \frac{4}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} - \frac{3}{p+2}. \end{aligned}$$

Így

$$y = 4e^{-x} - xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} - 3e^{-2x}.$$

3 pt

C csoport

Feladat megoldása. Az $Y = Y(p) = L[y](p)$ jelöléssel $L[y''] = p^2Y - 3p + 1$. Ezért

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= 4e^{-2x} - 8 \sin 2x \\ p^2Y - 3p + 1 - 4Y &= \frac{4}{p+2} - 8 \cdot \frac{2}{p^2+4} \\ (p^2-4)Y &= \frac{4}{p+2} - 8 \cdot \frac{2}{p^2+4} + 3p - 1 \\ Y &= \frac{4}{(p^2-4)(p+2)} - \frac{16}{(p^2-4)(p^2+4)} + \frac{3p}{p^2-4} - \frac{1}{p^2-4}. \end{aligned}$$

Ekkor, $(p^2-4)(p+2) = (p-2)(p+2)(p+2) = (p-2)(p+2)^2$ miatt

$$\begin{aligned} \frac{4}{(p^2-4)(p+2)} &= \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{(p+2)^2} \\ 4 &= A(p+2)^2 + B(p-2)(p+2) + C(p-2). \end{aligned}$$

- A $p = -2$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $4 = -4C$, azaz $C = -1$.
- A $p = 2$ helyettesítésével $4 = 16A$, $A = 1/4$ adódik.
- Ha $p = 0$, akkor

$$\begin{aligned} 4 &= 4A - 4B - 2C = 1 - 4B + 2 = 3 - 4B \\ 1 &= -4B \\ B &= -1/4. \end{aligned}$$

Tehát

$$\frac{4}{(p^2-4)(p+2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p+2} - \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \frac{16}{(p^2-4)(p^2+4)} &= \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+2} + \frac{Cp+D}{p^2+4} \\ 16 &= A(p+2)(p^2+4) + B(p-2)(p^2+4) + (Cp+D)(p-2)(p+2). \end{aligned}$$

- A $p = -2$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $16 = -32B$, azaz $B = -1/2$.
- A $p = 2$ helyettesítésével $16 = 32A$, $A = 1/2$ adódik.
- Ha $p = 0$, akkor

$$\begin{aligned} 16 &= 8A - 8B - 4D = 4 + 4 - 4D = 8 - 4D \\ 8 &= -4D \\ D &= -2. \end{aligned}$$

- Továbbá $p = 1$ esetén

$$\begin{aligned} 16 &= 15A - 5B + (C+D) \cdot (-3) = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} - 3C + 6 = 16 - 3C \\ 0 &= -3C \\ C &= 0. \end{aligned}$$

1 pt

2 pt

Azaz

$$\frac{16}{(p^2 - 4)(p^2 + 4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p - 2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p + 2} - \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} Y &= \frac{4}{(p^2 - 4)(p + 2)} - \frac{16}{(p^2 - 4)(p^2 + 4)} + \frac{3p}{p^2 - 4} - \frac{1}{p^2 - 4} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p - 2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p + 2} - \frac{1}{(p + 2)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p - 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p + 2} + \frac{2}{p^2 + 4} + \frac{3p}{p^2 - 4} - \frac{1}{p^2 - 4} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p - 2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p + 2} - \frac{1}{(p + 2)^2} + \frac{2}{p^2 + 4} + 3 \cdot \frac{p}{p^2 - 4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2 - 4}. \end{aligned}$$

Így

$$y = -\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - xe^{-2x} + \sin 2x + 3 \operatorname{ch} 2x - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x.$$

3 pt

5.

Geometriai sor; teleszkopikus sor; összehasonlító teszt

Házi feladatok

Geometriai sor

$A \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$ alakú sort *geometriai vagy mértani sornak* nevezzük.

Tudjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad |q| < 1, \quad \text{és ekkor} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

1. Feladat. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^n} (-1)^n$ sor összegét.

Megoldás. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^n} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{7}\right)^n$$

elemi átalakítás után a $q = -\frac{4}{7}$, $\left|-\frac{4}{7}\right| < 1$ tulajdonság miatt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^n} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{7}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{7}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{4}{7}} = \frac{7}{11}.$$

2. Feladat. Adjuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n+3}}{3^{n-1}}$ sor összegét.

Megoldás. Az összegzés $n = 2$ -től indul, így első lépésben az $m = n - 2$, ($n = m + 2$) helyettesítést végezzük el, hogy a sor $m = 0$ -tól induljon:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n+3}}{3^{n-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{(m+2)+3}}{3^{(m+2)-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{m+5}}{3^{m+1}}.$$

Ezt követően, a hatványozás azonosságait alkalmazva a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{m+5}}{3^{m+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^5 \cdot 2^m}{3 \cdot 3^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^5}{3} \cdot \frac{2^m}{3^m} = \frac{5 \cdot 2^5}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m$$

alakra hozzuk, és $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ miatt kapjuk, hogy

$$\frac{5 \cdot 2^5}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{5 \cdot 2^5}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 5 \cdot 2^5 = 160.$$

3. Feladat. Adjuk meg a következő sorok összegét.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 3^{n-4}}{3 \cdot 5^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 7^{n-4}}{3 \cdot 5^n}$$

Megoldás.

(a) Az $m = n - 1$, ($n = m + 1$) helyettesítés és átalakítás után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 3^{n-4}}{3 \cdot 5^n} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{2(m+1)+1} - 3^{(m+1)-4}}{3 \cdot 5^{m+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{2m+3} - 3^{m-3}}{3 \cdot 5^{m+1}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^3 \cdot 4^m - 3^{-3} \cdot 3^m}{3 \cdot 5 \cdot 5^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2^3 \cdot 4^m}{15 \cdot 5^m} - \frac{3^{-3} \cdot 3^m}{15 \cdot 5^m} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{4^m}{5^m} - \frac{3^{-3}}{15} \cdot \frac{3^m}{5^m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{8}{15} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^m - \frac{3^{-3}}{15} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^m \right). \end{aligned}$$

Az $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$, és $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$ összefüggések miatt az összegzést felbonthatjuk két konvergens sor különbségére, és a sorokat külön-külön kiszámolva kapjuk, hogy

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{15} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^m - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^{-3}}{15} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^m = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} - \frac{3^{-3}}{15} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5}}.$$

(b) Vegyük észre, hogy ez a példa az előző feladat módosítása, 3^{n-4} helyett most 7^{n-4} a számláló második tagja. Így a fentiek alapján, $\left|\frac{7}{5}\right| > 1$ miatt a második sor divergens. Mivel az első sor konvergens, ezért az eredeti sor divergens.

MEGJEGYZÉS. Ezt a tényt az általános tag határértékének vizsgálatával is igazolhatjuk, ugyanis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} - 7^{n-4}}{3 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n}{5^n} \cdot \frac{2 \cdot \frac{4^n}{7^n} - 7^{-4}}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{5}\right)^n \cdot \frac{2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^n - 7^{-4}}{3} = -\infty \neq 0,$$

amelyből következik, hogy a sor divergens.

Ugyanakkor, ha az általános tag határértéke 0, akkor további vizsgálatot kell végezni. Csak ez a tulajdonság nem elégséges a konvergenciához. ✖

Teleszkopikus sor

Tudjuk, hogy egy sor összege (ha van) az s_n részletösszeg-sorozat határértéke. Teleszkopikus sorok esetében ez az s_n algebrai átalakítások segítségével egyszerűen megadható.

4. Feladat. Adjuk meg a $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$ sor összegét.

Megoldás. Az

$$s_n = a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

részletösszeg-sorozat határértékét fogjuk vizsgálni, de ehhez előbb átalakítjuk az általános tagot elemi törtekre bontás segítségével:

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2) + Bn}{n(n+2)},$$

ahonnan

$$1 = A(n+2) + Bn.$$

$$\text{Ha } n = 0, \text{ akkor } 1 = A \cdot 2, \text{ azaz } A = 1/2,$$

$$\text{ha } n = -2, \text{ akkor } 1 = B \cdot (-2), \text{ azaz } B = -1/2.$$

Tehát

$$a_n = \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+2}.$$

Legalább addig írjuk ki a tagokat előlről és hátulról is, amíg már megjelennek az egymást kiejtő kifejezések. Ehhez pontosan 1-gyel több tagot kell felhasználni, mint az $n(n+2) = 0$ egyenlet gyökeinek távolsága, azaz jelen esetben 3-at. A jobb szemléltetés végett most ennél több tagot is feltüntetünk:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5}\right) + \left(\frac{1/2}{4} - \frac{1/2}{6}\right) + \left(\frac{1/2}{5} - \frac{1/2}{7}\right) + \left(\frac{1/2}{6} - \frac{1/2}{8}\right) + \left(\frac{1/2}{7} - \frac{1/2}{9}\right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1/2}{n-2} - \frac{1/2}{n}\right) + \left(\frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1}\right) + \left(\frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+2}\right) \\ &= \frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5} + \frac{1/2}{4} - \frac{1/2}{6} + \frac{1/2}{5} - \frac{1/2}{7} + \frac{1/2}{6} - \frac{1/2}{8} + \frac{1/2}{7} - \frac{1/2}{9} \\ &\quad + \dots + \frac{1/2}{n-2} - \frac{1/2}{n} + \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+2} \\ &= \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{4} - \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n+2}. \end{aligned}$$

Jól láthatóan előlről és hátulról is a megmaradó tagok száma kettő, ami éppen az $n(n+2) = 0$ egyenlet gyökeinek távolsága. Innen a részletösszeg határértéke már egyszerűen megadható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{4} - \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n+2} \right) = \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24},$$

tehát

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{7}{24}.$$

MEGJEGYZÉS. Megfigyelhetjük, hogy pontosan annyi tag maradt meg előlről és hátulról is, mint az $n^2 + 2n = 0$ egyenlet két gyökének, $n = -2$ és $n = 0$ -nak a távolsága, azaz 2. $\boxtimes$

5. Feladat. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$ sor összegét.

Megoldás. Az általános tagot elemi törtekre bontjuk:

$$a_n = \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3} = \frac{A(2n+3) + B(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)},$$

azaz

$$2 = A(2n+3) + B(2n+1),$$

$$\begin{array}{ll} n = -1/2 \text{ esetén} & 2 = A \cdot 2, \text{ azaz } A = 1, \\ n = -3/2 \text{ esetén} & 2 = B \cdot (-2), \text{ azaz } B = -1. \end{array}$$

Tehát a felbontás

$$a_n = \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3},$$

és mivel a $4n^2 + 8n + 3 = (2n+1)(2n+3) = 0$ egyenlet gyökeinek távolsága 1, ezért a részletösszeg az

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \\ &= 1 - \frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

alakban írható fel. Így a sor összege

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+3} \right) = 1.$$

6. Feladat. Határozzuk meg a $\sum_{n=5}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ sor összegét.

Megoldás. A logaritmus függvény tulajdonsága miatt

$$a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} s_n &= a_5 + a_6 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= (\ln 6 - \ln 5) + (\ln 7 - \ln 6) + \cdots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) - \ln 5. \end{aligned}$$

Azonban

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n+1) - \ln 5) = \infty$$

miatt a sor divergens.

Összehasonlító teszt

Pozitív tagú sorok konvergenciájának vizsgálatára több eljárást ismertettünk.

Az összehasonlító tesztek:

- (1) Ha valamilyen indextől kezdve minden n -re $a_n \leq b_n$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens.
- (2) Ha valamilyen indextől kezdve minden n -re $a_n \leq b_n$ és $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens.
- (3) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ létezik és $0 < L < \infty$, akkor a két sor hasonlóan viselkedik, $\sum a_n \sim \sum b_n$, azaz, ha valamelyik konvergens (divergens), akkor a másik is konvergens (divergens).

Mindhárom teszt esetén az alkalmazásához ismernünk kell az egyik sort konvergencia szempontjából. A geometriai sor konvergenciájának ismerete mellett azt is tudjuk, hogy

$$\sum \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1.$$

7. Feladat. Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg a következő sorokat.

$$(a) \sum \frac{\sqrt{n}}{n^2} (2 + \sin n) \qquad (b) \sum \frac{\sqrt{n}}{n} (2 + \sin n)$$

Megoldás.

- (a) Először ellenőrizzük, hogy a sor pozitív tagú. Az általános tagban szereplő tört számlálója és nevezője is pozitív, a második szorzótényező pedig

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin n \leq 1 \\ 1 &\leq 2 + \sin n \leq 3 \end{aligned}$$

miatt szintén pozitív.

Ezt követően meghatározzuk az általános tag határértékét:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} (2 + \sin n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} (2 + \sin n) = 0,$$

ugyanis a rendőrelv alapján

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{n^{3/2}} & \leq & \frac{1}{n^{3/2}} (2 + \sin n) & \leq & \frac{3}{n^{3/2}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

ha $n \rightarrow \infty$.

Mivel a $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ sor $p = 3/2 > 1$ miatt konvergens, és

$$\frac{1}{n^{3/2}} (2 + \sin n) \leq \frac{1}{n^{3/2}} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{1}{n^{3/2}},$$

így az (1) összehasonlító teszt alapján az eredeti sor is konvergens.

- (b) A feladat az előző esethez hasonlóan pozitív tagú, továbbá az általános tag szintén nullához tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} (2 + \sin n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/2}} (2 + \sin n) = 0.$$

Azonban most a $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ sor divergenciája ($p = 1/2 \not> 1$) miatt alulról kell becsülnünk. Az $1 \leq 2 + \sin n \leq 3$ összefüggés alapján

$$\frac{1}{n^{1/2}} (2 + \sin n) \geq \frac{1}{n^{1/2}} \cdot 1,$$

tehát a (2) összehasonlító teszt alapján az eredeti sor is divergens.

8. Feladat. Konvergens-e a $\sum \frac{n-5}{2n+9n^3}$ sor?

Megoldás. Első lépésben ellenőrizzük, hogy a sor pozitív tagú. Ez most $n > 5$ esetén teljesül, hiszen ebben az esetben a tört számlálója és nevezője is pozitív.

Ezt követően az általános tag határértékét határozzuk meg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-5}{2n+9n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3} \cdot \frac{1-5/n}{2/n^2+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1-5/n}{2/n^2+9} = 0 \cdot \frac{1}{9} = 0.$$

Ebből ugyan nem következtethetünk a konvergenciára, de a (3) összehasonlító teszt alapján arra igen, hogy a sorunk hasonlóan viselkedik mint a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor, hiszen a megfelelő két általános tag hányadosának határértéke $L = 1/9 > 0$.

A $\sum \frac{1}{n^2}$ sor $p = 2 > 1$ miatt konvergens, így a $\sum \frac{n-5}{2n+n^3}$ is konvergens.

9. Feladat. Vizsgáljuk konvergencia szempontjából a $\sum \frac{\sqrt{2n-1}}{7-2n}$ sort.

Megoldás. Mivel $n > 3$ esetén a sor minden tagja negatív, ezért a sor -1 -szeresét vizsgáljuk. Ez már pozitív tagú, ha $n > 3$:

$$\sum \frac{\sqrt{2n-1}}{7-2n} = - \sum \frac{\sqrt{2n-1}}{2n-7}.$$

Ekkor az általános tag határértéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{2n-7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\sqrt{2-1/n}}{2-7/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \frac{\sqrt{2-1/n}}{2-7/n} = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Tehát $L = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ miatt $\sum \frac{\sqrt{2n-1}}{2n-7} \sim \sum \frac{1}{n^{1/2}}$. Ez utóbbi sor $p = \frac{1}{2} \not> 1$ miatt divergens, amiből következik, hogy a $\sum \frac{\sqrt{2n-1}}{2n-7}$ sor is divergens. Tehát a -1 -szerese is, vagyis az eredeti sor is divergens.

Videók

Geometriai sor

Amennyiben konvergenssek, határozzuk meg a következő sorok összegét.

1. Feladat. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{5^n}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$

Megoldás. a) $\frac{1}{1 - \frac{2}{5}}$, b) $\frac{1}{1 + \frac{2}{5}}$, c) divergens



2. Feladat. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4^n}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4^{n+1}}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4^{2n-1}}$

Megoldás. a) $3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$, b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$, c) $12 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}}$



3. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n+2}}$

Megoldás. $\frac{e}{3^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e}{3}}$



4. Feladat. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n-3}}{3^{n+1}}$

Megoldás. Divergens.



5. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^{2n}} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+3}}{3^{2n-1}}$

Megoldás. $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} - \frac{5^5}{3^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{9}}$



6. Feladat. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n+1} - (-5)^{n-1}}{4^{2n+1}}$

Megoldás. $\frac{3^5}{4^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{16}} + \frac{5}{4^5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{16}}$



7. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1} + 4^{2n+1}}{3^{2n-3}}$

Megoldás. Divergens.



Teleszkopikus sor

Határozzuk meg a következő sorok összegét.

8. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} \right)$

Megoldás. $-\frac{1}{3}$



9. Feladat. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

Megoldás. $\frac{1}{2}$



10. Feladat. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2n}$

Megoldás. $\frac{3}{4}$



11. Feladat. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$

Megoldás. $\frac{1}{3}$



12. Feladat. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4 - n^2}$

Megoldás. $-\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)$



13. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

Megoldás. $\frac{1}{2}$



Összehasonlító teszt

Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját.

14. Feladat. $\sum \frac{1}{n^2 + n}$

Megoldás. Konvergens.



15. Feladat. a) $\sum \frac{n-3}{5n+1}$, b) $\sum \frac{n-3}{5n^2+1}$

Megoldás. a) divergens, b) divergens.



16. Feladat. $\sum \frac{1}{4-n^2}$

Megoldás. Konvergens.



17. Feladat. $\sum \frac{n+3}{2n-n^2}$

Megoldás. Divergens.



18. Feladat. $\sum \frac{\sqrt{5n-2}}{3n^2-n+1}$

Megoldás. Konvergens.



19. Feladat. $\sum \frac{\sqrt[3]{2n-5}}{\sqrt{n^2+1}}$

Megoldás. Divergens.



20. Feladat. $\sum \frac{\sqrt{n} + \ln 3n}{2n^2-1}$

Megoldás. Konvergens.



21. Feladat. $\sum \frac{3^n + 2n}{5^n - n^2}$

Megoldás. Konvergens.



22. Feladat. $\sum \frac{3^n \cdot 2n}{5^n \cdot n^2}$

Megoldás. Konvergens.



23. Feladat. $\sum \frac{n^2 + 2}{2^n - 2n}$

Megoldás. Konvergens.



24. Feladat. $\sum \frac{1 + \cos n}{n^2}$

Megoldás. Konvergens.



Kvizek

A csoport

1. **Feladat.** Határozzuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 3 \cdot 5^{n-1}}{3^{2n-1}}$ sor összegét.

2. **Feladat.** Konvergens-e a $\sum \frac{3 - \sqrt{2n+5}}{n^2 - n + 6}$ sor?

B csoport

1. **Feladat.** Hogyan viselkedik a $\sum \frac{5^n + 2}{3^n - n}$ sor konvergencia szempontjából?

2. **Feladat.** Határozzuk meg a $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n - 2}$ sor összegét.

C csoport

1. **Feladat.** Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^n}{2^{3n+1}}$ sor összegét.

2. **Feladat.** Konvergens-e a $\sum \frac{\sqrt[3]{n+5}}{\ln n}$ sor?

3. **Feladat.** Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg a $\sum \frac{3^n + 2}{5^n - n}$ sort.

D csoport

1. **Feladat.** Határozzuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 5n + 6}$ sor összegét.

2. **Feladat.** Konvergens-e a $\sum \frac{n^2 + 3n}{2^n - n^3}$ sor?

Kvízek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása. Az $m = n - 2$ helyettesítéssel, $n = m + 2$ alapján

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 3 \cdot 5^{n-1}}{3^{2n-1}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{(m+2)} - 3 \cdot 5^{(m+2)-1}}{3^{2(m+2)-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m+2} - 3 \cdot 5^{m+1}}{3^{2m+3}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^m - 3 \cdot 5 \cdot 5^m}{27 \cdot 9^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{4 \cdot 2^m}{27 \cdot 9^m} - \frac{15 \cdot 5^m}{27 \cdot 9^m} \right).\end{aligned}$$

1 pt

Felhasználva a $\left| \frac{2}{9} \right| < 1$ és $\left| \frac{5}{9} \right| < 1$ összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 3 \cdot 5^{n-1}}{3^{2n-1}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^m}{27 \cdot 9^m} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{15 \cdot 5^m}{27 \cdot 9^m} \\ &= \frac{4}{27} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{9} \right)^m - \frac{15}{27} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9} \right)^m \\ &= \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} - \frac{15}{27} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{9}}.\end{aligned}$$

2. Feladat megoldása. A sor negatív tagú $n > 2$ esetén, ezért a

$$\sum \frac{3 - \sqrt{2n+5}}{n^2 - n + 6} = - \sum \frac{\sqrt{2n+5} - 3}{n^2 - n + 6}$$

sort vizsgáljuk:

2 pt

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+5} - 3}{n^2 - n + 6} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} \cdot \frac{\sqrt{2 + 5/n} - 3/n^{1/2}}{1 - 1/n + 6/n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{2 + 5/n} - 3/n^{1/2}}{1 - 1/n + 6/n^2} = "0 \cdot \sqrt{2}" = 0.\end{aligned}$$

Mivel $\sqrt{2} = L > 0$, ezért

$$\sum \frac{\sqrt{2n+5} - 3}{n^2 - n + 6} \sim \sum \frac{1}{n^{3/2}} \quad \left(= \sum \frac{1}{n^p} \right)$$

és $p = 3/2 > 1$ miatt az utóbbi sor konvergens, ezért az eredeti sor is konvergens.

3 pt

B csoport

1. Feladat megoldása. A sor pozitív tagú, ugyanakkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2}{3^n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{3^n} \cdot \frac{1 + 2/5^n}{1 - n/3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \cdot \frac{1 + 2/5^n}{1 - n/3^n} = " \infty \cdot 1 " = \infty,$$

azaz nem 0, így ez a sor divergens.

1 pt

2. Feladat megoldása. Ez egy teleszkopikus sor. Az $n^2 - n - 2 = 0$ egyenlet megoldásai

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

alapján $n_1 = -1$, $n_2 = 2$, és így $n^2 - n - 2 = (n+1)(n-2)$. Továbbá

$$\frac{1}{n^2 - n - 2} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + B(n-2)}{(n+1)(n-2)}$$

$$1 = A(n+1) + B(n-2).$$

- Ha $n = 2$, akkor $1 = 3A$, azaz $A = \frac{1}{3}$.
- Ha $n = -1$, akkor $1 = -3B$, azaz $B = -\frac{1}{3}$.

Ezért

$$\frac{1}{n^2 - n - 2} = \frac{1/3}{n-2} - \frac{1/3}{n+1},$$

amiből

2 pt

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1/3}{1} - \frac{1/3}{4}\right) + \left(\frac{1/3}{2} - \frac{1/3}{5}\right) + \left(\frac{1/3}{3} - \frac{1/3}{6}\right) + \left(\frac{1/3}{4} - \frac{1/3}{7}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1/3}{n-5} - \frac{1/3}{n-2}\right) + \left(\frac{1/3}{n-4} - \frac{1/3}{n-1}\right) + \left(\frac{1/3}{n-3} - \frac{1/3}{n}\right) + \left(\frac{1/3}{n-2} - \frac{1/3}{n+1}\right) \\ &= \frac{1/3}{1} + \frac{1/3}{2} + \frac{1/3}{3} - \frac{1/3}{n-1} - \frac{1/3}{n} - \frac{1/3}{n+1} \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

vagyis a sor összege $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$.

3 pt

C csoport

1. Feladat megoldása. Az $m = n - 1$ helyettesítéssel, $n = m + 1$ alapján

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^n}{2^{3n+1}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^{(m+1)}}{2^{3(m+1)+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^{m+1}}{2^{3m+4}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 5^m}{2^4 \cdot 8^m} \\ &= \frac{15}{16} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^m = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{8}},\end{aligned}$$

hiszen $\left|\frac{5}{8}\right| < 1$.

1 pt

2. Feladat megoldása. Az általános tag határértékére, a L'Hospital-szabály alapján

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^{1/3}}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3}(x+5)^{-2/3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3(x+5)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^{2/3}} \cdot \frac{1}{3(1+5/x)^{2/3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/3} \cdot \frac{1}{3(1+5/x)^{2/3}} = \infty,\end{aligned}$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+5}}{\ln n} = \infty,$$

azaz nem 0, tehát a sor divergens.

2 pt

3. Feladat megoldása. A sor pozitív tagú, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2}{5^n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{5^n} \cdot \frac{1 + 2/3^n}{1 - n/5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \frac{1 + 2/3^n}{1 - n/5^n} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Tehát $L = 1 > 0$ miatt

$$\sum \frac{3^n + 2}{5^n - n} \sim \sum \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Az utóbbi sor $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$ miatt konvergens, így az eredeti sor is konvergens.

3 pt

D csoport

1. Feladat megoldása. Ez egy teleszkopikus sor. Az $n^2 + 5n + 6 = 0$ egyenlet megoldásai

$$n_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

alapján $n_1 = -2$, $n_2 = -3$, és így $n^2 + 5n + 6 = (n + 2)(n + 3)$. Továbbá

$$\frac{2}{n^2 + 5n + 6} = \frac{A}{n + 2} + \frac{B}{n + 3} = \frac{A(n + 3) + B(n + 2)}{(n + 2)(n + 3)}$$

$$2 = A(n + 3) + B(n + 2).$$

- Ha $n = -2$, akkor $2 = A$.
- Ha $n = -3$, akkor $2 = -B$, azaz $B = -2$.

Tehát

$$\frac{2}{n^2 + 3n + 2} = \frac{2}{n + 2} - \frac{2}{n + 3},$$

amiből

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right) + \left(\frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}\right) \\ &= \frac{2}{4} - \frac{2}{n+3} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

alapján a sor összege $1/2$.

2. Feladat megoldása. A sor $n > 9$ esetén pozitív tagú, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{2^n - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{1 + 3/n}{1 - n^3/2^n} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Mivel $1 = L > 0$, ezért

$$\sum \frac{n^2 + 3n}{2^n - n^3} \sim \sum \frac{n^2}{2^n}.$$

Ha n elég nagy, akkor $n^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^n$, és $\frac{n^2}{2^n} < \frac{(3/2)^n}{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, azaz

$$\sum \frac{n^2}{2^n} < \sum \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

A geometriai sor konvergens, hiszen $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$. Ezért $\sum \frac{n^2}{2^n}$ is konvergens és így az eredeti sor is konvergens.

6.

Gyök, hányados teszt; integrál teszt; alternáló sor; számsor becslése

Házi feladatok

Gyök, hányados teszt

A $\sum a_n$ pozitív tagú sorok konvergenciájának eldöntésére, amennyiben az általános tag tartalmaz exponenciális vagy faktoriális kifejezést is, a gyök- vagy a hányados kritériumot alkalmazzuk.

Gyök teszt: Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \varrho$;

Hányados teszt: Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varrho$,

akkor $\varrho < 1$ esetén a sor konvergens,

$\varrho > 1$ esetén a sor divergens,

$\varrho = 1$ esetén további vizsgálat szükséges.

Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját.

1. Feladat. $\sum \frac{2^n(n-2)!}{(2n-1)!}$

Megoldás. A sor $n > 1$ esetén értelmezett és pozitív tagú. A feladat faktoriális tartalmaz, így a hányados tesztet használjuk:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{2^{n+1}((n+1)-2)!}{(2(n+1)-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{2^n(n-2)!} = \frac{2^{n+1}(n-1)!}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{2^n(n-2)!} \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

ahonnan egyszerűsítés után írhatjuk, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{1}{(2n)(2n+1)} = \frac{2(n-1)}{2n(2n+1)}.$$

Ennek a kifejezésnek a határértékét kell meghatároznunk, amit a domináns tagok kiemelésével a tanult módon kapunk meg:

$$\frac{2(n-1)}{2n(2n+1)} = \frac{n}{n^2} \cdot \frac{2(1-1/n)}{2(2+1/n)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2(1-1/n)}{2(2+1/n)} \rightarrow 0 \cdot \frac{2}{4} = 0.$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 = \varrho < 1,$$

ezért a sor konvergens.

2. Feladat. $\sum \frac{2^n - 3n}{n^3 + n - 2}$

Megoldás. A sor $n > 3$ esetén pozitív tagú. Faktoriális kifejezés nincs, de van exponenciális tag, ezért a gyök tesztet alkalmazzuk.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n - 3n}{n^3 + n - 2}} = \frac{\sqrt[n]{2^n - 3n}}{\sqrt[n]{n^3 + n - 2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[n]{1 - 3n/2^n}}{(\sqrt[n]{n})^3 \cdot \sqrt[n]{1 + 1/n^2 - 2/n^3}}$$

Ha n elég nagy, akkor

$$1/2 < 1 - 3n/2^n < 1,$$

ezért

$$\sqrt[n]{1/2} < \sqrt[n]{1 - 3n/2^n} < \sqrt[n]{1}.$$

Így, a rendőr-elv alapján

$$\sqrt[n]{1 - 3n/2^n} \rightarrow 1.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{1 + 1/n^2 - 2/n^3} \rightarrow 1.$$

Tehát

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2 \cdot \sqrt[n]{1 - 3n/2^n}}{(\sqrt[n]{n})^3 \cdot \sqrt[n]{1 + 1/n^2 - 2/n^3}} \rightarrow \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 2 = \varrho > 1,$$

ami miatt a sor divergens.

MEGJEGYZÉS. A hányados kritérium használatával is a $\varrho = 2$ értéket kapjuk, ugyanis:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{2^{n+1} - 3(n+1)}{(n+1)^3 + (n+1) - 2} \cdot \frac{n^3 + n - 2}{2^n - 3n} = \frac{2^{n+1} - 3n - 3}{2^n - 3n} \cdot \frac{n^3 + n - 2}{(n+1)^3 + n - 1} \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{1 - 3n/2^{n+1} - 3/2^{n+1}}{1 - 3n/2^n} \cdot \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{1 + 1/n^2 - 2/n^3}{(1 + 1/n)^3 + 1/n^2 - 1/n^3} \\ &= 2 \cdot \frac{1 - 3n/2^{n+1} - 3/2^{n+1}}{1 - 3n/2^n} \cdot 1 \cdot \frac{1 + 1/n^2 - 2/n^3}{(1 + 1/n)^3 + 1/n^2 - 1/n^3} \\ &\rightarrow 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$



MEGJEGYZÉS. Faktoriális tartalmazó feladatoknál egyszerűbb a hányados kritériumot használni, különben tetszés szerint használhatjuk mind a hányados, mind a gyökkritériumot. Ugyanakkor ezek a tesztek több esetben nem tudnak dönteni ($\varrho = 1$ miatt), mint például a következő feladatok esetében sem.



Integrál teszt

Amennyiben $f(x)$ pozitív és monoton csökkenő a $[k, \infty)$ intervallumon, akkor $a_n = f(n)$ esetén

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \sim \int_k^{\infty} f(x) dx,$$

azaz a $\sum a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha az adott improprius integrál konvergens.

Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját.

3. Feladat. $\sum \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

Megoldás. Ha $x > 1$, akkor x , $\ln x$, $\sqrt{\ln x}$ pozitív és monoton növekvő függvények, így $x\sqrt{\ln x}$ is monoton növekvő, ahonnan $\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ monoton csökkenő. Ezért alkalmazhatjuk az integrál tesztet:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \sim \int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx.$$

Az

$$y = \ln x, \quad dy = \frac{1}{x} dx$$

helyettesítéssel

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \int y^{-1/2} dy = \frac{y^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{y} + C = 2\sqrt{\ln x} + C.$$

Így az improprius integrál

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[2\sqrt{\ln x} \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (2\sqrt{\ln t} - 2\sqrt{\ln 2}) = \infty,$$

azaz divergens, tehát a sor is divergens.

4. Feladat. $\sum \frac{\ln 3n}{n^3}$

Megoldás. A sor pozitív tagú és $f(x) = \frac{\ln 3x}{x^3}$ deriváltja

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln 3x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2 \ln 3x}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln 3x}{x^4},$$

ami negatív, ha $x > \sqrt[3]{e}/3$, azaz ekkor $f(x)$ monoton csökkenő. Ezért $\sqrt[3]{e}/3 < 1$ miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 3n}{n^3} \sim \int_1^{\infty} \frac{\ln 3x}{x^3} dx.$$

Parciális integrálással,

$$s = \ln 3x, \quad t' = x^{-3}, \quad s' = x^{-1}, \quad t = -x^{-2}/2$$

alapján

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln 3x}{x^3} dx &= \int \underbrace{\ln 3x \cdot x^{-3}}_{s \cdot t'} dx = \underbrace{\ln 3x \cdot (-x^{-2}/2)}_{s \cdot t} - \int \underbrace{x^{-1} \cdot (-x^{-2}/2)}_{s' \cdot t} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\ln 3x}{x^2} + \frac{1}{2} \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2} \frac{\ln 3x}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + C. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\ln 3x}{x^3} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln 3x}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{\ln 3x}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} \frac{\ln 3t}{t^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ahol a $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln 3t}{t^2} = 0$ értéket a L'Hospital szabály

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[\ln 3t]'}{[t^2]'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t^2} = 0$$

alkalmazásával kapjuk meg.

Tehát az improprius integrál konvergens, ezért a sor is konvergens.

Alternáló sor

Legyen $a_n > 0$, ekkor a $\sum (-1)^n a_n$ vagy $\sum (-1)^{n+1} a_n$ alakú sort alternáló (váltakozó előjelű) sornak nevezzük. Azt mondjuk, hogy az alternáló sor

- abszolút konvergens, amennyiben a $\sum |(-1)^n a_n| = \sum a_n$ sor konvergens;
- feltételesen konvergens, amennyiben konvergens, de nem abszolút konvergens.

Az alternáló sor feltételes konvergenciáját a Leibniz-kritérium segítségével igazoljuk:

ha $a_n \rightarrow 0$ és a_n monoton csökkenő, akkor az alternáló sor konvergens.

Határozzuk meg, hogy a sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

5. Feladat. $\sum (-1)^n \frac{3-n}{\sqrt{2n^5-4n^3}}$

Megoldás. A sor alternáló, mert

$$\sum (-1)^n \frac{3-n}{\sqrt{2n^5-4n^3}} = \sum (-1)^{n+1} \frac{n-3}{\sqrt{2n^5-4n^3}}$$

és $\frac{n-3}{\sqrt{2n^5-4n^3}}$ pozitív amennyiben $n > 3$.

Az abszolút konvergencia vizsgálatával kezdünk, a

$$\sum \frac{n-3}{\sqrt{2n^5-4n^3}}$$

pozitív tagú számsort nézzük. Ez nem tartalmaz faktoriális, exponenciális kifejezést, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{\sqrt{2n^5-4n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^5}} \cdot \frac{1-3/n}{\sqrt{2-4/n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1-3/n}{\sqrt{2-4/n^2}} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

alapján, $L = 1/\sqrt{2} > 0$ miatt a (3) összehasonlító tesztet alkalmazhatjuk. Azaz

$$\sum \frac{n-3}{\sqrt{2n^5-4n^3}} \sim \sum \frac{1}{n^{3/2}},$$

ami $p = 3/2 > 1$ miatt konvergens, tehát az alternáló sor abszolút konvergens.

6. Feladat. $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{4n+1}}{n}$

Megoldás. A sor alternáló. A

$$\sum \frac{\sqrt{4n+1}}{n}$$

sor pozitív tagú,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\sqrt{4+1/n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \frac{\sqrt{4+1/n}}{1} = 0 \cdot 2 = 0,$$

és így $L = 2 > 0$ miatt a (3) összehasonlító teszt szerint

$$\sum \frac{\sqrt{4n+1}}{n} \sim \sum \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Az utóbbi $p = \frac{1}{2} \not> 1$ miatt divergens, tehát az alternáló sor nem abszolút konvergens.

A feltételes konvergencia vizsgálatához a Leibniz-kritériumot használjuk. Már megmutattuk, hogy $a_n \rightarrow 0$. Az $f(x) = \frac{\sqrt{4x+1}}{x}$ függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(4x+1)^{-1/2} \cdot 4 \cdot x - \sqrt{4x+1}}{x^2} = \frac{-2x-1}{x^2\sqrt{4x+1}}$$

negatív, ha $x \geq 1$, amiből azt kapjuk, hogy $f(x)$ monoton csökkenő, és így a_n is monoton csökkenő. Azaz a Leibniz-kritérium feltételei teljesülnek, ezért az alternáló sor feltételesen konvergens.

Számsorok becslése

(1) Amennyiben a $\sum (-1)^n a_n$ ($a_n > 0$) alternáló sor konvergens, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n,$$

ahol a hiba kisebb mint a_k .

(2) Amennyiben a $\sum a_n$ pozitív tagú sor konvergenciája igazolható az integrálkritérium segítségével ($a_n = f(n)$), akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^{\infty} f(x)dx,$$

ahol a hiba kisebb mint $\frac{1}{2}a_k$.

Tudva, hogy az adott sorok konvergenssek, 10^{-2} pontossággal becsüljük meg az összegüket.

7. Feladat. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+2}{n^2-1}$

Megoldás. A sor váltakozó előjelű. Ha a hiba kisebb mint a_k , akkor a fenti (1) becslés érvényes. Ezért $a_k < 10^{-2}$ esetén a megfelelő pontosság már biztosan garantált. Tehát az utóbbi egyenlőtlenséget kell k -ra megoldani:

$$\begin{aligned} a_k &< 10^{-2} \\ \frac{5k+2}{k^2-1} &< \frac{1}{100} \\ 500k+200 &< k^2-1 \\ 201 &< k(k-500). \end{aligned}$$

Ez utóbbi jól láthatóan teljesül, ha $k \geq 501$, amiből

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+2}{n^2-1} \approx \sum_{n=2}^{500} (-1)^n \frac{5n+2}{n^2-1}.$$

8. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2+3n-2}$

Megoldás. Az általános tag pozitív és monoton csökkenő, azaz az integrál teszt következményeként megbecsülhetjük a sor összegét:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_k &< 10^{-2} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2k^2+3k-2} &< \frac{1}{100} \\ 2k^2+3k-2 &> 150 \\ k(2k+3) &> 152 \end{aligned}$$

amely $k \geq 9$ esetén nyilván teljesül, és így legalább 10^{-2} pontossággal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2 + 3n - 2} \approx \sum_{n=1}^8 \frac{3}{2n^2 + 3n - 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 - 2} + \int_9^{\infty} \frac{3}{2x^2 + 3x - 2} dx.$$

Elemi racionális törtekre bontással nyerjük, hogy

$$\frac{3}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{3}{(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 2}, \quad \text{ahonnan}$$

$$3 = A(x + 2) + B(2x - 1).$$

$$\begin{array}{llll} \text{Ha } x = 1/2, & \text{akkor} & 3 = A \cdot (5/2), & \text{azaz } A = 6/5, \\ \text{ha } x = -2, & \text{akkor} & 3 = B \cdot (-5), & \text{azaz } B = -3/5. \end{array}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{2x^2 + 3x - 2} dx &= \int \left(\frac{6/5}{2x - 1} - \frac{3/5}{x + 2} \right) dx = \frac{6}{5} \cdot \frac{\ln |2x - 1|}{2} - \frac{3}{5} \ln |x + 2| + C \\ &= \frac{3}{5} \ln \left| \frac{2x - 1}{x + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \int_9^{\infty} \frac{3}{2x^2 + 3x - 2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_9^t \frac{3}{2x^2 + 3x - 2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{5} \ln \left| \frac{2x - 1}{x + 2} \right| \right]_9^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} \ln \left| \frac{2t - 1}{t + 2} \right| - \frac{3}{5} \ln \frac{17}{11} \right) = \frac{3}{5} \ln 2 - \frac{3}{5} \ln \frac{17}{11}, \end{aligned}$$

vagyis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2 + 3n - 2} \approx \sum_{n=1}^8 \frac{3}{2n^2 + 3n - 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 - 2} + \frac{3}{5} \ln 2 - \frac{3}{5} \ln \frac{17}{11}.$$

Videók

Gyök, hányados teszt

Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját.

1. Feladat. $\sum \frac{3^n \cdot 2n}{5^n \cdot n^2}$

Megoldás. Konvergens.



2. Feladat. $\sum \frac{3^n + 2n}{5^n - n^2}$

Megoldás. Konvergens.



3. Feladat. $\sum \frac{2^{n+1}}{2n+1}$

Megoldás. Divergens.



4. Feladat. $\sum \frac{n^2 + 1}{n3^n}$

Megoldás. Konvergens.



5. Feladat. $\sum \frac{3n+1}{2n-1}$

Megoldás. Divergens.



6. Feladat. $\sum \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+4}$

Megoldás. Konvergens.



7. Feladat. $\sum \frac{2n-1}{2^n+1} \left(2 \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 3 \right)^{2n}$

Megoldás. Divergens.



8. Feladat. $\sum \frac{-2n-1}{2^n+1}$

Megoldás. Konvergens.



9. Feladat. $\sum \frac{2n2^n}{n!}$

Megoldás. Konvergens.



10. Feladat. $\sum \frac{2n + 2^n}{n!}$

Megoldás. Konvergens.



11. Feladat. $\sum \frac{3^n(n+1)!}{(2n-3)!}$

Megoldás. Konvergens.



12. Feladat. $\sum \frac{(2n+1)!}{n + (2n)!}$

Megoldás. Divergens.



Integrál teszt

Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját.

13. Feladat. a) $\sum \frac{1}{n^3}$, b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

Megoldás. a) konvergens, b) divergens.



14. Feladat. $\sum \frac{1}{n \ln 2n}$

Megoldás. Divergens.



15. Feladat. $\sum \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$

Megoldás. Konvergens.



16. Feladat. $\sum \frac{\ln n}{n^2}$

Megoldás. Konvergens.



17. Feladat. $\sum \frac{e^{1/n}}{n^2}$

Megoldás. Konvergens.



18. Feladat. $\sum \frac{1}{n^2 - 2n}$

Megoldás. Konvergens.



Alternáló sor

Határozzuk meg, hogy a sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

19. Feladat. $\sum \frac{\cos n}{n^2}$

Megoldás. Abszolút konvergens.



20. Feladat. $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos 9^n$

Megoldás. Abszolút konvergens.



21. Feladat. $\sum \frac{n \cos(n\pi/4)}{n+3}$

Megoldás. Divergens.



22. Feladat. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + n}$

Megoldás. Abszolút konvergens.



23. Feladat. $\sum (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n+1}$

Megoldás. Divergens.



24. Feladat. $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n+2}}{2n+3}$

Megoldás. Feltételesen konvergens.



25. Feladat. $\sum (-1)^n \frac{3-2n}{n^2+5}$

Megoldás. Feltételesen konvergens.



26. Feladat. $\sum (-1)^n \frac{n+2^n}{n^2-3^n}$

Megoldás. Abszolút konvergens.



27. Feladat. a) $\sum \frac{(-1)^{2n+1}}{n \ln 3n}$, b) $\sum \frac{1}{(-1)^{n+1} n \ln 3n}$

Megoldás. a) Divergens, b) feltételesen konvergens.



28. Feladat. $\sum \frac{n5^n}{n^2-3}(-2-3)^{1-n}$

Megoldás. Feltételesen konvergens.



29. Feladat. $\sum \frac{n+3}{n^2 2^n} \left(2 \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \right) - 3 \right)^{3n+1}$

Megoldás. Feltételesen konvergens.



Számsorok becslése

Ellenőrizve, hogy az adott sorok konvergensek, 10^{-2} pontossággal becsüljük meg az összegeket.

30. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Megoldás. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx \sum_{n=1}^{101} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$



31. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n-3}}{2-n^2}$

Megoldás.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n-3}}{2-n^2} \approx \sum_{n=1}^{101} (-1)^n \frac{\sqrt{n-3}}{n^2-2}$$



32. Feladat.
$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{n-3}{2-n^2}$$

Megoldás. Divergens.



33. Feladat.
$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{-3}{4-n^2}$$

Megoldás.
$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{-3}{4-n^2} \approx - \left(\sum_{n=3}^{12} \frac{3}{n^2-4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{165} + \frac{3}{4} \ln \frac{15}{11} \right)$$



34. Feladat.
$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{-3}{4+n^2}$$

Megoldás.
$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{-3}{4+n^2} \approx \sum_{n=3}^{12} \frac{3}{4+n^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{173} + \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{13}{2}$$



35. Feladat.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2-n-3}$$

Megoldás.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2-n-3} \approx \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2n^2-n-3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{63} + \frac{1}{5} \ln \frac{14}{9}$$



36. Feladat.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Megoldás.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \approx \sum_{n=2}^{50} \frac{1}{n \ln^2 n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{51 \cdot (\ln 51)^2} + \frac{1}{\ln 51}$$



Kvízek

A csoport

- 1. Feladat.** A tanult módon vizsgáljuk a $\sum \frac{n^2}{3^n - n^3}$ sor konvergenciáját.
- 2. Feladat.** Becsüljük meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 5n - 3}$ sor összegét 10^{-2} pontossággal.

B csoport

A tanult módon vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját.

- 1. Feladat.** $\sum (-1)^n \frac{2-n}{n^2+3}$
- 2. Feladat.** $\sum \frac{2^n+3}{(2n+3)!}$

C csoport

- 1. Feladat.** Becsüljük meg a $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{5n^2+3}$ sor összegét 10^{-2} pontossággal.
- 2. Feladat.** A tanult módon vizsgáljuk a $\sum \frac{\ln \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$ sor konvergenciáját.

Kvizek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása. A sor $n > 3$ esetén pozitív tagú. Alkalmazzuk a gyök tesztet.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n - n^3}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{3^n - n^3}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3 \cdot \sqrt[n]{1 - n^3/3^n}}$$

Ha n elég nagy, akkor $1/2 < 1 - n^3/3^n < 1$ és ezért ekkor $\sqrt[n]{1/2} < \sqrt[n]{1 - n^3/3^n} < \sqrt[n]{1}$. Így a rendőr-elv alapján $\sqrt[n]{1 - n^3/3^n} \rightarrow 1$. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3 \cdot \sqrt[n]{1 - n^3/3^n}} \rightarrow \frac{1}{3} = \varrho.$$

A $\varrho < 1$ összefüggés miatt a sor konvergens.

2. Feladat megoldása. Az általános tag pozitív és monoton csökkenő, azaz az integrál teszt következményeként megbecsülhetjük a sort:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n^2 + 5n - 3} &\leq \frac{1}{50} \\ 50 &\leq 2n^2 + 5n - 3 \\ 0 &\leq 2n^2 + 5n - 53 = n(2n + 5) - 53. \end{aligned}$$

Ez utóbbi teljesül, ha $n \geq 5$, $a_5 = \frac{1}{72}$. Továbbá

$$\frac{1}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 3} = \frac{A(x + 3) + B(2x - 1)}{(x + 3)(2x - 1)},$$

azaz $1 = A(x + 3) + B(2x - 1)$ alapján, $x = -3$ és $x = 1/2$ helyettesítésével kapjuk hogy $B = -1/7$, $A = 2/7$. Ezért

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x^2 + 5x - 3} dx &= \int \left(\frac{2/7}{2x - 1} - \frac{1/7}{x + 3} \right) dx \\ &= \frac{1}{7} \ln |2x - 1| - \frac{1}{7} \ln |x + 3| + C = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{2x - 1}{x + 3} \right| + C. \end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned} \int_5^\infty \frac{1}{2x^2 + 5x - 3} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_5^t \frac{1}{2x^2 + 5x - 3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{7} \ln \left| \frac{2x - 1}{x + 3} \right| \right]_5^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7} \ln \left| \frac{2t - 1}{t + 3} \right| - \frac{1}{7} \ln \left| \frac{9}{8} \right| \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{7} \left(\ln \left| \frac{2 - 1/t}{1 + 3/t} \right| - \ln \left| \frac{9}{8} \right| \right) \\ &= \frac{1}{7} \left(\ln 2 - \ln \frac{9}{8} \right) = \frac{1}{7} \ln \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

Tehát $\frac{a_5}{2} = \frac{1}{144}$ ismeretében

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 5n - 3} \approx \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2n^2 + 5n - 3} + \frac{1}{144} + \frac{1}{7} \ln \frac{16}{9}.$$

B csoport

1. Feladat megoldása. A sor alternáló,

$$\sum (-1)^n \frac{2-n}{n^2+3} = \sum (-1)^{n+1} \frac{n-2}{n^2+3}.$$

Vizsgáljuk az abszolút konvergenciáját:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{1-2/n}{1+3/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1-2/n}{1+3/n^2} = "0 \cdot 1" = 0.$$

Mivel $L = 1$, ezért

$$\sum \frac{n-2}{n^2+3} \sim \sum \frac{1}{n},$$

ami $p = 1 \not> 1$ miatt divergens, tehát az alternáló sor nem abszolút konvergens. 1 pt

Már megmutattuk, hogy az általános tag, $\frac{n-2}{n^2+3}$ határértéke 0. Az $f(x) = \frac{x-2}{x^2+3}$ függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{x^2+3 - (x-2) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+4x+3}{(x^2+3)^2} = -\frac{x(x-4)-3}{(x^2+3)^2},$$

ami negatív, ha $x \geq 5$, így az általános tag monoton csökkenő $n \geq 5$ esetén. Tehát a Leibniz-tétel feltételei teljesülnek, azaz az alternáló sor konvergens. Ezért az alternáló sor feltételesen konvergens. 2 pt

2. Feladat megoldása. A sor pozitív tagú és faktoriálist tartalmaz, így a hányados teszt alapján

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{2^{n+1}+3}{(2n+5)!} \cdot \frac{(2n+3)!}{2^n+3} = \frac{2^{n+1}+3}{2^n+3} \cdot \frac{(2n+3)!}{(2n+5)!} \\ &= \frac{2^{n+1}+3}{2^n+3} \cdot \frac{1}{(2n+4)(2n+5)} \\ &= \frac{2^n}{2^n} \cdot \frac{2+3/2^n}{1+3/2^n} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(2+4/n)(2+5/n)} \\ &\rightarrow 1 \cdot \frac{2}{1} \cdot 0 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} = 0 = \varrho \end{aligned}$$

ha $n \rightarrow \infty$. Tehát, $\varrho < 1$ miatt a sor konvergens. 3 pt

C csoport

1. Feladat megoldása. Ez egy alternáló sor.

$$\begin{aligned}\frac{2n}{5n^2+3} &\leq \frac{1}{100} \\ 200n &\leq 5n^2+3 \\ 0 &\leq 5n^2-200n+3 \\ 0 &\leq 5n(n-40)+3\end{aligned}$$

teljesül, ha $n \geq 40$. Így

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{5n^2+3} \approx \sum_{n=2}^{39} (-1)^n \frac{2n}{5n^2+3}.$$

1 pt

2. Feladat megoldása. A sor pozitív tagú. A $g(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x^{2/3}}$ deriváltja

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x^{2/3} - \ln x \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3}}{x^{4/3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{2}{3} \ln x}{x^{5/3}}.$$

Az $1 - \frac{2}{3} \ln x = 0$ egyenletből $\ln x = \frac{3}{2}$, $x = e^{3/2}$ adódik. Továbbá $\ln x$ monoton növekvő, ezért $g'(x)$ negatív, ha $x > e^{3/2}$, azaz ekkor $g(x)$ monoton csökkenő. Alkalmazhatjuk az integrál tesztet.

2 pt

Parciális integrálással, $f = \ln x$, $g' = x^{-2/3}$, $f' = x^{-1}$, $g = 3x^{1/3}$ alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^{2/3}} dx &= \int \underbrace{\ln x \cdot x^{-2/3}}_{f \cdot g'} dx = \underbrace{\ln x \cdot 3x^{1/3}}_{f \cdot g} - \int \underbrace{x^{-1} \cdot 3x^{1/3}}_{f' \cdot g} dx \\ &= 3x^{1/3} \ln x - \int 3x^{-2/3} dx \\ &= 3x^{1/3} \ln x - 9x^{1/3} + C = 3x^{1/3}(\ln x - 3) + C.\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}\sum \frac{\ln \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}} &\sim \int_2^{\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x^{2/3}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{2} x^{1/3} (\ln x - 3) \right]_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{2} (t^{1/3} (\ln t - 3) - 2^{1/3} (\ln 2 - 3)) = \infty,\end{aligned}$$

miatt az improprius integrál divergens, tehát a sor is divergens.

3 pt

7.

Függvénysor konvergenciája; Fourier–sor

Házi feladatok

Függvénysor konvergenciája

A $\sum f_n(x)$ függvénysor konvergens az x_0 pontban, amennyiben a $\sum f_n(x_0)$ számsor konvergens. Egy függvénysor konvergenciatartománya a közös értelmezési tartomány azon pontjainak a halmaza, amelyekben a megfelelő számsorok konvergensek.

Az általunk vizsgált függvénysorok általában tartalmaznak faktoriális vagy exponenciális kifejezést, ezért a következő teszteket alkalmazzuk:

Gyök teszt: Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \varrho$;

Hányados teszt: Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \varrho$,

akkor $\varrho < 1$ esetén a függvénysor abszolút konvergens,

$\varrho > 1$ esetén a függvénysor divergens,

$\varrho = 1$ esetén további vizsgálat (integrál- vagy összehasonlító teszt) szükséges.

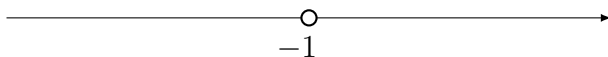
Jelöljük a számegyenesen, hogy a függvénysor mely pontokban abszolút konvergens, feltételesen konvergens, divergens, illetve nincs értelmezve.

1. Feladat. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} (x+1)^{n-3}$

Megoldás. A függvénysor első néhány tagját kiírva

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} (x+1)^{n-3} = \frac{-2}{1} \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + \dots$$

kapjuk, hogy a függvénysor nincs értelmezve az $x = -1$ helyen.



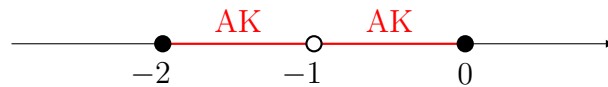
Ha $x \neq -1$, a hányadoskritérium alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| f_{n+1}(x) \cdot \frac{1}{f_n(x)} \right| &= \left| \frac{3n+1}{(n+1)^2+1} (x+1)^{n-2} \cdot \frac{n^2+1}{3n-2} \frac{1}{(x+1)^{n-3}} \right| \\ &= \frac{3n+1}{3n-2} \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \cdot \left| \frac{(x+1)^{n-2}}{(x+1)^{n-3}} \right| \\ &= \frac{n}{n} \cdot \frac{3+1/n}{3-2/n} \cdot \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1+1/n^2}{(1+1/n)^2+1/n^2} \cdot |x+1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x+1|. \end{aligned}$$

Tehát a függvénysor abszolút konvergens ha $x \neq -1$, és

$$\begin{aligned} \varrho &= |x+1| < 1 \\ -1 < x+1 < 1 \\ -2 < x < 0, \end{aligned}$$

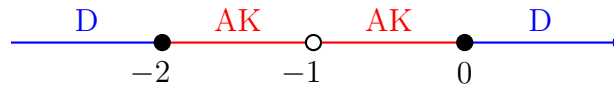
azaz ha $-2 < x < -1$ vagy $-1 < x < 0$.



Divergens amennyiben

$$\varrho = |x+1| > 1,$$

azaz $x < -2$ vagy $x > 0$ esetén.



A végpontokban, ahol

$$\varrho = |x+1| = 1,$$

azaz az $x = -2$ és $x = 0$ pontokban a megfelelő számsorok konvergenciáját vizsgáljuk az összehasonlító- vagy az integrálteszt segítségével. Az

$x = -2$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} (-2+1)^{n-3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} (-1)^{n-3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

$x = 0$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} (0+1)^{n-3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} (1)^{n-3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} \end{aligned}$$

Az első sor a második alternáló változata, ezért a második, a pozitív tagú sor vizsgálatával kezdünk. Az általános tag nem tartalmaz logaritmikus kifejezést, így az összehasonlító teszttel dolgozunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{3-2/n}{1+1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{3-2/n}{1+1/n^2} = 0 \cdot 3 = 0.$$

Ekkor $L = 3 > 0$ alapján

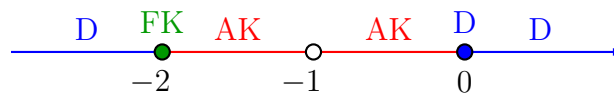
$$\sum \frac{3n-2}{n^2+1} \sim \sum \frac{1}{n},$$

amely $p = 1 \not> 1$ miatt divergens, tehát $x = 0$ -ban a függvénysor divergens.

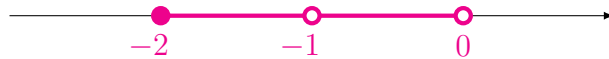
Emiatt az $x = -2$ esetén kapott alternáló sor nem abszolút konvergens. Ugyanakkor a Leibniz-kritérium feltételei teljesülnek. Korábban már megmutattuk, hogy $a_n = \frac{3n-2}{n^2+1}$ határértéke nulla, és a

$$g(x) = \frac{3x-2}{x^2+1} \quad \text{deriváltja} \quad g'(x) = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2} < 0, \quad \text{ha } x \geq 2,$$

miatt a_n monoton csökkenő. Így az alternáló sor konvergens, ezért az $x = -2$ pontban a függvénysor feltételesen konvergens.



Így a függvénysor konvergencia tartománya, amely az összegfüggvény értelmezési tartományát adja, azon pontok halmaza ahol a függvénysor konvergens, tehát esetünkben a



halmaz, azaz

$$[-2, -1) \cup (-1, 0).$$

2. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{n^2+3} (2-3x)^{2-n}$

Megoldás. Az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{n^2+3} (2-3x)^{2-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{n^2+3} \cdot \frac{1}{(2-3x)^{n-2}}$$

összefüggés alapján kapjuk, hogy $x \neq 2/3$. Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|f_n(x)|} &= \sqrt[n]{\left| \frac{5^n \cdot n}{n^2+3} (2-3x)^{2-n} \right|} = \frac{\sqrt[n]{5^n} \cdot \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^2+3}} \sqrt[n]{|2-3x|^{2-n}} \\ &= \frac{5 \cdot \sqrt[n]{n}}{(\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{1+3/n^2}} |2-3x|^{2/n-1} \rightarrow 5 \cdot |2-3x|^{-1} = \frac{5}{|2-3x|}. \end{aligned}$$

Innen

$$\varrho = \frac{5}{|2-3x|} < 1$$

$$|2-3x| > 5$$

miatt

$$\begin{aligned} 2 - 3x &< -5 \\ 7 &< 3x \\ \frac{7}{3} &< x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - 3x &> 5 \\ -3 &> 3x \\ -1 &> x \end{aligned}$$

alapján kapjuk, hogy $x > 7/3$ vagy $x < -1$ esetén a sor abszolút konvergens. A végpontokban az

$x = -1$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{n^2 + 3} \cdot \frac{1}{(2 - 3 \cdot (-1))^{n-2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{n^2 + 3} \cdot \frac{1}{5^{n-2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{n^2 + 3} \cdot \frac{1}{5^n} \cdot \frac{1}{5^{-2}} \\ &= \frac{1}{5^{-2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 3} \end{aligned}$$

$x = 7/3$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{n^2 + 3} \cdot \frac{1}{(2 - 3 \cdot \frac{7}{3})^{n-2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{n^2 + 3} \cdot \frac{1}{(-5)^{n-2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{n^2 + 3} \cdot \frac{1}{(-1)^{n-2}} \cdot \frac{1}{5^{n-2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{n^2 + 3} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{5^n} \cdot \frac{1}{5^{-2}} \\ &= \frac{1}{5^{-2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 3} \end{aligned}$$

számsorok adódnak. A második az első alternáló változata, ezért az első sor vizsgálatával kezdjük. Az általános tagra kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + 3/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + 3/n^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Ekkor $L = 1 > 0$ miatt

$$\sum \frac{n}{n^2 + 3} \sim \sum \frac{1}{n},$$

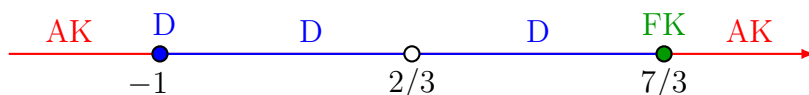
amely $p = 1 \not> 1$ miatt divergens. Ezért a függvénysor az $x = -1$ pontban divergens.

Az előző eredmény alapján $x = 7/3$ -ban a sor nem abszolút konvergens, ugyanakkor a

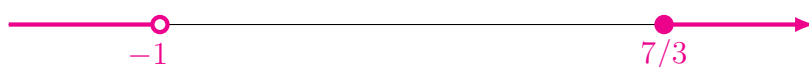
$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 3} \quad \text{deriváltja} \quad g'(x) = \frac{x^2 + 3 - x \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-x^2 + 3}{(x^2 + 3)^2}, \quad \text{ha } x \geq 2.$$

Ez negatív, azaz az általános tag monoton csökkenő. Tehát a Leibniz-kritérium miatt az alternáló sor konvergens. Így $x = 7/3$ -ban a függvénysor feltételesen konvergens.

Ezek alapján



és a konvergencia tartomány, ami az összegfüggvény értelmezési tartománya



azaz a $(-\infty, -1) \cup [7/3, \infty)$ halmaz.

3. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 3} (2x + 3)^{2n-1}$

Megoldás. A függvénytör első néhány tagját kiírva kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 3} (2x + 3)^{2n-1} = \frac{1!}{2 + 3} (2x + 3) + \frac{2!}{4 + 3} (2x + 3)^3 + \frac{3!}{8 + 3} (2x + 3)^5 + \dots$$

Tehát a függvénytör minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve van. A hányadoskritérium szerint

$$\begin{aligned} \left| f_{n+1}(x) \cdot \frac{1}{f_n(x)} \right| &= \left| \frac{(n+1)!}{2^{n+1} + 3} (2x + 3)^{2n+1} \cdot \frac{2^n + 3}{n!} \frac{1}{(2x + 3)^{2n-1}} \right| \\ &= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{2^n + 3}{2^{n+1} + 3} \cdot \left| \frac{(2x + 3)^{2n+1}}{(2x + 3)^{2n-1}} \right| \\ &= (n+1) \cdot \frac{2^n}{2^n} \cdot \frac{1 + 3/2^n}{2 + 3/2^n} \cdot |2x + 3|^2. \end{aligned}$$

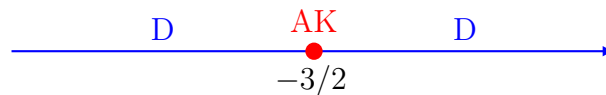
Mivel

$$|2x + 3|^2 = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = -3/2, \\ > 0, & \text{ha } x \neq -3/2, \end{cases}$$

ezért

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = (n+1) \cdot \frac{1 + 3/2^n}{2 + 3/2^n} \cdot |2x + 3|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varrho = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = -3/2, \\ \infty, & \text{ha } x \neq -3/2. \end{cases}$$

Így a függvénytör az $x = -3/2$ pontban abszolút konvergens, az összes többi pontban divergens,



azaz az összegfüggvény csak egyetlen egy pontban definiált, és itt a 0 értéket veszi fel.

Fourier-sor

A 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény Fourier-sora az

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

függvénytör, ahol

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Csak a Fourier-sorok előállításával foglalkozunk, a konvergenciáját nem vizsgáljuk.

4. Feladat. A fenti definíciók alapján határozzuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi \leq x < -\pi/2, \\ 1, & \text{ha } -\pi/2 \leq x < \pi. \end{cases}$$

függvény Fourier-sorának első hat tagját.

Megoldás. A

$$2\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi} 1 dx = [x]_{-\pi/2}^{\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

képlet alapján $a_0 = \frac{3}{4}$. Az a_n együtthatókra vonatkozó képletet használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \int_{-\pi/2}^{\pi} \cos nx dx = \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{-\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n} (\sin n\pi - \sin n(-\pi/2)) = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$a_1 = \frac{1}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3\pi}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{5\pi}.$$

Továbbá a b_n együtthatókra kapjuk, hogy

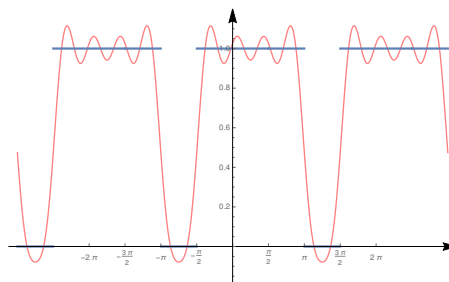
$$\begin{aligned} \pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \int_{-\pi/2}^{\pi} \sin nx dx = \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_{-\pi/2}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n} (\cos n\pi - \cos n(-\pi/2)) = \frac{1}{n} (\cos(n\pi/2) - \cos n\pi), \end{aligned}$$

amiből

$$b_1 = \frac{1}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad b_3 = \frac{1}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{1}{5\pi}.$$

Az együtthatókat felhasználva kapjuk a Fourier-sor első öt tagját:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_5(x) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \cos x - \frac{1}{3\pi} \cos 3x + \frac{1}{5\pi} \cos 5x \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sin x - \frac{1}{\pi} \sin 2x + \frac{1}{3\pi} \sin 3x + \frac{1}{5\pi} \sin 5x. \end{aligned}$$



Az $f(x)$ függvény 5-ödrendű Fourier-közelítése.

5. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi \leq x < 0, \\ x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

függvény Fourier-egytthatói közül a_{10} -et, a_{19} -et és b_{22} -t.

Megoldás. Ekkor

$$\pi a_n = \int_0^\pi x \cos nx \, dx$$

miatt parciális integrálással, $s = x$, $t' = \cos nx$, $s' = 1$, $t = \sin(nx)/n$ alapján kapjuk, hogy

$$\int \underbrace{x \cos nx}_{st'} \, dx = \underbrace{x \frac{\sin nx}{n}}_{st} - \int \underbrace{\frac{\sin nx}{n}}_{s't} \, dx = \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx + C,$$

ahonnan

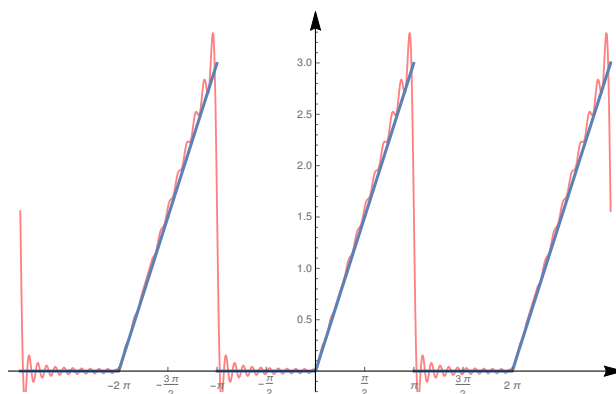
$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{n^2} (\cos n\pi - 1). \end{aligned}$$

$$\text{Így } a_{10} = 0, \quad a_{19} = -\frac{2}{19^2\pi}.$$

Hasonlóan, parciális integrálással, $s = x$, $t' = \sin nx$, $s' = 1$, $t = -\cos(nx)/n$ szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \pi b_n &= \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^\pi \\ &= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi, \end{aligned}$$

$$\text{amiből } b_{22} = -\frac{1}{22}.$$



Az $f(x)$ függvény 22-edrendű Fourier-közelítése.

Videók

Függvénysorok konvergenciája

Jelöljük a számegyenesen, hogy a függvénysor mely pontokban abszolút konvergens, feltételesen konvergens, divergens, illetve nincs értelmezve.

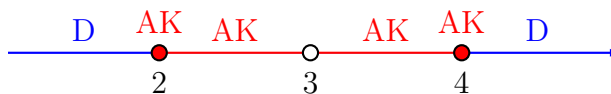
1. Feladat. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-3} (2x-3)^{n+3}$

Megoldás.



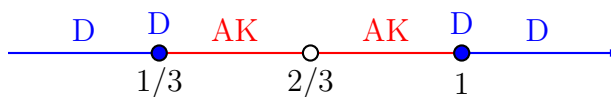
2. Feladat. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+4} (x-3)^{2n-1}$

Megoldás.



3. Feladat. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{3n+2} (2-3x)^{2n-4}$

Megoldás.



4. Feladat. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x-1)^{3-n}}{n \ln^2 n}$

Megoldás.



5. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2 \cdot 2^n} (2x-3)^{3n+1}$

Megoldás.



6. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n^2 + 1} (5 - 2x)^{2n-1}$

Megoldás.



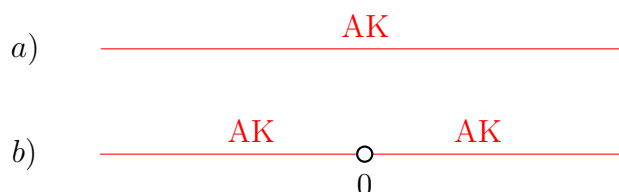
7. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{3^n + n} (x + 2)^n$

Megoldás.



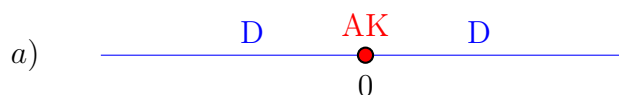
8. Feladat. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-n}}{n!}$

Megoldás.



9. Feladat. a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^{-n}$

Megoldás.



b) $\xrightarrow{\text{D}}$

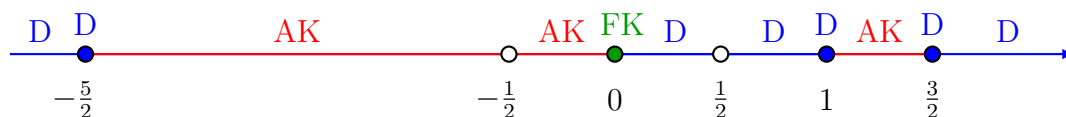
10. Feladat. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n \cdot n!}{(n+3)!} (x+2)^{n+1}$

Megoldás.



11. Feladat. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n \cdot 2^n} (x - \frac{1}{2})^{n-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(n+1) \cdot 4^n} \left(x + \frac{1}{2}\right)^{2n-1}$

Megoldás.



Határozzuk meg az összegfüggvény értelmezési tartományát.

12. Feladat. $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x-2)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Megoldás. $D_F = (-1, 1)$



13. Feladat. $G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \cdot \left(z + \frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+1)^{n+1}}$

Megoldás. $D_G = (-3, -1) \cup (0, 2)$



Fourier-sor

14. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

függvény Fourier-sorát.

Megoldás. $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)\pi} \cdot \sin(2n-1)x$



15. Feladat. Adjuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq -\pi/3, \\ 0, & -\pi/3 < x \leq \pi/2, \\ 2, & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

függvény Fourier-sorának a_9 és b_{10} együtthatóit.

Megoldás. $a_9 = -\frac{2}{9\pi}, \quad b_{10} = -\frac{1}{4\pi}$



16. Feladat. Adjuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ e^{-x}, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

függvény Fourier-sorának együtthatóit.

Megoldás.



$$a_0 = \frac{1 - e^{-\pi}}{2\pi}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}e^{-\pi} + 1}{n^2 + 1}, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}ne^{-\pi} + n}{n^2 + 1}$$

17. Feladat. Határozzuk meg a 2π szerint periodikus

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x \leq \pi$$

függvény Fourier-sorát.

Megoldás. $\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$



Kvízek

A csoport

Feladat. Hol konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-2} (2x-3)^{3-n}$ függvénysor?

B csoport

Feladat. Ábrázoljuk az

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x+1)^{n+1}}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(5x+3)^n}$$

függvény értelmezési tartományát.

C csoport

Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi/2, \\ \pi/2 - x, & \text{ha } \pi/2 \leq x < \pi. \end{cases}$$

függvény Fourier-sorának első hat a_n együtthatóját.

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-2} (2x-3)^{3-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-2} \cdot \frac{1}{(2x-3)^{n-3}}$$

átalakítás alapján kapjuk, hogy $x \neq 3/2$. Hányadoskritériumot alkalmazunk:

$$\begin{aligned} \left| f_{n+1}(x) \cdot \frac{1}{f_n(x)} \right| &= \left| \frac{n+4}{(n+1)^2-2} (2x-3)^{2-n} \cdot \frac{n^2-2}{n+3} (2x-3)^{n-3} \right| \\ &= \left| \frac{n+4}{n+3} \cdot \frac{n^2-2}{(n+1)^2-2} \cdot (2x-3)^{2-n} \cdot (2x-3)^{n-3} \right| \\ &= \left| \frac{1+4/n}{1+3/n} \cdot \frac{1-2/n^2}{(1+1/n)^2-2/n^2} \cdot (2x-3)^{-1} \right| \rightarrow |(2x-3)^{-1}|. \end{aligned}$$

1 pt

Innen

$$\varrho = \left| \frac{1}{2x-3} \right| < 1$$

$$|2x-3| > 1$$

miatt $2x-3 > 1$ vagy $2x-3 < -1$ alapján kapjuk, hogy $x > 2$ vagy $x < 1$ esetén a sor abszolút konvergens. A végpontokban az

$$\begin{aligned} x=1 \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-2} (2-3)^{3-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-2} (-1)^{3-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-2} (-1)^{n-1} \\ x=2 \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-2} (4-3)^{3-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-2} (1)^{3-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2-2} \end{aligned}$$

számsorok adódnak. Az első a második alternáló változata. Az általános tagra kapjuk, hogy

2 pt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \cdot \frac{1+3/n}{1-2/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+3/n}{1-2/n^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Ekkor $L=1$ miatt $\sum \frac{n+3}{n^2-2} \sim \sum \frac{1}{n}$, amely $p=1 \not> 1$ miatt divergens. Tehát $x=2$ -ben a függvénysor nem konvergens, $x=1$ -ben nem abszolút konvergens. De

$$g(x) = \frac{x+3}{x^2-2} \quad \text{deriváltja} \quad g'(x) = \frac{x^2-2-(x+3) \cdot 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2-6x-2}{(x^2-2)^2},$$

ami $x > 0$ esetén negatív, azaz az általános tag monoton csökkenő. Így a Leibniz-kritérium alapján az alternáló sor konvergens. Tehát $x=1$ -ben a függvénysor feltételesen konvergens.

3 pt

*B csoport***Feladat megoldása. A**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x+1)^{n+1}}{3^n} = (2x+1) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2x+1}{3} \right)^n$$

geometriai sor pontosan akkor konvergens, ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x+1}{3} \right| &< 1 \\ -1 &< \frac{2x+1}{3} < 1 \\ -3 &< 2x+1 < 3 \\ -2 &< x < 1. \end{aligned}$$

1 pt

Hasonlóan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(5x+3)^n} = 3 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5x+3} \right)^n$$

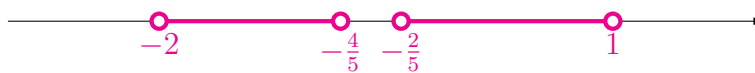
akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{5x+3} \right| &< 1 \\ |5x+3| &> 1, \end{aligned}$$

2 pt

azaz

$$\begin{aligned} 5x+3 &< -1 \quad \text{vagy} \quad 5x+3 > 1, \\ x &< -\frac{4}{5} \quad \text{vagy} \quad x > -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Így a sor konvergenciaterület a $(-2, -4/5) \cup (-2/5, 1)$ halmaz, azaz

3 pt

C csoport

Feladat megoldása. Mivel

$$2\pi a_0 = \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi/2 - x) dx = \left[\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \left(\left(\frac{\pi}{2}\pi - \frac{\pi^2}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2}\pi/2 - \frac{(\pi/2)^2}{2} \right) \right) = -\frac{\pi^2}{8},$$

így $a_0 = -\pi/16$. Továbbá

$$\pi a_n = \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi/2 - x) \cos nx dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \cos nx - x \cos nx \right) dx.$$

Parciális integrálással, $u = x$, $v' = \cos nx$, $u' = 1$, $v = (\sin nx)/n$ szerint kapjuk, hogy

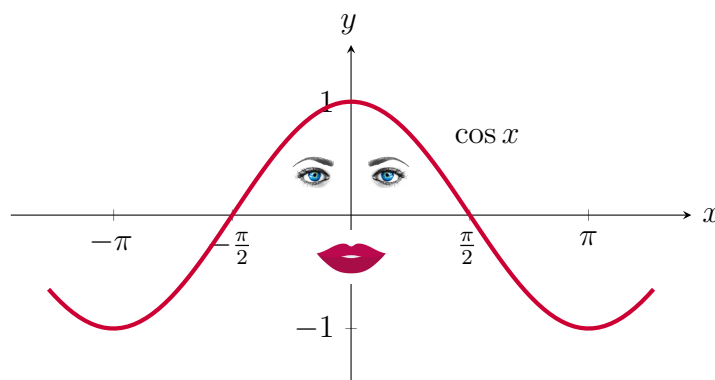
$$\int \underbrace{x \cdot \cos nx}_{u \cdot v'} dx = x \cdot \underbrace{\frac{\sin nx}{n}}_{u \cdot v} - \int \underbrace{1 \cdot \frac{\sin nx}{n}}_{u' \cdot v} dx = x \frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C.$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \cos nx - x \cos nx \right) dx = \left[\frac{\pi}{2} \frac{\sin nx}{n} - x \frac{\sin nx}{n} - \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{\pi \sin n\pi}{2n} - \frac{\pi \sin n\pi}{n} - \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\pi \sin(n\pi/2)}{2n} + \frac{\pi \sin(n\pi/2)}{2n} + \frac{\cos(n\pi/2)}{n^2} \\ &= \frac{\cos(n\pi/2) - \cos n\pi}{n^2} \end{aligned}$$

szerint

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\pi/2) - \cos \pi}{1^2} = \frac{1}{\pi}, \\ a_2 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(2\pi/2) - \cos 2\pi}{2^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos \pi - \cos 0}{2^2} = -\frac{1}{2\pi}, \\ a_3 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(3\pi/2) - \cos 3\pi}{3^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(-\pi/2) - \cos \pi}{3^2} = \frac{1}{9\pi}, \\ a_4 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(4\pi/2) - \cos 4\pi}{4^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos 0 - \cos 0}{4^2} = 0, \\ a_5 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(5\pi/2) - \cos 5\pi}{5^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\pi/2) - \cos \pi}{5^2} = \frac{1}{25\pi}. \end{aligned}$$



8.

Taylor–sor; binomiális sor

Házi feladatok

Taylor–sor, alkalmazás

Néhány nevezetes függvény $a = 0$ pont körüli Taylor–sora:

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

A megfelelő sorfejtés első 4 tagjával becsüljük meg az alábbi kifejezések értékét.

1. Feladat. $\int_0^1 \operatorname{sh} x^3 \, dx$

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$\operatorname{sh} y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Az $y = x^3$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\operatorname{sh} x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ahonnan

$$\int_0^1 \operatorname{sh} x^3 dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!} \right) dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A hatványsor a konvergenciatartományán belül tagonként integrálható, azaz az összegzés és az integrálás sorrendje megcserélhető, ezért

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{sh} x^3 dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{6n+3} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left[\frac{x^{6n+4}}{6n+4} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{6n+4}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

tehát

$$\int_0^1 \operatorname{sh} x^3 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{6n+4} \approx \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{22}.$$

2. Feladat. $\int_{1/2}^1 \frac{\cos 4x}{x^5} dx$

Megoldás. A

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

összefüggés alapján

$$\cos 4x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

és így

$$\frac{\cos 4x}{x^5} = \frac{1}{x^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{2n-5}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Mivel az $x = 0$ pont az integrálási tartományon, az $[1/2, 1]$ intervallumon kívül esik, ezért írhatjuk, hogy

$$\int_{1/2}^1 \frac{\cos 4x}{x^5} dx = \int_{1/2}^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{2n-5}}{(2n)!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n}}{(2n)!} \int_{1/2}^1 x^{2n-5} dx.$$

A primitív függvényeket az n paraméter lehetséges értékeinek megfelelően kapjuk.

- Ha $n \neq 2$, akkor

$$\int_{1/2}^1 x^{2n-5} dx = \left[\frac{x^{2n-4}}{2n-4} \right]_{1/2}^1 = \frac{1 - (1/2)^{2n-4}}{2n-4}.$$

- Ha $n = 2$, akkor, $\ln 1 = 0$ alapján

$$\int_{1/2}^1 x^{-1} dx = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_{1/2}^1 = \ln 1 - \ln(1/2) = \ln 2.$$

Így

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 \frac{\cos 4x}{x^5} dx &= \sum_{n=0, n \neq 2}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{1 - (1/2)^{2n-4}}{2n-4} \right) + (-1)^2 \frac{4^4}{4!} \ln 2 \\ &\approx \frac{1}{0!} \cdot \frac{1 - (1/2)^{-4}}{-4} - \frac{4^2}{2!} \cdot \frac{1 - (1/2)^{-2}}{-2} + \frac{4^4}{4!} \cdot \ln 2 - \frac{4^6}{6!} \cdot \frac{1 - (1/2)^2}{2}.\end{aligned}$$

Binomiális sor, alkalmazás

Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén, ha $|y| < 1$, akkor

$$(1+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} y^n,$$

ahol

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \text{és} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

az általánosított binomiális együtthatók; ezért nevezzük a fenti Taylor-sort binomiális sornak.

3. Feladat. Adjuk meg az alábbi függvények origó körüli hatványsorát.

$$(a) \quad x\sqrt{1+x^2} \qquad (b) \quad \frac{2x^3}{(1-3x)^2}$$

Megoldás.

(a) A második szorzótényező átírható a

$$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2}$$

alakra. Így az $\alpha = 1/2$ és $y = x^2$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^{2n},$$

ha $|x^2| < 1$, vagyis, ha $|x| < 1$. Ezért

$$x\sqrt{1+x^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^{2n+1}, \quad \text{ha} \quad |x| < 1.$$

(b) Ekkor az $\alpha = -2$ és $y = -3x$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\frac{2x^3}{(1-3x)^2} &= 2x^3(1-3x)^{-2} = 2x^3(1+(-3x))^{-2} = 2x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-3x)^n \\ &= 2x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-3)^n x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-3)^n x^{n+3},\end{aligned}$$

ha $|-3x| < 1$, azaz $|x| < 1/3$.

4. Feladat. Adjuk meg $\arctg x$ origó körüli hatványsorát.

Megoldás. Az $\arctg x$ függvény deriváltja $\frac{1}{1+x^2}$, és egyszerűen adódik, hogy $\binom{-1}{n} = (-1)^n$.
Ezért

$$[\arctg x]' = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

Így

$$\begin{aligned} \arctg x + C &= \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int x^{2n} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{ha } |x| < 1. \end{aligned}$$

Az $x = 0$ pont behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \arctg 0 + C &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} \\ 0 + C &= 0 \\ C &= 0, \end{aligned}$$

vagyis

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

A megfelelő sorfejtés első 4 tagjával becsüljük meg az alábbi kifejezések értékét.

5. Feladat. $\sqrt[3]{9}$

Megoldás. A binomiális sorfejtés alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} x^n,$$

feltéve hogy $|x| < 1$, azaz $0 < 1+x < 2$. De $9 > 2$ miatt a $\sqrt[3]{9}$ érték közvetlenül nem becsülhető meg. Ezért a kifejezést az

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8 \cdot \frac{9}{8}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{8}} = 2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8}}$$

alakra hozzuk. Ugyanis a $\sqrt[3]{9/8}$ értéke, az $x = 1/8$ helyettesítésével megadható és így a $\sqrt[3]{9}$ is:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} \left(\frac{1}{8}\right)^n \\ &\approx 2 \left[\binom{1/3}{0} \cdot 1 + \binom{1/3}{1} \frac{1}{8} + \binom{1/3}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \binom{1/3}{3} \left(\frac{1}{8}\right)^3 \right] \\ &= 2 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1/3 \cdot (-2/3)}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1/3 \cdot (-2/3) \cdot (-5/3)}{3!} \left(\frac{1}{8}\right)^3 \right].\end{aligned}$$

6. Feladat. $\arctg \frac{1}{2}$

Megoldás. A 4. Feladatban láttuk, hogy

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

Ezért az $x = 1/2$ helyettesítéssel ($|1/2| < 1$) kapjuk, hogy

$$\arctg \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} \approx \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{7}.$$

MEGJEGYZÉS. Az $x = 1$ pontban a hatványsor konvergens, és az $\arctg x$ függvény is folytonos itt. Ezért Abel tétele alapján a sor itt is előállítja a függvényt, azaz

$$\frac{\pi}{4} = \arctg 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

tehát

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \dots$$

✠

7. Feladat. $\ln \frac{3}{2}$

Megoldás. Tudjuk, hogy az $\ln(x+1)$ függvény deriváltja $\frac{1}{1+x}$, azaz

$$[\ln(x+1)]' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \text{ha } |x| < 1,$$

ahonnan

$$\begin{aligned}\ln(x+1) + C &= \int \frac{1}{1+x} dx = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right] dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\int x^n dx \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{ha } |x| < 1.\end{aligned}$$

Az $x = 0$ pont behelyettesítésével kapjuk, hogy $C = 0$, vagyis

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (|x| < 1).$$

Ezért $x = 1/2$ esetén írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \ln 3/2 = \ln(1 + 1/2) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1} \\ &\approx \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

MEGJEGYZÉS. Az $x = 1$ pontban a hatványsor konvergens, és az $\ln(x+1)$ függvény is folytonos itt. Ezért Abel tétele alapján a sor itt is előállítja a függvényt, azaz

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$



Videók

Taylor–sor

Adjuk meg az $f(x)$ függvény Taylor–sorát és a sor konvergenciatartományát.

1. Feladat. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$.

Megoldás. $T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n$, $x \in (0, 4)$.



2. Feladat. $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $g(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$.

Megoldás.



$$T_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n}, \quad x \in (0, 2], \quad T_g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$$

3. Feladat. $f(x) = e^x$, $a = 0$.

Megoldás. $T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.



4. Feladat. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $g(x) = \sin x$, $a = 0$.

Megoldás.



$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad T_g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

5. Feladat. $f(x) = \operatorname{sh} x$, $a = 0$.

Megoldás. $T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.



Alkalmazás

A megfelelő sorfejtés első öt tagjával becsüljük meg a következő integrálok értékét.

6. Feladat. $\int_1^2 \frac{e^{-x^3}}{x} dx$

Megoldás.



$$\approx \ln 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^6}{12} - \frac{2^9}{54} + \frac{2^{12}}{24 \cdot 12} - \left(\ln 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{54} + \frac{1}{24 \cdot 12} \right)$$

7. Feladat. $\int_1^2 \frac{\sin(3x)}{x^2} dx$

Megoldás.



$$\approx 3 \ln 2 - \frac{3^3 \cdot 2^2}{2 \cdot 3!} + \frac{3^5 \cdot 2^4}{4 \cdot 5!} - \frac{3^7 \cdot 2^6}{6 \cdot 7!} + \frac{3^9 \cdot 2^8}{8 \cdot 9!} - \left(3 \ln 1 - \frac{3^3}{2 \cdot 3!} + \frac{3^5}{4 \cdot 5!} - \frac{3^7}{6 \cdot 7!} + \frac{3^9}{8 \cdot 9!} \right)$$

8. Feladat. $\int_{-2}^1 \operatorname{ch} x^2 dx$

Megoldás.



$$\approx 1 + \frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} + \frac{1}{13 \cdot 6!} + \frac{1}{17 \cdot 8!} - \left(-2 + \frac{(-2)^5}{5 \cdot 2!} + \frac{(-2)^9}{9 \cdot 4!} - \frac{(-2)^{13}}{13 \cdot 6!} + \frac{(-2)^{17}}{17 \cdot 8!} \right)$$

Binomiális sor

Határozzuk meg a következő függvények binomiális sorát.

9. Feladat. $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}}$, $h(x) = x \cdot \sqrt[4]{4-x^2}$

Megoldás.



$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} x^n, \quad |x| < 1, \\ g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n 3^n x^n, \quad |x| < 1/3, \\ h(x) &= 4^{1/4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/4}{n} \frac{(-1)^n}{4^n} x^{2n+1}, \quad |x| < 2. \end{aligned}$$

10. Feladat. $f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

Megoldás.



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \quad |x| < 1.$$

11. Feladat. $f(x) = \ln(1+x)$

Megoldás.



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

12. Feladat. $f(x) = \arccos x$

Megoldás.



$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

Alkalmazás

A megfelelő sorfejtés első öt tagjával becsüljük meg a következő számokat.

13. Feladat. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

Megoldás.



$$\begin{aligned} \approx 1 &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(1/3) \cdot (-2/3)}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{(1/3) \cdot (-2/3) \cdot (-5/3)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &+ \frac{(1/3) \cdot (-2/3) \cdot (-5/3) \cdot (-8/3)}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

14. Feladat. $\sqrt{11}$

Megoldás.



$$\approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{(1/2) \cdot (-1/2)}{2} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \frac{(1/2) \cdot (-1/2) \cdot (-3/2)}{3!} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^3 + \frac{(1/2) \cdot (-1/2) \cdot (-3/2) \cdot (-5/2)}{4!} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^4 \right)$$

15. Feladat. $\sqrt[5]{25}$

Megoldás.



$$\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-7}{32}\right) + \frac{(1/5) \cdot (-4/5)}{2} \cdot \left(\frac{-7}{32}\right)^2 + \frac{(1/5) \cdot (-4/5) \cdot (-9/5)}{3!} \cdot \left(\frac{-7}{32}\right)^3 + \frac{(1/5) \cdot (-4/5) \cdot (-9/5) \cdot (-14/5)}{4!} \cdot \left(\frac{-7}{32}\right)^4 \right)$$

16. Feladat. $\ln 6$

Megoldás.



$$\approx \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

17. Feladat. $\arcsin \frac{1}{2}$

Megoldás.



$$\approx \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{(-1/2) \cdot (-3/2)}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{(-1/2) \cdot (-3/2) \cdot (-5/2)}{3!} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{(-1/2) \cdot (-3/2) \cdot (-5/2) \cdot (-7/2)}{4!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9}$$

18. Feladat. $\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt[3]{8-x^2}}{x^5} dx$

Megoldás.



$$\begin{aligned} \approx 2 \cdot & \left(\frac{1 - (1/2)^{-4}}{-4} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{8} \right) \cdot \frac{1 - (1/2)^{-2}}{-2} + \frac{(1/3) \cdot (-2/3)}{2} \cdot \frac{1}{8^2} \cdot (-\ln 1/2) \right. \\ & + \frac{(1/3) \cdot (-2/3) \cdot (-5/3)}{3!} \cdot \left(-\frac{1}{8^3} \right) \cdot \frac{1 - (1/2)^2}{2} \\ & \left. + \frac{(1/3) \cdot (-2/3) \cdot (-5/3) \cdot (-8/3)}{4!} \cdot \frac{1}{8^4} \cdot \frac{1 - (1/2)^4}{4} \right) \end{aligned}$$

19. Feladat. $\int_0^1 x^4 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{-x^2}{9} \right) dx$

Megoldás.



$$\approx \left(-\frac{1}{9} \right) \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} \cdot \frac{1}{11} + \left(-\frac{1}{5 \cdot 9^5} \right) \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} \cdot \frac{1}{19} + \left(-\frac{1}{9^{10}} \right) \cdot \frac{1}{23}$$

Kvizek

A csoport

- 1. Feladat.** A megfelelő sorfejtés első 4 tagjával becsüljük meg $\sqrt[4]{11}$ értékét.
- 2. Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = x \sin 2x$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli Taylor–sorát.

B csoport

Feladat. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{9-x^3}}{x} dx$$

értékét.

C csoport

- 1. Feladat.** A megfelelő sorfejtés első 4 tagjával becsüljük meg $\int_0^{1/2} \sqrt[7]{1+x^3} dx$ értékét.
- 2. Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = x^2 \cos(-3x)$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli Taylor–sorát.

Kvizek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása.

$$\sqrt[4]{1+x} = (1+x)^{1/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/4}{n} x^n, \quad (|x| < 1)$$

Ezek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{11} &= \sqrt[4]{16 \cdot \frac{11}{16}} = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{11}{16}} = 2 \cdot \sqrt[4]{1 + \left(-\frac{5}{16}\right)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/4}{n} \left(-\frac{5}{16}\right)^n \\ &\approx 2 \left[\binom{1/4}{0} \cdot 1 + \binom{1/4}{1} \left(-\frac{5}{16}\right) + \binom{1/4}{2} \left(-\frac{5}{16}\right)^2 + \binom{1/4}{3} \left(-\frac{5}{16}\right)^3 \right] \\ &= 2 \left[1 + \frac{1}{4} \left(-\frac{5}{16}\right) + \frac{1/4 \cdot (-3/4)}{2} \left(-\frac{5}{16}\right)^2 + \frac{1/4 \cdot (-3/4) \cdot (-7/4)}{3!} \left(-\frac{5}{16}\right)^3 \right]. \end{aligned}$$

1 pt

2. Feladat megoldása.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ezért

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

ahol $x \in \mathbb{R}$. Innen

$$x \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+2},$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

2 pt

3 pt

B csoport

Feladat megoldása. Ha $1 \leq x \leq 2$, akkor $0 < x^3/9 < 1$ miatt

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^3} &= 3 \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{x^3}{9}\right)} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(-\frac{x^3}{9}\right)^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(-1)^n}{9^n} x^{3n} \\ &= 3 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(-1)^n}{9^n} x^{3n}.\end{aligned}$$

1 pt

Ebből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\sqrt{9-x^3}}{x} dx &= \int_1^2 \left(\frac{3}{x} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(-1)^n}{9^n} x^{3n-1} \right) dx \\ &= \left[3 \ln |x| + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(-1)^n}{9^n} \frac{x^{3n}}{3n} \right]_1^2 \\ &= 3 \ln 2 - 3 \ln 1 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(-1)^n}{9^n} \frac{2^{3n} - 1^{3n}}{3n} \\ &= 3 \ln 2 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(-1)^n}{9^n} \frac{8^n - 1}{3n}.\end{aligned}$$

2 pt

Innen

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\sqrt{9-x^3}}{x} dx &\approx 3 \ln 2 + 3 \binom{1/2}{1} \frac{-1}{9} \cdot \frac{7}{3} + 3 \binom{1/2}{2} \frac{1}{9^2} \cdot \frac{8^2-1}{6} + 3 \binom{1/2}{3} \frac{-1}{9^3} \cdot \frac{8^3-1}{9} \\ &= 3 \ln 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{3} + 3 \cdot \frac{1/2 \cdot (-1/2)}{2} \cdot \frac{1}{9^2} \cdot \frac{8^2-1}{6} \\ &\quad - 3 \cdot \frac{1/2 \cdot (-1/2) \cdot (-3/2)}{6} \cdot \frac{1}{9^3} \cdot \frac{8^3-1}{9} \\ &= 3 \ln 2 - \frac{7}{18} - \frac{8^2-1}{2^4 \cdot 9^2} - \frac{8^3-1}{2^4 \cdot 3 \cdot 9^3}.\end{aligned}$$

3 pt

C csoport

1. Feladat megoldása. Ha $|x| < 1$, akkor

$$\sqrt[7]{1+x^3} = (1+x^3)^{1/7} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/7}{n} x^{3n}.$$

1 pt

Mivel $[0, 1/2] \subset (-1, 1)$, ezért

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \sqrt[7]{1+x^3} dx &= \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/7}{n} x^{3n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/7}{n} \int_0^{1/2} x^{3n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/7}{n} \left[\frac{x^{3n+1}}{3n+1} \right]_0^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/7}{n} \frac{(1/2)^{3n+1}}{3n+1} \\ &\approx \binom{1/7}{0} \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \binom{1/7}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{4} + \binom{1/7}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \frac{1}{7} + \binom{1/7}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{4} + \frac{1/7 \cdot (-6/7)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \frac{1}{7} \\ &\quad + \frac{1/7 \cdot (-6/7) \cdot (-13/7)}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

2. Feladat megoldása.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

2 pt

A koszinusz függvény páros, ezért

$$\cos(-3x) = \cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Így

$$x^2 \cos(-3x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n}}{(2n)!} x^{2n+2}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

3 pt

9.

Többszámú változós függvények értelmezési tartománya, határértéke

Házi feladatok

Értelmezési tartomány

1. Feladat. Ábrázoljuk az alábbi függvények értelmezési tartományát.

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 - 2 + y^2)$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$

(c) $f(x, y) = \ln(x^2 - 2 + y^2) + \frac{1}{x + y}$

Megoldás.

- (a) Az $f(x, y) = \ln(x^2 - 2 + y^2)$ függvény esetén az

$$x^2 - 2 + y^2 > 0$$

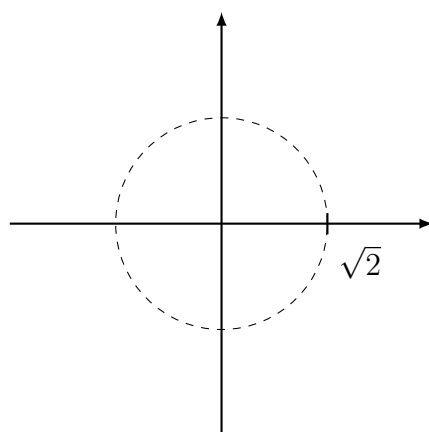
feltételnek kell teljesülnie.

Ábrázoljuk az

$$x^2 - 2 + y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

egyenletű görbét, ami egy origó középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú kör. A körvonal pontjai nem tartoznak az értelmezési tartományhoz.



Továbbá a kör két részre osztja a síkot. Mindkét részből egy-egy tesztpontot választunk. A megfelelő függvények folytonossága miatt a síkrészeken a függvények előjele állandó. Ezért egy síkrészen belül tetszőleges tesztpontokat használhatunk, melyeket a feltételbe helyettesítve döntjük el, hogy az adott síkrész része-e az értelmezési tartománynak, vagy sem.

- Az *I.* síkrészből válasszuk például a $P_1(2, 0)$ pontot. Ekkor

$$2^2 - 2 + 0^2 = 2 > 0.$$

- A *II.* síkrészből válasszuk például a $P_2(0, 0)$ pontot. Ekkor

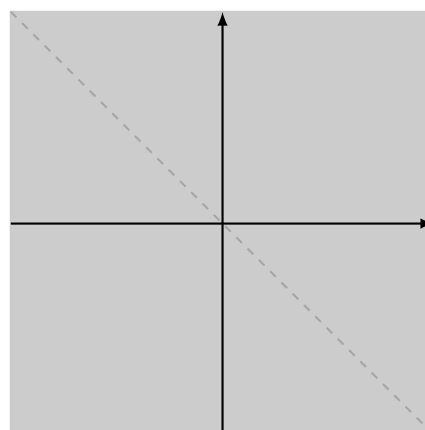
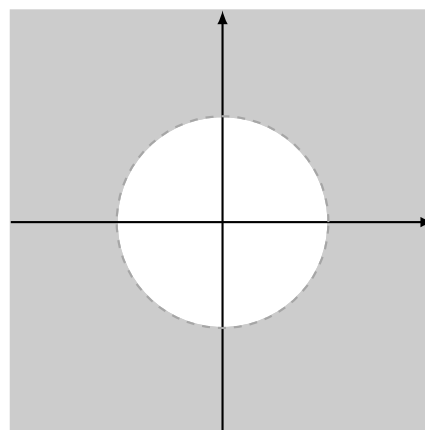
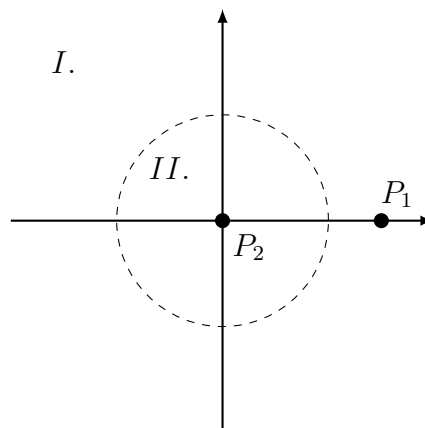
$$0^2 - 2 + 0^2 = -2 \not> 0.$$

Azaz a függvény értelmezési tartománya az *I.* síkrész, a körvonal pontjai nélkül.

- (b) Az $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$ függvény esetén a tört nevezője nem lehet nulla, azaz

$$\begin{aligned} x + y &\neq 0 \\ y &\neq -x, \end{aligned}$$

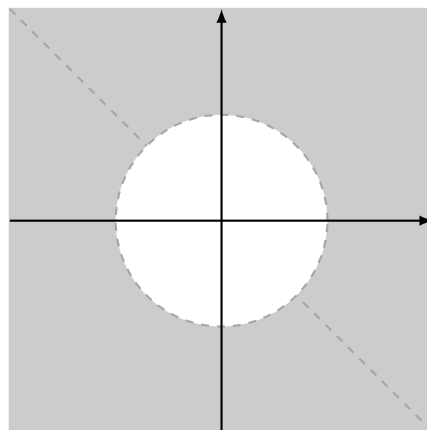
tehát az értelmezési tartomány az $y = -x$ egyenes pontjai kivételével az egész sík.



(c) Az $f(x, y) = \ln(x^2 - 2 + y^2) + \frac{1}{x+y}$ függvény esetén az

$$x^2 - 2 + y^2 > 0 \quad \text{és az} \quad y \neq -x$$

feltételeknek egyszerre kell teljesülnie, azaz az (a) és a (b) rész alapján a megoldás az előző két tartomány metszeteként adódik.



2. Feladat. Ábrázoljuk az $f(x, y) = \sqrt{\frac{2-x+2y}{1-x+y^2}}$ függvény értelmezési tartományát.

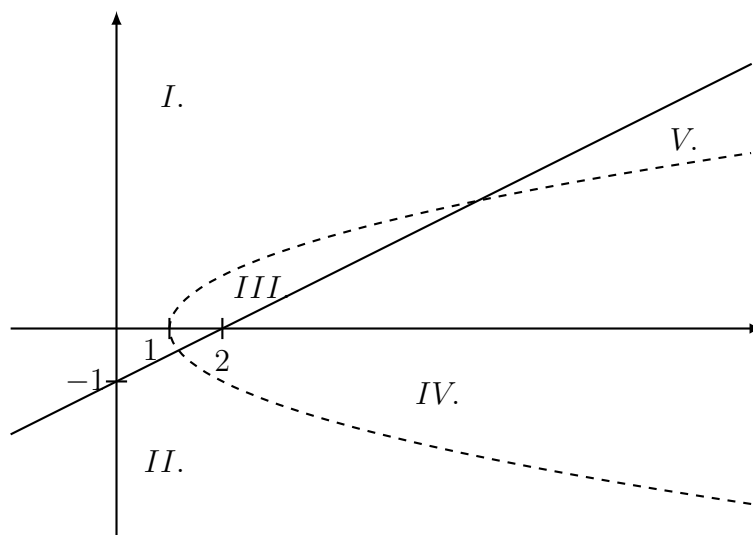
Megoldás. Az értelmezési tartományra vonatkozó feltételek

$$\frac{2-x+2y}{1-x+y^2} \geq 0 \quad \text{és} \quad 1-x+y^2 \neq 0.$$

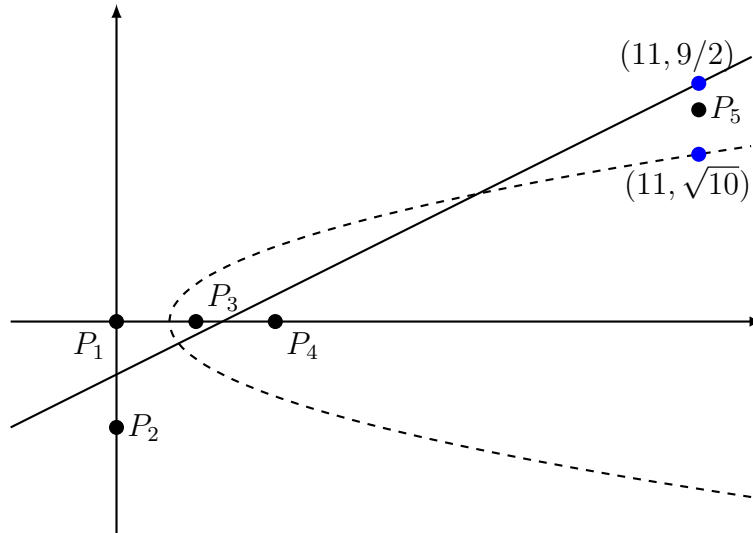
Ábrázoljuk közös koordináta rendszerben a

$$2-x+2y=0 \quad \text{és az} \quad 1-x+y^2=0$$

egyenletű görbéket.



Az egyenes és a fekvő parabola 5 részre osztja a síkot. Az egyenes pontjai igen, míg a parabola pontjai nem tartoznak az értelmezési tartományhoz. Ezért már csak az első feltételt ellenőrizzük. Az V. síkrész kivételével, az ábra alapján egyszerűen választhatunk pontokat.



- A $P_1(0, 0)$ biztosan I -ben van és itt

$$\frac{2 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} > 0.$$

- A $P_2(0, -2)$ eleme II -nek és

$$\frac{2 - 0 - 4}{1 - 0 + 4} < 0.$$

- A III . síkrész tartalmazza a $P_3(3/2, 0)$ pontot és itt

$$\frac{2 - 3/2 + 0}{1 - 3/2 + 0} < 0.$$

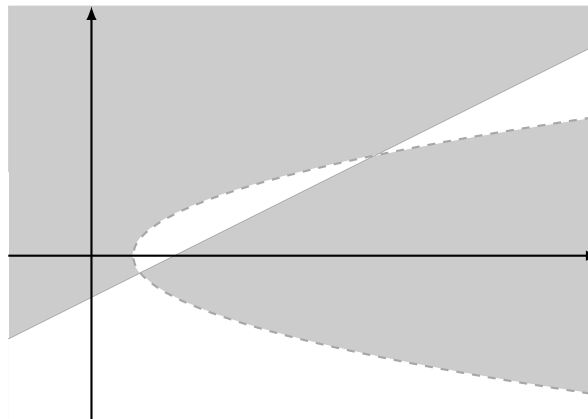
- A IV . síkrészből válasszuk például a $P_4(3, 0)$ pontot. Ekkor

$$\frac{2 - 3 + 0}{1 - 3 + 0} > 0.$$

- A V . síkrész esetén a tesztpont első koordinátája legyen $x = 11$. Az $2 - x + 2y = 0$ egyenesen az $x = 11$ értékhez tartozó pont második koordinátája $y = 9/2 > 4$, az $1 - x + y^2 = 0$ parabola felső ágán lévő ponthoz $y = \sqrt{10} < 4$ tartozik. Így például a $P_5(11, 4)$ pont az V . síkrészbe esik és

$$\frac{2 - 11 + 8}{1 - 11 + 16} < 0.$$

Ezek alapján az értelmezési tartomány az I . és IV . síkrészek uniója.



Határérték

3. Feladat. Határozzuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow A_i} \frac{x+y}{\sqrt{xy^2-x}}$ határértéket, ha

- (a) $A_1 = (2, \infty)$, (c) $A_3 = (-\infty, 1/2)$, (e) $A_5 = (\infty, \infty)$,
 (b) $A_2 = (-\infty, 3)$, (d) $A_4 = (1, -2)$, (f) $A_6 = (0, 0)$.

Megoldás. A függvény határértékét – ahogy az egyváltozós esetben – alapvetően az értelmezési tartomány szélein számoljuk, ahol a függvényt nem tudjuk kiértékelni. Ezért első lépésben meghatározzuk az értelmezési tartományt akkor is, ha ezt a feladat külön nem is kéri.

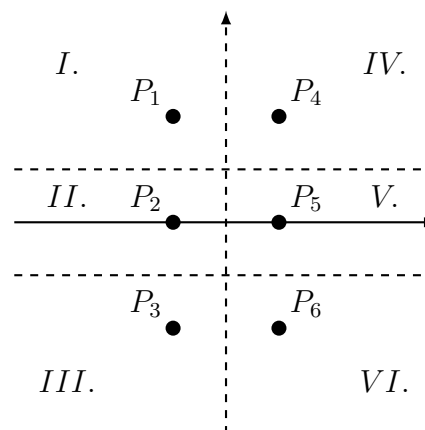
A kikötésünk a tört és a négyzetgyök miatt

$$xy^2 - x > 0.$$

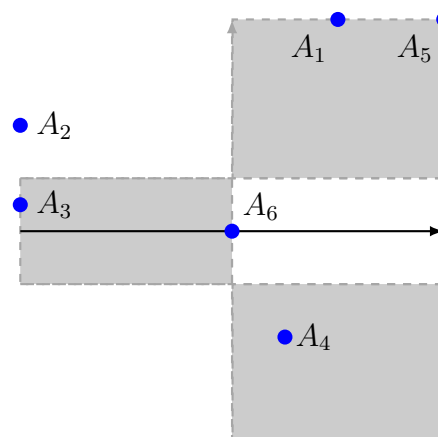
Az $xy^2 - x = x(y^2 - 1) = 0$ egyenletet megoldva kapjuk, hogy $x = 0$, $y = \pm 1$. Ez a három egyenes hat részre osztja a síkot.

Most egyszerűen választhatunk tesztpontokat:

I. síkrész:	$P_1(-1, 2)$	$-4 + 1 \not> 0$
II. síkrész:	$P_2(-1, 0)$	$1 > 0$
III. síkrész:	$P_3(-1, -2)$	$-4 + 1 \not> 0$
IV. síkrész:	$P_4(1, 2)$	$4 - 1 > 0$
V. síkrész:	$P_5(1, 0)$	$-1 \not> 0$
VI. síkrész:	$P_6(1, -2)$	$4 - 1 > 0$



Ezek alapján felvesszük az értelmezési tartományt. Az ábrán szaggatott vonallal jelöltük az értelmezési tartomány széleit és jelöltük a határérték helyeket is.



- (a) Az $A_1(2, \infty)$ hely az értelmezési tartomány szélén található. Az első változó véges értékhez, kettőhöz tart, a második végtelenhez. Így a második változó domináns tagjának

kiemelésével nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (2,\infty)} \frac{x+y}{\sqrt{xy^2-x}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,\infty)} \frac{y}{\sqrt{y^2}} \cdot \frac{x/y+1}{\sqrt{x-x/y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,\infty)} 1 \cdot \frac{x/y+1}{\sqrt{x-x/y^2}} = 1 \cdot \frac{0+1}{\sqrt{2-0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

- (b) Jól láthatóan $A_2(-\infty, 3)$ nincs az értelmezési tartományán szélén és nem is belső pontja annak, így itt a határérték nem definiált.
- (c) Az $A_3(-\infty, 1/2)$ hely esetén az x koordináta mínusz végtelenbe tart és a feladatban van négyzetgyökös kifejezés, így célszerű x helyett $-x$ -et írni, majd a tanult módon a domináns tagot kiemelni:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, 1/2)} \frac{x+y}{\sqrt{xy^2-x}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, 1/2)} \frac{-x+y}{\sqrt{-xy^2+x}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, 1/2)} \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-1+y/x}{\sqrt{-y^2+1}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, 1/2)} \sqrt{x} \cdot \frac{-1+y/x}{\sqrt{-y^2+1}} = \infty \cdot \frac{-1}{\sqrt{-(1/2)^2+1}} = -\infty.\end{aligned}$$

- (d) Az $A_4(1, -2)$ belső pontja az értelmezési tartománynak, ezért a határérték behelyettesítéssel kapható:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{x+y}{\sqrt{xy^2-x}} = \frac{1-2}{\sqrt{1 \cdot (-2)^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- (e) Az $A_5(\infty, \infty)$ hely esetén mindkét változó végtelenbe tart. A domináns tagok kiemelésével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{\sqrt{xy^2-x}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{xy}{\sqrt{xy^2}} \cdot \frac{1/y+1/x}{\sqrt{1-1/y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \sqrt{x} \cdot \frac{1/y+1/x}{\sqrt{1-1/y^2}} \rightarrow \infty \cdot \frac{0}{\sqrt{1}} = \infty \cdot 0,\end{aligned}$$

azaz ez a módszer most nem vezet eredményre. Ezért, hogy sejtésünk legyen a függvény viselkedéséről, különböző utak (görbék) mentén vizsgáljuk a határértéket.

- Az $y = x$ egyenes mentén az

$$x = t, \quad y = t, \quad t > 1$$

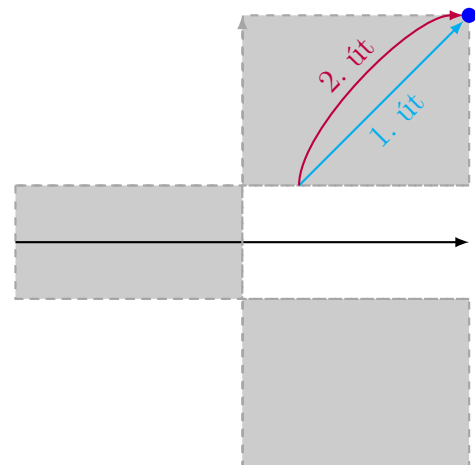
paraméterezéssel írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+t}{\sqrt{t^3-t}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\sqrt{t^3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-1/t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-1/t^2}} = 0 \cdot \frac{2}{1} = 0.\end{aligned}$$

- Az $x = y^2$ görbe mentén az

$$y = t, \quad x = t^2, \quad t > 1$$

paraméterezéssel kapjuk, hogy



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + t}{\sqrt{t^4 - t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{\sqrt{t^4}} \cdot \frac{1 + 1/t}{\sqrt{1 - 1/t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{1 + 1/t}{\sqrt{1 - 1/t^2}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Két különböző görbe mentén két különböző határértéket kaptunk, így ezen a helyen a határérték nem létezik.

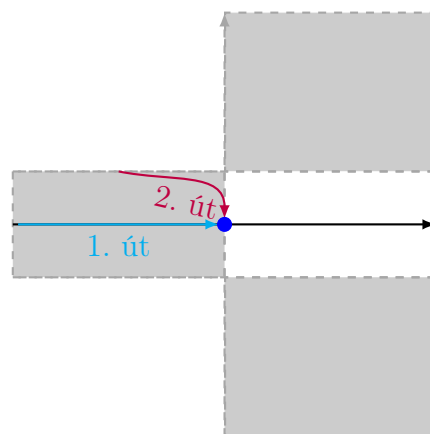
- (f) A $(0, 0)$ pont behelyettesítésével $\frac{0}{0}$ típusú határértéket kapunk. Az értelmezési tartomány alapján a következő görbék mentén vizsgáljuk a függvény viselkedését.

- Az első út az $x = -t$, $y = 0$, $t > 0$ félegyenes. Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\sqrt{t} = 0.$$

- Az $x = -t$, $y = \sqrt{t}$, $0 < t < 1$ út esetén

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t + \sqrt{t}}{\sqrt{-t^2 + t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{t} + 1}{\sqrt{-t + 1}} = 1.$$



Két különböző görbe mentén két különböző határértéket kaptunk, ezért a határérték nem létezik ebben a pontban sem.

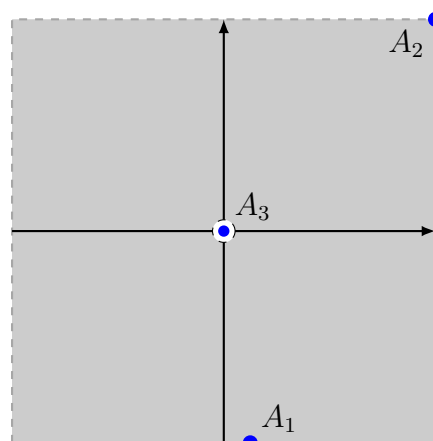
4. Feladat. Határozzuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow A_i} \frac{-3yx^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ határértéket, ha

- (a) $A_1 = (1/2, -\infty)$, (b) $A_2 = (\infty, \infty)$, (c) $A_3 = (0, 0)$.

Megoldás. Határozzuk meg az értelmezési tartományt. A kikötésünk a tört és a négyzetgyök miatt

$$x^2 + y^2 > 0, \quad \text{ahonnan} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Így mindhárom hely az értelmezési tartomány szélén található.



- (a) Az x koordináta véges értékhez, az y koordináta $-\infty$ -be tart. A feladatban van négyzet-

gyökös kifejezés, így y helyett $-y$ -t írunk, majd a domináns tagot kiemeljük:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (1/2, -\infty)} \frac{-3yx^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1/2, \infty)} \frac{-3(-y)x^2}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1/2, \infty)} \frac{3yx^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1/2, \infty)} \frac{y}{\sqrt{y^2}} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{x^2/y^2 + 1}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1/2, \infty)} 1 \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{x^2/y^2 + 1}} \\ &= 1 \cdot \frac{3 \cdot (1/2)^2}{\sqrt{0 + 1}} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

(b) A domináns tagok kiemelésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{-3yx^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 y^2}} \cdot \frac{-3}{\sqrt{1/y^2 + 1/x^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} x \cdot \frac{-3}{\sqrt{1/y^2 + 1/x^2}} \\ &= \infty \cdot \frac{-3}{0^+} = \infty \cdot (-\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

(c) A határérték $\frac{0}{0}$ típusú. Mivel a feladatban $x^2 + y^2$ valamilyen hatványa szerepel, ezért polárkoordinátákra használata természetesen adódik:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \text{amiből} \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Így a megfelelő határérték

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-3yx^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} \frac{-3(r \sin \varphi)(r \cos \varphi)^2}{\sqrt{r^2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} \frac{-3r^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{r} \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} (-3r^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi) = 0,\end{aligned}$$

ugyanis

$$-1 \leq \sin \varphi \cos^2 \varphi \leq 1$$

miatt, a rendőrelv alapján

$$\begin{array}{ccccc}-3r^2 & \leq & 3r^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi & \leq & 3r^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0\end{array}$$

ha $r \rightarrow 0^+$.

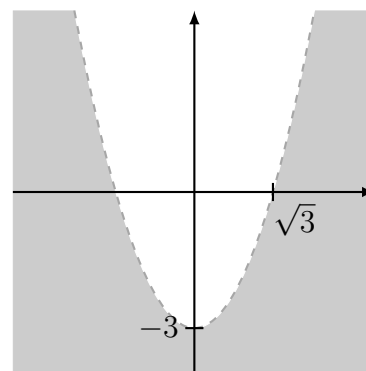
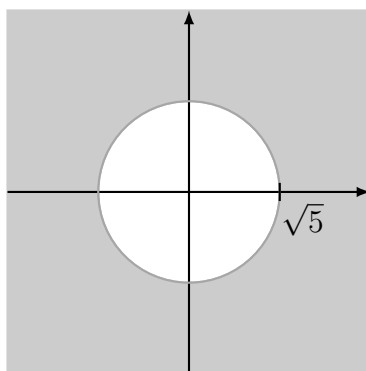
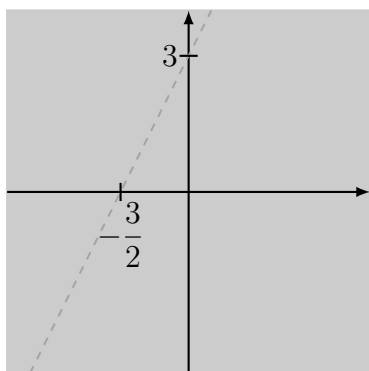
Videók

Értelmezési tartomány

Ábrázoljuk az alábbi függvények értelmezési tartományát.

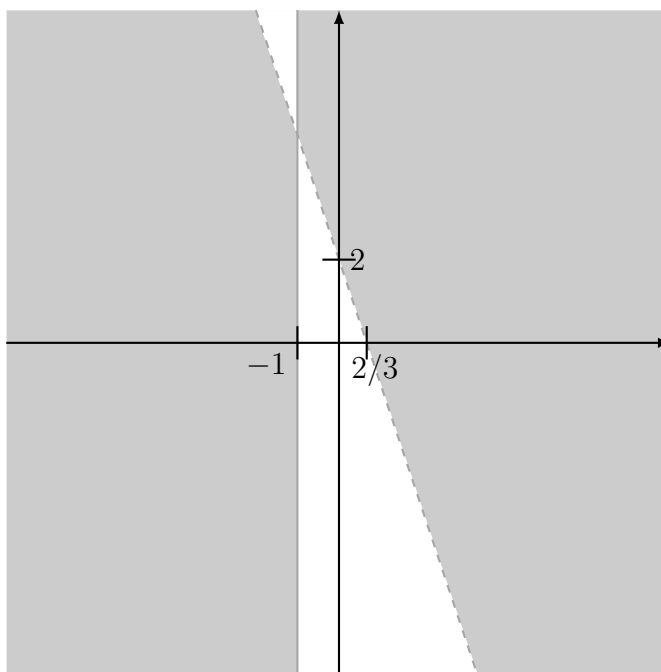
1. Feladat. $f(x, y) = \frac{1}{2x + 3 - y}$, $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$, $h(x, y) = \ln(x^2 - 3 - y)$

Megoldás.



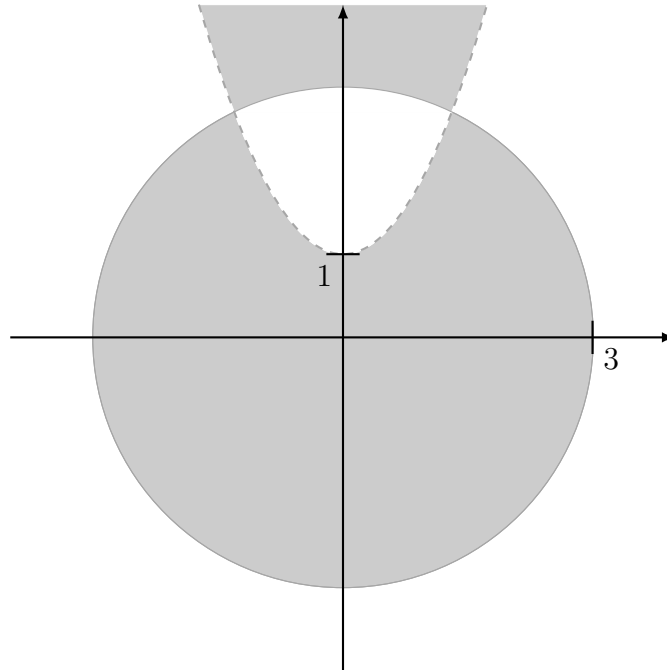
2. Feladat. $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x}{3x+y-2}}$

Megoldás.



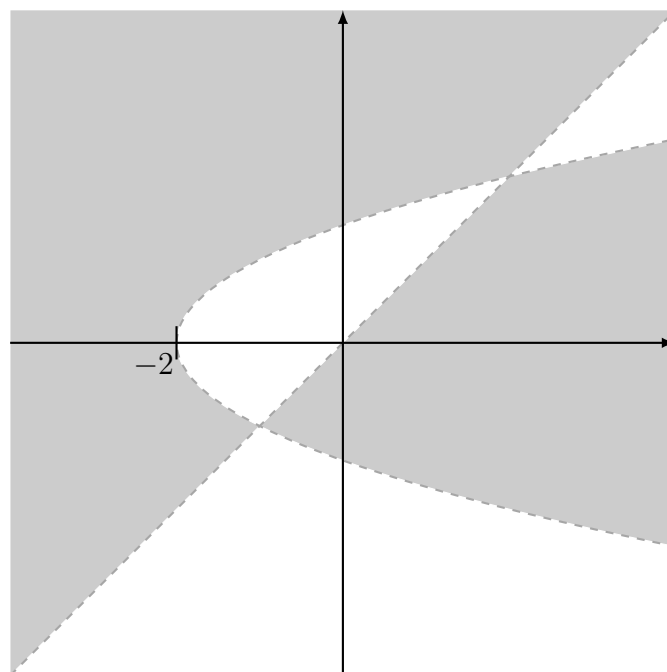
3. Feladat. $f(x, y) = \sqrt{\frac{9 - x^2 - y^2}{x^2 + 1 - y}}$

Megoldás.



4. Feladat. $f(x, y) = \ln \frac{x + 2 - y^2}{x - y}$

Megoldás.



Határérték

Adjuk meg az alábbi függvények határértékeit a megadott helyeken.

5. Feladat. $f(x, y) = \frac{1}{x + y^2 - 3}$, a) $(0, 0)$, b) $(0, 2)$, c) $(3, 0)$

Megoldás.



a) $-\frac{1}{3}$

b) 1

c) nem létezik

6. Feladat.

$f(x, y) = \sqrt{\frac{y-2}{2x+y-1}}$, a) $(-1, 0)$, b) $(1, 2)$, c) $(1, 0)$, d) $(-1/2, 2)$, e) $(0, 1)$

Megoldás.



a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

b) 0

d) nem létezik

c) nem definiált

e) ∞

7. Feladat. $f(x, y) = \frac{3x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, a) $(1, 3)$, b) $(0, 0)$

Megoldás.



a) 0

b) nem létezik

8. Feladat. $f(x, y) = \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, a) $(1, 3)$, b) $(0, 0)$

Megoldás.



a) $\frac{9}{\sqrt{10}}$

b) 0

9. Feladat. $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, a) $(0, 0)$

Megoldás. a) nem létezik



10. Feladat. $f(x, y) = xy - 2y$,

a) $(-\infty, 2)$, b) $(-2, \infty)$, c) $(2, \infty)$, d) $(\infty, 0)$, e) (∞, ∞)

Megoldás.



- a) $-\infty$ b) $-\infty$ c) nem létezik d) nem létezik e) ∞

11. Feladat. $f(x, y) = \frac{y^2 - x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, a) $(-\infty, 1)$, b) $(3, \infty)$, c) $(\infty, -\infty)$

Megoldás.



- a) 1 b) ∞ c) nem létezik

12. Feladat. $f(x, y) = \frac{3}{x^2 + y} + \frac{3y}{2y + 3} - \frac{x}{2x + 1}$, a) (∞, ∞) , b) (x, ∞) , c) (∞, y)

Megoldás.



- a) 1
 b) $\frac{3}{2} - \frac{x}{2x + 1}$, ha $x \neq -\frac{1}{2}$, különben nem létezik
 c) $-\frac{1}{2} - \frac{3y}{2y + 3}$, ha $y \neq -\frac{3}{2}$, különben nem létezik

13. Feladat. $f(x, y) = \frac{2x^3 - xy + 1}{x^2y - xy^2}$, a) $(0, 0)$, b) $(-2, -\infty)$, c) (∞, ∞)

Megoldás.



- a) nem létezik b) 0 c) nem létezik

14. Feladat. $f(x, y) = \frac{x + y^2}{\sqrt{x^2y - 3y}}$
 a) $(\infty, -\infty)$, b) $(1, -\infty)$, c) $(2, -\infty)$, d) (∞, ∞) , e) $(0, 0)$, f) $(3, 0)$

Megoldás.



- a) nem definiált c) nem definiált e) nem létezik
 b) ∞ d) nem létezik f) ∞

Kvízek

A csoport

1. Feladat. Ábrázoljuk az $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+2}}{\ln(y/2-1)}$ függvény értelmezési tartományát.

2. Feladat. Határozzuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y - 2xy^2}{x^2 + y^2}$ határértéket.

B csoport

Feladat. Határozzuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow A} \ln \frac{x-1}{y-2}$ határértékeket, ahol

- (a) $A_1 = (\infty, 1)$
- (b) $A_2 = (-1, -\infty)$
- (c) $A_3 = (1, 2)$

C csoport

Feladat. Határozzuk meg a $\lim_{(x,y) \rightarrow A} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x - y}$ határértékeket, ahol

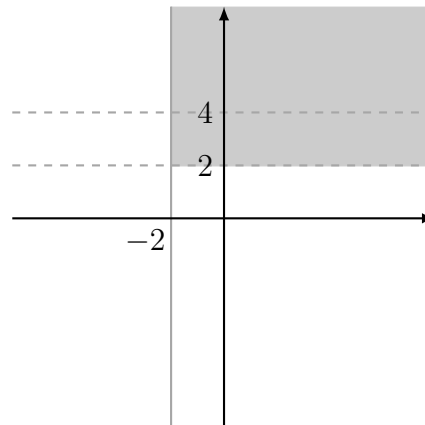
- (a) $A_1 = (1, 2)$
- (b) $A_2 = (\infty, \infty)$
- (c) $A_3 = (-1, -1)$

Kvízek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása. A kikötés a négyzetgyök, a tört és a logaritmus miatt

$$\begin{aligned} x+2 \geq 0 \quad \text{és} \quad \ln(y/2-1) \neq 0 \quad \text{és} \quad y/2-1 > 0 \\ x \geq -2 \quad \quad y/2-1 \neq 1 \quad \quad y/2 > 1 \\ x \geq -2 \quad \quad y \neq 4 \quad \quad y > 2. \end{aligned}$$



Ennek megfelelően az értelmezési tartomány a jobb oldalon látható.

1 pt

2. Feladat megoldása. A határérték $\frac{0}{0}$ típusú.

Kikötés:

$$x^2 + y^2 \neq 0, \quad \text{ahonnan} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Polárkoordinátákkal

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

2 pt

alapján

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y - 2xy^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} \frac{(r \cos \varphi)^2 (r \sin \varphi) - 2(r \cos \varphi)(r \sin \varphi)^2}{r^2} \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 2r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2} \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ 0 \leq \varphi < 2\pi}} r (\cos^2 \varphi \sin \varphi - 2 \cos \varphi \sin^2 \varphi) = 0, \end{aligned}$$

ugyanis

$$-3 \leq \cos^2 \varphi \sin \varphi - 2 \cos \varphi \sin^2 \varphi \leq 3$$

és a rendőrelv miatt

$$\begin{array}{ccccc} -3r & \leq & r (\cos^2 \varphi \sin \varphi - 2 \cos \varphi \sin^2 \varphi) & \leq & 3r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

ha $r \rightarrow 0^+$.

3 pt

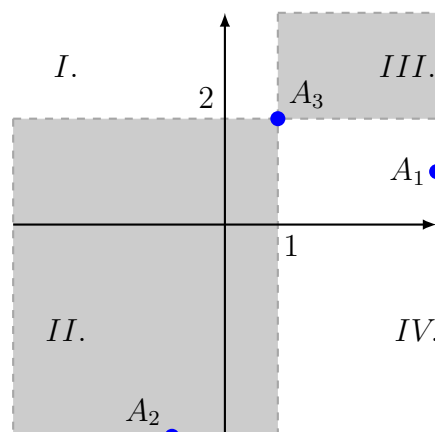
B csoport

Feladat megoldása. Az értelmezési tartomány a logaritmus és a tört miatt

$$\frac{x-1}{y-2} > 0 \quad \text{és} \quad y-2 \neq 0.$$

Az $x = 1$, $y = 2$ egyenesek négy részre osztják a síkot. A tört

$$\begin{array}{ll} I. & \text{a } P_1(0, 3) \text{ pontban } \frac{0-1}{3-2} < 0, \\ II. & \text{a } P_2(0, 0) \text{ -ban } \frac{0-1}{0-2} > 0, \\ III. & \text{a } P_3(2, 3) \text{ -ban } \frac{2-1}{3-2} > 0, \\ IV. & \text{a } P_4(2, 0) \text{ -ben } \frac{2-1}{0-2} < 0. \end{array}$$



1 pt

- Az $A_1(\infty, 1)$ helyen a határérték nem definiált.
- Az $A_2(-1, -\infty)$ helyen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1, -\infty)} \frac{x-1}{y-2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (-1, -\infty)} \frac{1}{y} \cdot \frac{x-1}{1-2/y} = 0^- \cdot (-2) = 0^+$$

miatt a logaritmus függvény ismeretében

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1, -\infty)} \ln \frac{x-1}{y-2} = -\infty.$$

2 pt

- Amennyiben az $A_3(1, 2)$ pontot az $x = 1 - t$, $y = 2 - t$, $t > 0$ görbe mentén közelítjük meg, akkor

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \frac{1-t-1}{2-t-2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \frac{-t}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln 1 = \ln 1 = 0,$$

ha az $x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, $t > 0$ görbe mentén, akkor

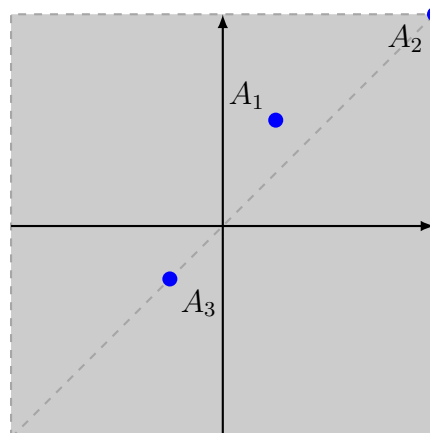
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \frac{1+2t-1}{2+t-2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \frac{2t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln 2 = \ln 2 \neq 0.$$

Így ebben a pontban a határérték nem létezik.

3 pt

C csoport

Feladat megoldása. Az értelmezési tartomány a tört miatt $x - y \neq 0$, azaz $y \neq x$.



- (a) Az $A_1 = (1, 2)$ pont belső pont, ezért

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x - y} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{1 - 2} = -\sqrt{5}.$$

1 pt

- (b) Amennyiben az $A_2 = (\infty, \infty)$ helyet az $x = t$, $y = t^2$, $t > 1$ görbe mentén közelítjük meg, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2 + t^4}}{t - t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{1/t^2 + 1}}{1/t - 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1/t^2 + 1}}{1/t - 1} = -1,$$

ha az $x = t^2$, $y = t$, $t > 1$ görbe mentén, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^4 + t^2}}{t^2 - t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + 1/t^2}}{1 - 1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 1/t^2}}{1 - 1/t} = 1 \neq -1.$$

2 pt

Így ebben a pontban a határérték nem létezik.

- (c) Az $A_3 = (-1, -1)$ pontot az $x = -1$, $y = -1 + t$, $t > 0$ görbe mentén megközelítve

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-1 + t)^2}}{-1 - (-1 + t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 - 2t + t^2}}{-t} = \frac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty,$$

az $x = -1$, $y = -1 - t$, $t > 0$ görbe mentén

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-1 - t)^2}}{-1 - (-1 - t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 + 2t + t^2}}{t} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = \infty,$$

ezért ebben a pontban a határérték nem létezik.

3 pt

10.

Derivált; lokális szélsőérték

Házi feladatok

Derivált

Az $f(x, y)$ függvény (a, b) pontban vett

- x változó szerinti parciális deriváltja

$$f'_x(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h},$$

amennyiben ez a határérték létezik és véges;

- y változó szerinti parciális deriváltja

$$f'_y(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h},$$

amennyiben ez a határérték létezik és véges;

- gradiens vektora

$$\nabla f(a, b) = (f'_x(a, b), f'_y(a, b));$$

- totális differenciálja

$$df(a, b) = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy,$$

amennyiben az f'_x és f'_y folytonos.

Az $f(x, y)$ függvény (a, b) pontban vett, $\underline{u}(u_1, u_2)$ irány szerinti deriváltja

- definíció szerint

$$f'_{\underline{u}}(a, b) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(a + \frac{u_1}{|\underline{u}|}t, b + \frac{u_2}{|\underline{u}|}t\right) - f(a, b)}{t},$$

amennyiben ez a határérték létezik és véges;

- formálisan

$$f'_{\underline{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \circ \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}.$$

1. Feladat. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x, y) = 3x + \sqrt{xy} - 1/y$ függvény $f'_x(1, 4)$ és $f'_y(4, 1)$ parciális deriváltjait.

Megoldás.

Először definíció szerint számoljuk ki a parciális deriváltakat.

- Az x változó szerinti parciális derivált

$$\begin{aligned} f(1+h, 4) &= 3(1+h) + \sqrt{(1+h)4} - \frac{1}{4} = 3 + 3h + \sqrt{4+4h} - \frac{1}{4} \\ f(1, 4) &= 3 + \sqrt{4} - \frac{1}{4} = 5 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

alapján

$$\begin{aligned} f'_x(1, 4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 4) - f(1, 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 3h + \sqrt{4+4h} - \frac{1}{4} - (5 - \frac{1}{4})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h - 2 + \sqrt{4+4h}}{h} \cdot \frac{3h - 2 - \sqrt{4+4h}}{3h - 2 - \sqrt{4+4h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3h - 2)^2 - (4 + 4h)}{h(3h - 2 - \sqrt{4+4h})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9h^2 - 16h}{h(3h - 2 - \sqrt{4+4h})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9h - 16}{(3h - 2 - \sqrt{4+4h})} = \frac{-16}{-4} = 4. \end{aligned}$$

- Az y változó szerinti parciális derivált

$$\begin{aligned} f(4, 1+h) &= 12 + \sqrt{4(1+h)} - \frac{1}{1+h} \\ f(4, 1) &= 12 + \sqrt{4} - \frac{1}{1} = 13 \end{aligned}$$

miatt

$$\begin{aligned} f'_y(4, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4, 1+h) - f(4, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 + \sqrt{4(1+h)} - \frac{1}{1+h} - 13}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+4h} - (\frac{1}{1+h} + 1)}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+4h} + (\frac{1}{1+h} + 1)}{\sqrt{4+4h} + (\frac{1}{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+4h) - (\frac{1}{1+h} + 1)^2}{h(\sqrt{4+4h} + \frac{1}{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^3 + 11h^2 + 8h}{h(h+1)^2(\sqrt{4+4h} + \frac{1}{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 + 11h + 8}{(h+1)^2(\sqrt{4+4h} + \frac{1}{1+h} + 1)} = \frac{8}{4} = 2. \end{aligned}$$

A deriváltak formálisan:

- $f'_x(x, y) = 3 + \frac{1}{2}(xy)^{-1/2}y = 3 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad f'_x(1, 4) = 3 + \frac{4}{2\sqrt{4}} = 3 + 1 = 4;$
- $f'_y(x, y) = \frac{1}{2}(xy)^{-1/2}x + y^{-2} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + \frac{1}{y^2}, \quad f'_y(4, 1) = \frac{4}{2\sqrt{4}} + \frac{1}{1} = 2.$

2. Feladat. Formálisan határozzuk meg az $f(x, y) = x \cos y - \ln x^2 y$ függvény másodrendű parciális deriváltjait.

Megoldás.

Az elsőrendű deriváltak:

$$f'_x = \cos y - \frac{1}{x^2 y} \cdot 2xy = \cos y - \frac{2}{x}, \quad f'_y = -x \sin y - \frac{1}{x^2 y} \cdot x^2 = -x \sin y - \frac{1}{y}.$$

A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx} = \frac{2}{x^2}, \quad f''_{xy} = -\sin y, \quad f''_{yx} = -\sin y, \quad f''_{yy} = -x \cos y + \frac{1}{y^2}.$$

MEGJEGYZÉS. A fenti példában a megfelelő vegyes parciális deriváltak megegyeznek. A parciális deriváltak folytonossága garantálja ezt a tulajdonságot. $\boxtimes$

3. Feladat. Adjuk meg az $f(x, y) = 3x^2 y - \sqrt{x - y^2}$ függvény gradiens vektorát és totális differenciálját általánosan és a $P(2, -1)$ pontban.

Megoldás. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x = 6xy - \frac{1}{2}(x - y^2)^{-1/2} = 6xy - \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}},$$

$$f'_y = 3x^2 - \frac{1}{2}(x - y^2)^{-1/2} \cdot (-2y) = 3x^2 + \frac{y}{\sqrt{x - y^2}}.$$

Ezek alapján a gradiens vektor általánosan

$$\nabla f(x, y) = \left(6xy - \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}}, 3x^2 + \frac{y}{\sqrt{x - y^2}} \right),$$

a $P(2, -1)$ pontban

$$\nabla f(2, -1) = \left(-\frac{25}{2}, 11 \right).$$

Az

$$f'_x = 6xy - \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}} \quad \text{és} \quad f'_y = 3x^2 + \frac{y}{\sqrt{x - y^2}}$$

parciális deriváltak folytonosak, ezért

$$df(x, y) = \left(6xy - \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}} \right) dx + \left(3x^2 + \frac{y}{\sqrt{x - y^2}} \right) dy$$

és

$$df(2, -1) = -\frac{25}{2}dx + 11dy.$$

4. Feladat. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x, y) = \sqrt{x(1-y)}$ függvény $P(2, -3)$ pontbeli, $\underline{u}(1, 4)$ irányban vett deriváltját.

Megoldás.

- A derivált definíció szerint.

Az $\underline{u}$ hossza $|\underline{u}| = \sqrt{17}$ és

$$\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = \left(\frac{u_1}{|\underline{u}|}, \frac{u_2}{|\underline{u}|} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}} \right).$$

Továbbá

$$\begin{aligned} f\left(2 + \frac{1}{\sqrt{17}}t, -3 + \frac{4}{\sqrt{17}}t\right) &= \sqrt{\left(2 + \frac{t}{\sqrt{17}}\right)\left(1 - \left(-3 + \frac{4t}{\sqrt{17}}\right)\right)} \\ &= \sqrt{8 - \frac{4t}{\sqrt{17}} - \frac{4t^2}{17}} \end{aligned}$$

és $f(2, -3) = \sqrt{8}$ alapján

$$\begin{aligned} f'_{\underline{u}}(2, -3) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(2 + \frac{1}{\sqrt{17}}t, -3 + \frac{4}{\sqrt{17}}t\right) - f(2, -3)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{8 - \frac{4t}{\sqrt{17}} - \frac{4t^2}{17}} - \sqrt{8}}{t} \cdot \frac{\sqrt{8 - \frac{4t}{\sqrt{17}} - \frac{4t^2}{17}} + \sqrt{8}}{\sqrt{8 - \frac{4t}{\sqrt{17}} - \frac{4t^2}{17}} + \sqrt{8}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{8 - \frac{4t}{\sqrt{17}} - \frac{4t^2}{17} - 8}{t\left(\sqrt{8 - \frac{4t}{\sqrt{17}} - \frac{4t^2}{17}} + \sqrt{8}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{4t}{17}}{\sqrt{8 - \frac{4t}{\sqrt{17}} - \frac{4t^2}{17}} + \sqrt{8}} \\ &= \frac{-\frac{4}{\sqrt{17}}}{2\sqrt{8}} = -\frac{2}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{34}}. \end{aligned}$$

- A derivált formálisan:

$$f'_x = \frac{1}{2}(x(1-y))^{-1/2}(1-y) = \frac{1-y}{2\sqrt{x(1-y)}}, \quad f'_x(2, -3) = \frac{4}{2\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}};$$

$$f'_y = \frac{1}{2}(x(1-y))^{-1/2}(-x) = -\frac{x}{2\sqrt{x(1-y)}}, \quad f'_y(2, -3) = -\frac{2}{2\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} f'_{\underline{u}}(2, -3) &= \nabla f(2, -3) \circ \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}} \right) \circ \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{8}} \right) \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Lokális szélsőérték

Legyen az f függvény differenciálható. Az

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása adja a függvény kritikus pontjait. A

$$\Delta_1 := f''_{xx} \quad \text{és} \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx}f''_{yy} - f''_{xy}f''_{yx}$$

jelölésekkel, amennyiben az adott kritikus pontban

$$\begin{aligned} \Delta_2 > 0, \quad &\text{akkor ott van szélsőérték, mégpedig} \\ &\Delta_1 > 0 \text{ esetén minimum,} \\ &\Delta_1 < 0 \text{ esetén maximum,} \\ \Delta_2 < 0, \quad &\text{akkor ott nincs szélsőérték,} \\ \Delta_2 = 0, \quad &\text{akkor ott lehet szélsőérték,} \\ &\text{további vizsgálat szükséges.} \end{aligned}$$

5. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ függvény lokális szélsőértékeit.

Megoldás. A függvény differenciálható és a parciális deriváltak

$$f'_x = 4x^3 - 2x - 2y \quad \text{és} \quad f'_y = 4y^3 - 2x - 2y.$$

Így a

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert megoldását keressük. A két egyenletet egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$4x^3 - 4y^3 = 0, \quad \text{azaz } x = y.$$

Ezt visszahelyettesítve például az első egyenletbe

$$\begin{aligned} 4y^3 - 4y &= 0 \\ 4y(y^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

adódik, ahonnan $y = 0$, $y = \pm 1$. Tehát három kritikus pont van:

$$M_0(0, 0), \quad M_1(1, 1), \quad M_2(-1, -1).$$

A függvénynek csak ezen pontokban lehet szélsőértéke. Továbbá

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = -2 \quad \text{és} \quad f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

alapján

$$\Delta_2 = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 4.$$

- Az M_1 és az M_2 pontban

$$\Delta_2(1, 1) = \Delta_2(-1, -1) = 10 \cdot 10 - 4 > 0$$

miatt a függvénynek szélsőértéke van. Mégpedig

$$\Delta_1(1, 1) = \Delta_1(-1, -1) = 10 > 0$$

alapján mindkét pontban minimuma van; a minimum értékek megegyeznek, ugyanis

$$f(1, 1) = f(-1, -1) = -2.$$

- Az M_0 pontban $\Delta_2(0, 0) = 0$, így további vizsgálat szükséges. Ebben a pontban a függvény értéke $f(0, 0) = 0$. Nézzük a függvény viselkedését a pont környezetében különböző irányok mentén.

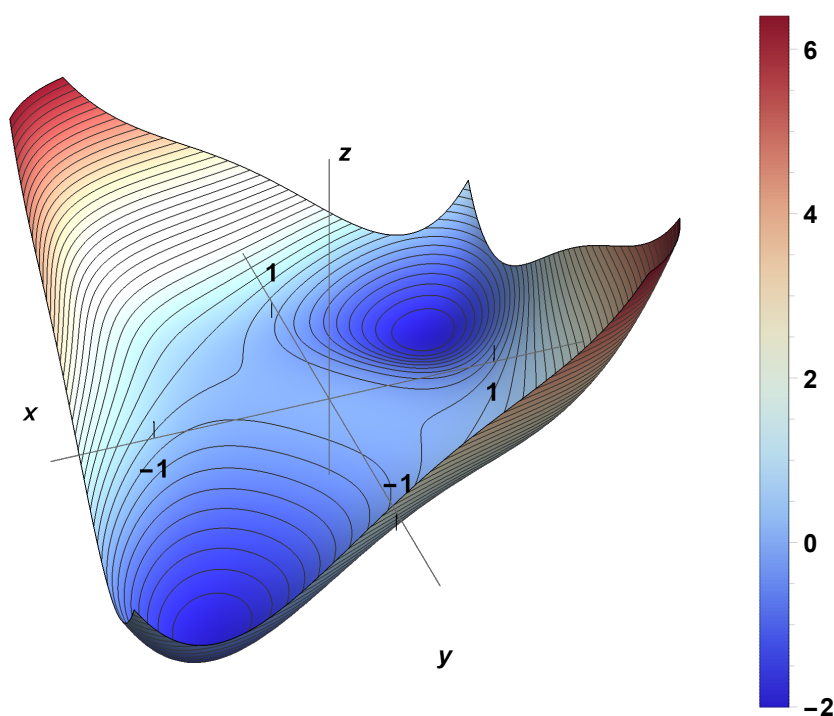
- Az x -tengelyen $0 < |x| < 1$ esetén

$$f(x, 0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) < 0 = f(0, 0);$$

- az $y = -x$ egyenesen, ha $x \neq 0$, akkor

$$f(x, -x) = 2x^4 > 0 = f(0, 0).$$

Azaz az origó tetszőleges környezetében az f függvény felvesz $f(0, 0)$ -nál kisebb és nagyobb értéket is. Ezért a függvénynek az M_0 pontban nincs szélsőértéke.



A fenti ábra a függvény 3D-s grafikonját mutatja szintvonalakkal és magasság szerinti színezéssel.

6. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ függvény lokális szélsőértékeit.

Megoldás. A parciális deriváltak

$$f'_x = (1 + e^y)(-\sin x) \quad \text{és} \quad f'_y = e^y \cos x - (1 \cdot e^y + ye^y).$$

Így a

$$\begin{cases} -(1 + e^y) \sin x &= 0 \\ e^y(\cos x - 1 - y) &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldását keressük. Az exponenciális kifejezés pozitivitása miatt elegendő a

$$\begin{cases} \sin x &= 0 \\ \cos x - 1 - y &= 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert megoldani. A $\sin x = 0$ egyenletből kapjuk, hogy $x = l\pi$, ahol $l \in \mathbb{Z}$. Ezen pontokban a koszinusz függvény vagy az 1 vagy a -1 értéket veszi fel attól függően, hogy l páros vagy páratlan. Így a második egyenletben

- ha $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor
 - ha $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor pedig
- $$\begin{array}{ll} \cos(2k\pi) - 1 - y = 0 & \cos((2k + 1)\pi) - 1 - y = 0 \\ 1 - 1 - y = 0 & -1 - 1 - y = 0 \\ y = 0, & y = -2. \end{array}$$

Ezek alapján végtelen sok kritikus pontunk van:

$$M_{2k}(2k\pi, 0), \quad \text{illetve} \quad M_{2k+1}((2k + 1)\pi, -2), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Továbbá

$$f''_{xx} = -(1 + e^y) \cos x, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = -e^y \sin x \quad \text{és} \quad f''_{yy} = e^y(\cos x - 2 - y)$$

alapján

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (-(1 + e^y) \cos x) \cdot e^y(\cos x - 2 - y) - (-e^y \sin x)^2 \\ \Delta_1 &= -(1 + e^y) \cos x. \end{aligned}$$

- Az M_{2k} pontokban, $\cos(2k\pi) = 1$, $\sin(2k\pi) = 0$, és $e^0 = 1$ miatt

$$\Delta_2(2k\pi, 0) = -2 \cdot (-1) - 0 = 2 > 0 \quad \text{bármely } k \in \mathbb{Z} \text{ esetén.}$$

Így ezekben a pontokban a függvénynek szélsőértéke van, mégpedig

$$\Delta_1(2k\pi, 0) = -2 < 0$$

alapján maximuma van; a maximum érték

$$f(2k\pi, 0) = 2 \quad \text{bármely } k \in \mathbb{Z} \text{ esetén.}$$

- Az M_{2k+1} pontokban, $\cos((2k + 1)\pi) = -1$ és $\sin((2k + 1)\pi) = 0$ alapján

$$\Delta_2 = -e^{-2}(1 + e^{-2}) < 0.$$

Ezért ezekben a pontokban nincs szélsőérték.

Azaz a függvénynek végtelen sok maximum helye van, de egyetlen minimumhelye sincs.

Videók

Derivált

Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az alábbi függvények adott pontban vett parciális deriváltjait.

1. Feladat. $f(x, y) = x^2 + 3xy$, $f'_x(-1, 2)$

Megoldás. $f'_x(-1, 2) = 4$



2. Feladat. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - 3xy}$, $f'_y(-2, 1)$

Megoldás. $f'_y(-2, 1) = \frac{4}{\sqrt{7}}$



3. Feladat. $f(x, y) = 2xy + 3\sqrt{y}$, $f'_x(1, 2)$, $f'_y(0, 3)$

Megoldás. $f'_x(1, 2) = 4$, $f'_y(0, 3) = \frac{3}{2\sqrt{3}}$



4. Feladat. $f(x, y) = \sqrt{xy + 2y}$, $f'_x(2, 1)$, $f''_{xx}(0, 1)$

Megoldás. $f'_x(2, 1) = \frac{1}{4}$, $f''_{xx}(0, 1) = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$



5. Feladat. Az $f(x, y) = \frac{x^2y - 3y}{y + 2}$ függvény esetén adjuk meg az $f'_x(-1, 2)$, $f'_y(2, 3)$, $\nabla f(2, 3)$, $df(2, 3)$ kifejezéseket.

Megoldás.



$$f'_x(-1, 2) = -1, \quad f'_y(2, 3) = \frac{2}{25}, \quad \nabla f(2, 3) = \left(\frac{12}{5}, \frac{2}{25} \right), \quad df(2, 3) = \frac{12}{5}dx + \frac{2}{25}dy$$

6. Feladat. Az $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + \ln(y^2 - 1)$, függvény esetén adjuk meg az f'_x , f''_{xx} , f'_y , f''_{yy} , f''_{xy} függvényeket, továbbá a $\nabla f(1, 2)$, $df(0, 2)$ értékeket.

Megoldás.



$$f'_x = 6x^2 - 6xy$$

$$f''_{xx} = 12x - 6y$$

$$f'_y = -3x^2 + \frac{2y}{y^2 - 1}$$

$$f''_{yy} = \frac{2(y^2 - 1) - 2y \cdot 2y}{(y^2 - 1)^2}$$

$$f''_{xy} = -6x$$

$$df(0, 2) = 0dx + \frac{4}{3}dy,$$

$$\nabla f(1, 2) = \left(-6, -3 + \frac{4}{3}\right)$$

7. Feladat. Az $f(x, y) = xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ függvény esetén határozzuk meg az f'_x , f''_{xx} , f'_y , f''_{yy} , f''_{xy} parciális deriváltfüggvényeket.

Megoldás.



$$f'_x = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(y - x^2y)$$

$$f''_{xx} = xy(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f'_y = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(x - y^2x)$$

$$f''_{yy} = xy(y^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{xy} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1)$$

Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az alábbi függvények P pontbeli, $\underline{u}$ irány szerinti deriváltját.

8. Feladat. $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y}$, $P(-1, 2)$, $\underline{u} = (4, -3)$

Megoldás. $f'_{\underline{u}}(-1, 2) = -\frac{1}{20}$



9. Feladat. $f(x, y) = x\sqrt{y^2 - 1}$, $P(3, -2)$, $\underline{u} = (-1, 2)$

Megoldás. $f'_{\underline{u}}(3, -2) = -\sqrt{15}$



10. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = \frac{x^2\sqrt{y^2 - 3x}}{2x - y}$ függvénynek a $P = (2, 3)$ pontbeli, $\underline{u} = (4, -1)$ irány szerinti deriváltját.

Megoldás. $f'_{\underline{u}}(2, 3) = -\frac{32\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$



Lokális szélsőérték

Határozzuk meg a következő függvények lokális szélsőérték helyeit.

11. Feladat. $f(x, y) = x^2 - 2x - y^2 + 4y$

Megoldás. Nincs szélsőérték.



12. Feladat. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

Megoldás. Minimum hely: $(1, 1)$



13. Feladat. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

Megoldás. Minimum helyek: $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$



14. Feladat. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x^2 - 8y^2$

Megoldás. Minimum helyek: $x^2 + y^2 = 4$; maximum hely: $(0, 0)$



15. Feladat. $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

Megoldás.

Minimum helyek: $(1, -1), (-1, 1)$; maximum helyek: $(1, 1), (-1, -1)$



Kvízek

A csoport

1. Feladat. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x, y) = \sqrt{2x - 3y}$ függvény y változó szerinti parciális deriváltját a $P(2, 1)$ pontban.

2. Feladat. Adjuk meg az $f(x, y) = e^{-xy} \ln(2x^2 - 3y + 2)$ függvény gradiens vektorát általánosan, illetve a $(-1, 0)$ pontban.

B csoport

Feladat. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x, y) = \frac{3x - 2}{x + y + 1}$ függvény $P(1, -3)$ pontbeli, $\underline{u}(-3, 4)$ irányban vett deriváltját. Adjuk meg a függvény totális differenciálját is a $P(1, -3)$ pontban.

C csoport

Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = xy^2 + x^2y - y^2$ függvény helyi szélsőértékeit.

Kvízek megoldása

A csoport

1. Feladat megoldása.

- A definíció szerinti parciális derivált:

$$f(2, 1+h) = \sqrt{4-3(1+h)} = \sqrt{1-3h}, \quad f(2, 1) = \sqrt{4-3} = 1$$

alapján

$$\begin{aligned} f'_y(2, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2, 1+h) - f(2, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3h} - 1}{h} \cdot \frac{\sqrt{1-3h} + 1}{\sqrt{1-3h} + 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-3h-1}{h(\sqrt{1-3h}+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{\sqrt{1-3h}+1} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

1 pt

- Formálisan:

$$f'_y = \frac{1}{2}(2x-3y)^{-1/2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2\sqrt{2x-3y}}, \quad f'_y(2, 1) = -\frac{3}{2\sqrt{4-3}} = -\frac{3}{2}.$$

2. Feladat megoldása.

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= e^{-xy} \cdot (-y) \cdot \ln(2x^2 - 3y + 2) + e^{-xy} \cdot \frac{1}{2x^2 - 3y + 2} \cdot 4x \\ f'_x(-1, 0) &= 0 + 1 \cdot \frac{1}{2+2} \cdot (-4) = -1, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} f'_y(x, y) &= e^{-xy} \cdot (-x) \cdot \ln(2x^2 - 3y + 2) + e^{-xy} \cdot \frac{1}{2x^2 - 3y + 2} \cdot (-3) \\ f'_y(-1, 0) &= 1 \cdot 1 \cdot \ln(2+2) + 1 \cdot \frac{1}{2+2} \cdot (-3) = \ln 4 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2 pt

A gradiens vektor

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) \\ &= \left(-ye^{-xy} \ln(2x^2 - 3y + 2) + \frac{4xe^{-xy}}{2x^2 - 3y + 2}, -xe^{-xy} \ln(2x^2 - 3y + 2) - \frac{3e^{-xy}}{2x^2 - 3y + 2} \right), \end{aligned}$$

és

$$\nabla f(-1, 0) = \left(-1, \ln 4 - \frac{3}{4} \right).$$

3 pt

B csoport

Feladat megoldása. Az $\underline{u}$ vektor hossza $|\underline{u}| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Így az iránymenti derivált

- definíció szerint:

$$\begin{aligned} f'_{\underline{u}}(1, -3) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(1 + \frac{-3}{5}t, -3 + \frac{4}{5}t\right) - f(1, -3)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3\left(1 + \frac{-3}{5}t\right) - 2}{\left(1 + \frac{-3}{5}t\right) + \left(-3 + \frac{4}{5}t\right) + 1} - \frac{3-2}{1-3+1}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1-\frac{9}{5}t}{\frac{1}{5}t-1} + 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1-\frac{9}{5}t + \frac{1}{5}t - 1}{\frac{1}{5}t-1}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{8}{5}t}{t\left(\frac{1}{5}t - 1\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{8}{5}}{\frac{1}{5}t - 1} = \frac{8}{5}; \end{aligned}$$

1 pt

- formálisan:

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{3(x+y+1) - (3x-2)}{(x+y+1)^2} = \frac{3y+5}{(x+y+1)^2}, & f'_x(1, -3) &= -4; \\ f'_y &= -\frac{3x-2}{(x+y+1)^2}, & f'_y(1, -3) &= -1 \end{aligned}$$

alapján

2 pt

$$\begin{aligned} f'_{\underline{u}}(1, -3) &= \nabla f(1, -3) \circ \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = (-4, -1) \circ \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{12}{5} + \frac{-4}{5} = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

- A totális differenciál, mivel f'_x és f'_y folytonos az értelmezési tartományán,

$$df(1, -3) = f'_x(1, -3)dx + f'_y(1, -3)dy = -4dx - 1dy.$$

3 pt

C csoport

Feladat megoldása. A parciális deriváltak: $f'_x = y^2 + 2xy$ és $f'_y = 2xy + x^2 - 2y$. Így

$$\begin{cases} y^2 + 2xy = 0 \\ 2xy + x^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

szerint az első egyenletből

$$\begin{aligned} y(y + 2x) &= 0 \\ y &= 0, \quad y = -2x. \end{aligned}$$

A második egyenletbe visszahelyettesítve

ha $y = 0$, akkor

$$0 + x^2 + 0 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0.$$

ha $y = -2x$, akkor

$$2x(-2x) + x^2 - 2(-2x) = 0$$

$$-4x^2 + x^2 + 4x = 0$$

$$x(-3x + 4) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 4/3.$$

1 pt

Tehát a kritikus pontok: $M_0(0, 0)$, $M_1\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$. Továbbá

$$f''_{xx} = 2y, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 2y + 2x \quad \text{és} \quad f''_{yy} = 2x - 2,$$

így

$$\Delta_2 = 2y(2x - 2) - (2y + 2x)^2.$$

2 pt

- Az M_1 pontban

$$\Delta_2\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right) = -\frac{16}{3}\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{16}{3} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 < 0,$$

miatt a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

- Az M_0 pontban $\Delta_2(0, 0) = 0$. Ha $y = x^2$, akkor

$$f(x, x^2) = x \cdot x^4 + x^2 \cdot x^2 - x^4 = x^5,$$

amely függvény az origó tetszőleges környezetében felvesz pozitív és negatív értéket, azaz felvesz $f(0, 0) = 0$ -nál kisebb és nagyobb értéket is. Így ebben a pontban sincs szélsőérték.

3 pt

11.

Feltételes szélsőérték

Házi feladatok

Görbe mentén

1. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 - y^2 + 4$ függvény $x + 2y = 0$ feltétel melletti lokális szélsőérték helyeit.

Megoldás. Az $x + 2y = 0$ feltételből $x = -2y$ adódik, ezt a függvénybe helyettesítve az

$$\begin{aligned} f(-2y, y) &= (-2y)^4 - 2(-2y)^2y^2 - y^2 + 4 \\ &= 8y^4 - y^2 + 4 = g(y), \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

egyváltozós függvény szélsőértékeit keressük.

$$g'(y) = 32y^3 - 2y = 2y(16y^2 - 1)$$

miatt a kritikus pontok $y = 0, \pm 1/4$.

Továbbá

$$g''(y) = 96y^2 - 2,$$

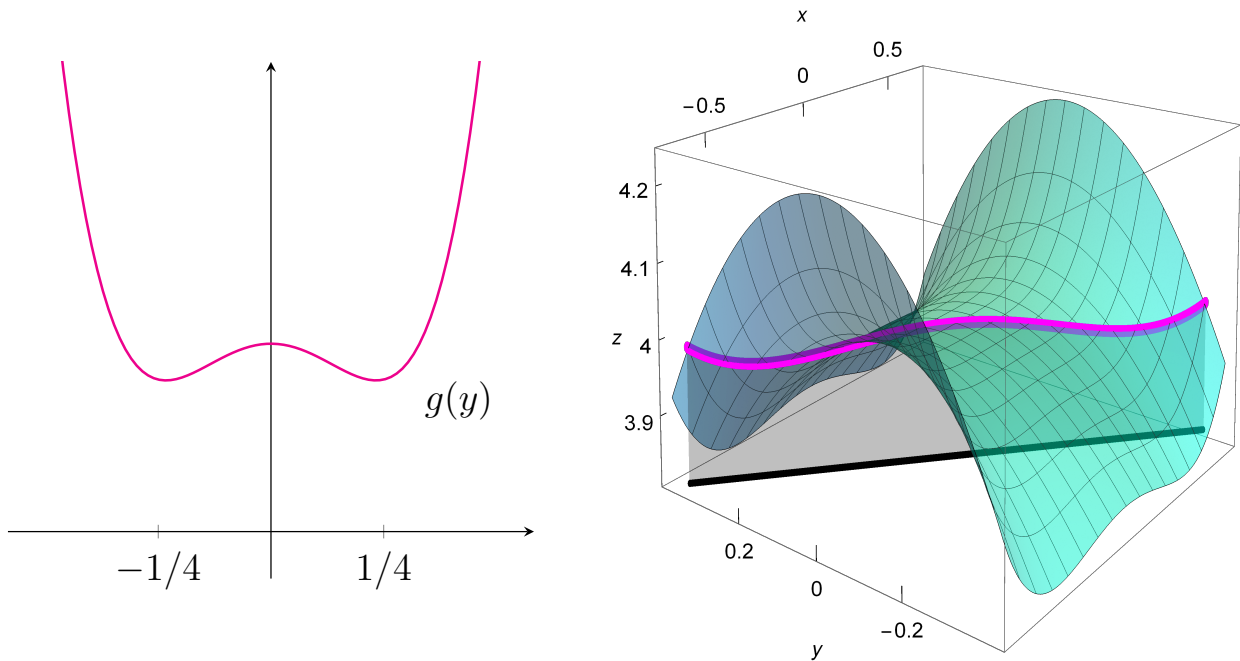
ezért

$$g''(0) = -2 < 0$$

$$g''(\pm 1/4) = 96 \cdot \frac{1}{16} - 2 = 4 > 0$$

miatt $g(y)$ -nak az $y = 0$ pontban maximuma, az $y = \pm 1/4$ pontokban minimuma van.

Tehát az f függvénynek az adott $x = -2y$ feltétel mellett az $M_1(0, 0)$ pontban helyi maximuma, az $M_2(-1/2, 1/4)$, $M_3(1/2, -1/4)$ pontokban helyi minimuma van.



A bal oldali ábrán a feltétel melletti $g(y)$ függvény sematikus képe látható. Jobb oldalon az $f(x, y)$ függvény térbeli ábráját láthatjuk az alapsíkon lévő $x + 2y = 0$ feltétellel (fekete egyenes), és az általa meghatározott **síkmetszettel** együtt.

2. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x - y$ függvény $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$ feltétel melletti lokális szélsőérték helyeit.

Megoldás. Ebben az esetben a feltételből az egyik változót kifejezni sokkal nehezebb, mint az előző feladatban volt. Ezért a Lagrange-függvény segítségével oldjuk meg a feladatot. A feltételt 0-ra rendezve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} = 0,$$

majd képezzük a

$$F(x, y, \lambda) := x - y + \lambda \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} \right)$$

Lagrange-függvényt. Ekkor

$$F'_x = 1 - \frac{2\lambda}{x^3}, \quad F'_y = -1 - \frac{2\lambda}{y^3}, \quad F'_\lambda = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2},$$

így az

$$\begin{cases} 1 - \frac{2\lambda}{x^3} = 0 \\ -1 - \frac{2\lambda}{y^3} = 0 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az első két egyenletet összeadva egyszerű számolással adódik, hogy

$$y = -x.$$

Ezt a harmadik egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(-x)^2} - \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{2}{x^2} &= \frac{1}{2} \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2\end{aligned}$$

és ekkor az egyenletrendszer megoldásai

$$x_1 = 2, y_1 = -2, \lambda_1 = 4 \quad \text{illetve} \quad x_2 = -2, y_2 = 2, \lambda_2 = -4.$$

Tehát a kritikus pontok $\lambda_1 = 4$ esetben $M_1(2, -2)$ és $\lambda_2 = -4$ esetben $M_2(-2, 2)$. Ezután a lokális szélsőérték meghatározásakor tanultakat alkalmazzuk az F függvényre. A

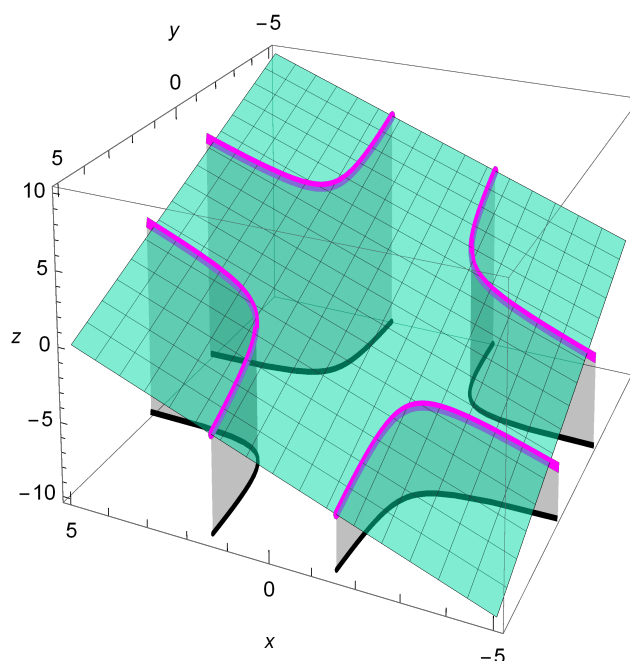
$$F''_{xx} = \frac{6\lambda}{x^4}, \quad F''_{xy} = F''_{yx} = 0, \quad F''_{yy} = \frac{6\lambda}{y^4}$$

parciális deriváltak alapján

$$\Delta_2 F = \frac{6\lambda}{x^4} \cdot \frac{6\lambda}{y^4} - 0^2 = \frac{36\lambda^2}{x^4 y^4} \quad \text{és} \quad \Delta_1 F = \frac{6\lambda}{x^4}.$$

- A $\lambda_1 = 4$ esetben, az $M_1(2, -2)$ pontban $\Delta_2 F = 9/4 > 0$, ezért itt van szélsőérték, és $\Delta_1 F = 3/2 > 0$ és miatt itt helyi minimum van.
- A $\lambda_2 = -4$ esetben, az $M_2(-2, 2)$ pontban $\Delta_2 F = 9/4 > 0$, ezért van szélsőérték, $\Delta_1 F = -3/2 < 0$ miatt itt helyi maximum van.

Az ábrán az $f(x, y)$ függvény 3-dimenziós képe látható, amin jól beazonosítható a lokális maximum és minimumhely.



Korlátos, zárt halmazon

3. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 - 3x$ függvény globális szélsőértékeit a $(-1, 2)$, $(2, -1)$ pontokat összekötő szakaszon.

Megoldás. A $(-1, 2)$, $(2, -1)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete

$$y = 1 - x.$$

Így az

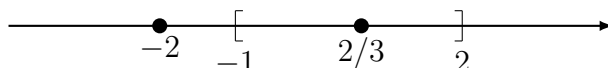
$$\begin{aligned} f(x, 1-x) &= 2x^3 - x(1-x)^2 - 3x \\ &= x^3 + 2x^2 - 4x = g(x) \end{aligned}$$

egyváltozós differenciálható függvény szélsőértékeit keressük a $[-1, 2]$ zárt intervallumon.

Ezeket g az intervallum végpontjaiban, vagy az intervallumon belül található kritikus pontokban (ahol $g' = 0$) veszi fel.

$$g'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

miatt a kritikus pontok $x = 2/3$, $x = -2$. Az $x = -2$ nem belső pontja a $[-1, 2]$ intervallumnak.



Ezért

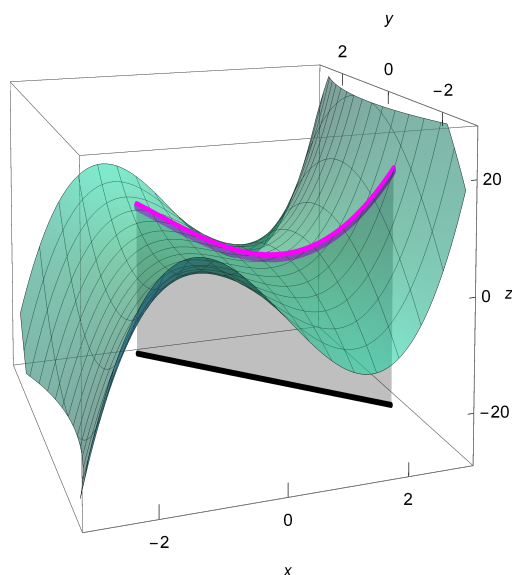
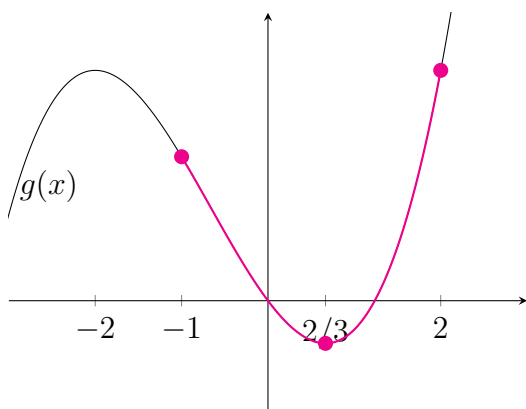
$$f(-1, 2) = g(-1) = -1 + 2 + 4 = 5$$

$$f(2/3, 1/3) = g(2/3) = \frac{8}{27} + \frac{8}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{40}{27}$$

$$f(2, -1) = g(2) = 8 + 8 - 8 = 8$$

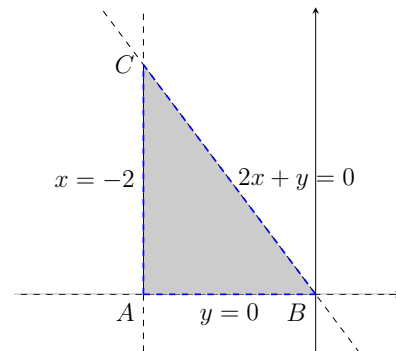
alapján az $f(x, y)$ függvény a korlátos, zárt halmazon

- a minimumát a $(2/3, 1/3)$ pontban veszi fel és a minimum érték $-\frac{40}{27}$;
- a maximum hely a $(2, -1)$ pont és a maximum érték 8.



4. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y$ függvény globális szélsőértékeit az $y = 0$, $x = -2$ és az $2x + y = 0$ egyenletű egyenesek által határolt korlátos, zárt síklemezen.

Megoldás. Az egyenesek által meghatározott síkrész az $A(-2, 0)$, $B(0, 0)$ és $C(-2, 4)$ csúcspontú derékszögű háromszög, ami egy korlátos, zárt halmaz. Így szélsőérték a halmaz belsejében található kritikus pontokban, ahol $f'_x = 0$ és $f'_y = 0$, vagy a határán adódik.

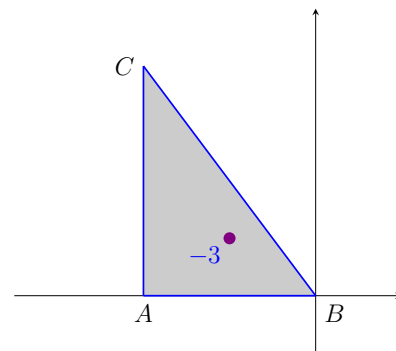


A parciális deriváltak $f'_x = 2x - y + 3$ és $f'_y = 2y - x - 3$. A

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 2y - x - 3 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, $M_1(-1, 1)$, ami a háromszög belsejében van és itt

$$f(-1, 1) = -3.$$



A kerület három szakaszból áll.

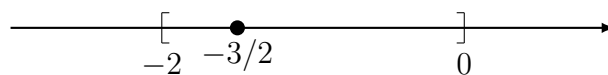
- Az AB oldalon $-2 \leq x \leq 0$ és $y = 0$, ezért az

$$f(x, 0) = x^2 + 3x = g_1(x)$$

egyváltozós függvény szélsőértékeit keressük a $[-2, 0]$ zárt intervallumon. Az előző feladatban látott módon,

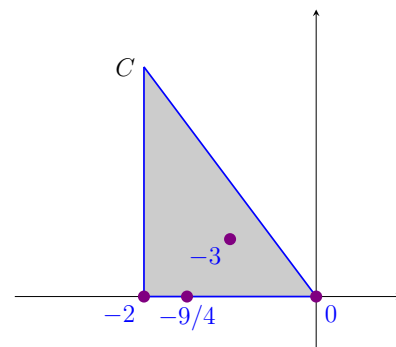
$$g'_1(x) = 2x + 3$$

alapján a kritikus pont $x = -3/2$, amely belső pontja a $[-2, 0]$ intervallumnak.



Így ebben a pontban, valamint a végpontokban, az A és a B pontban számoljuk ki a függvényértékeket:

$$\begin{aligned} f(-2, 0) &= g_1(-2) = 4 - 6 = -2 \\ f\left(-\frac{3}{2}, 0\right) &= g_1\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \\ f(0, 0) &= g_1(0) = 0. \end{aligned}$$



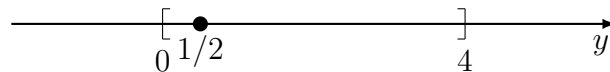
- Az AC oldalon $x = -2$ és $0 \leq y \leq 4$, ezért az

$$\begin{aligned} f(-2, y) &= 4 + y^2 + 2y - 6 - 3y \\ &= y^2 - y - 2 = g_2(y) \end{aligned}$$

egyváltozós függvény szélsőértékeit keressük a $[0, 4]$ zárt intervallumon. Hasonlóan, mint az előbbi pontban,

$$g_2'(y) = 2y - 1$$

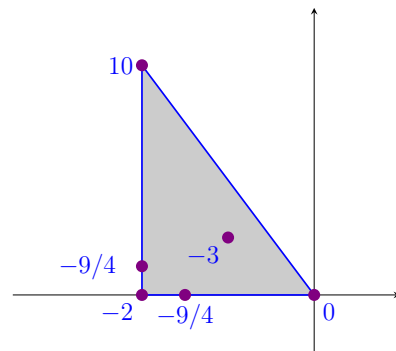
alapján a kritikus pont $y = 1/2$, ami belső pontja a $[0, 4]$ intervallumnak.



Így a következő értékeket számoljuk

$$\begin{aligned} f(-2, 0) &= g_2(0) = -2 \\ f(-2, 1/2) &= g_2(1/2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -9/4 \\ f(-2, 4) &= g_2(4) = 16 - 4 - 2 = 10. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az $A(-2, 0)$ pontbeli értéket ismételten kiszámoltuk.



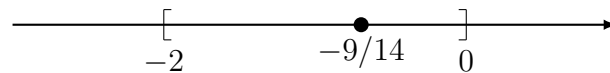
- A BC oldalon az $y = -2x$ és $-2 \leq x \leq 0$ feltétel alapján az

$$\begin{aligned} f(x, -2x) &= x^2 + (-2x)^2 - x(-2x) + 3x - 3(-2x) \\ &= 7x^2 + 9x = g_3(x) \end{aligned}$$

egyváltozós függvény szélsőértékeit keressük a $[-2, 0]$ zárt intervallumon. A

$$g_3'(x) = 14x + 9$$

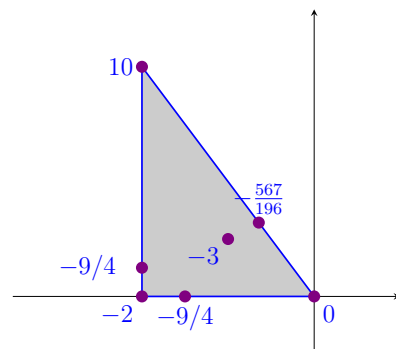
derivált miatt a kritikus pont $x = -9/14$ és ez belső pontja a $[-2, 0]$ intervallumnak.



Ekkor

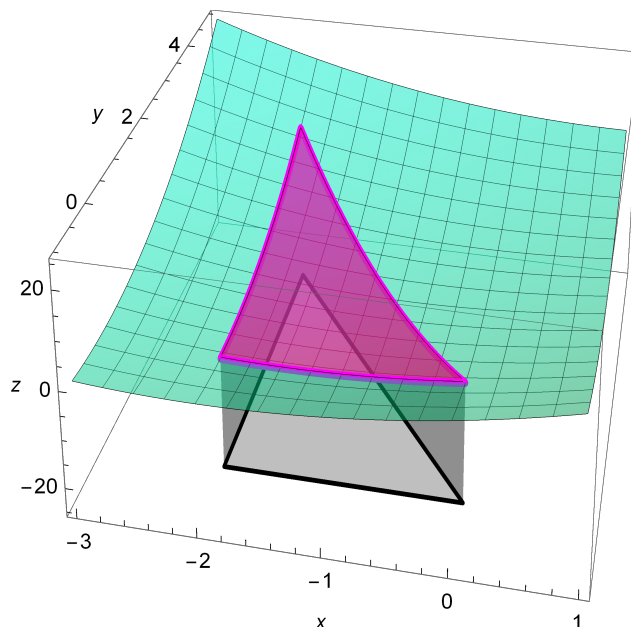
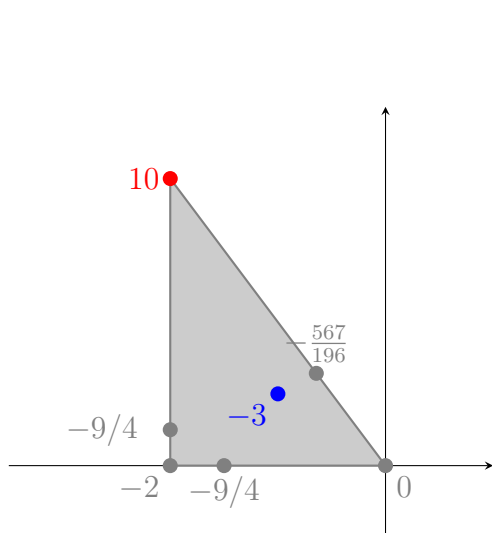
$$\begin{aligned} f(-2, 4) &= g_3(-2) = 28 - 18 = 10 \\ f(-9/14, 9/7) &= g_3(-9/14) \\ &= 7 \cdot \frac{81}{196} - \frac{81}{14} = -\frac{567}{196} > -3 \\ f(0, 0) &= g_3(0) = 0. \end{aligned}$$

Az első és a harmadik értéket már ismertük.



A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a függvény a zárt háromszögön

- a minimumát a síkidom belsejében, a $(-1, 1)$ pontban veszi fel és a **minimum** érték -3 ,
- a maximum hely a háromszög $C(-2, 4)$ csúcspontja és a **maximum** érték 10 .



5. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ függvény globális szélsőértékeit az $x^2 + y^2 \leq 25$ körlapon.

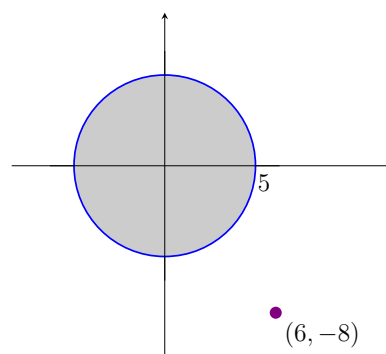
Megoldás. Szélsőérték a körlap belsejében található kritikus pontokban vagy a körvonalon adódik.

A parciális deriváltak $f'_x = 2x - 12$ és $f'_y = 2y + 16$. A

$$\begin{cases} 2x - 12 = 0 \\ 2y + 16 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer egyetlen megoldása

$M_1(6, -8)$, amely nincs a körlap belsejében.



Ezért a szélsőértékek a kerületen adódnak. Ezeket most a Lagrange-függvény segítségével határozzuk meg. Tehát

$$F(x, y, \lambda) := x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25),$$

így

$$F'_x = 2x - 12 - 2\lambda x, \quad F'_y = 2y + 16 + 2\lambda y, \quad F'_\lambda = x^2 + y^2 - 25$$

alapján az

$$\begin{cases} 2x - 12 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 16 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az első egyenletből $x = \frac{6}{\lambda + 1}$, a másodikból $y = \frac{-8}{\lambda + 1}$ adódik, ezeket visszaírva a harmadikba kapjuk, hogy

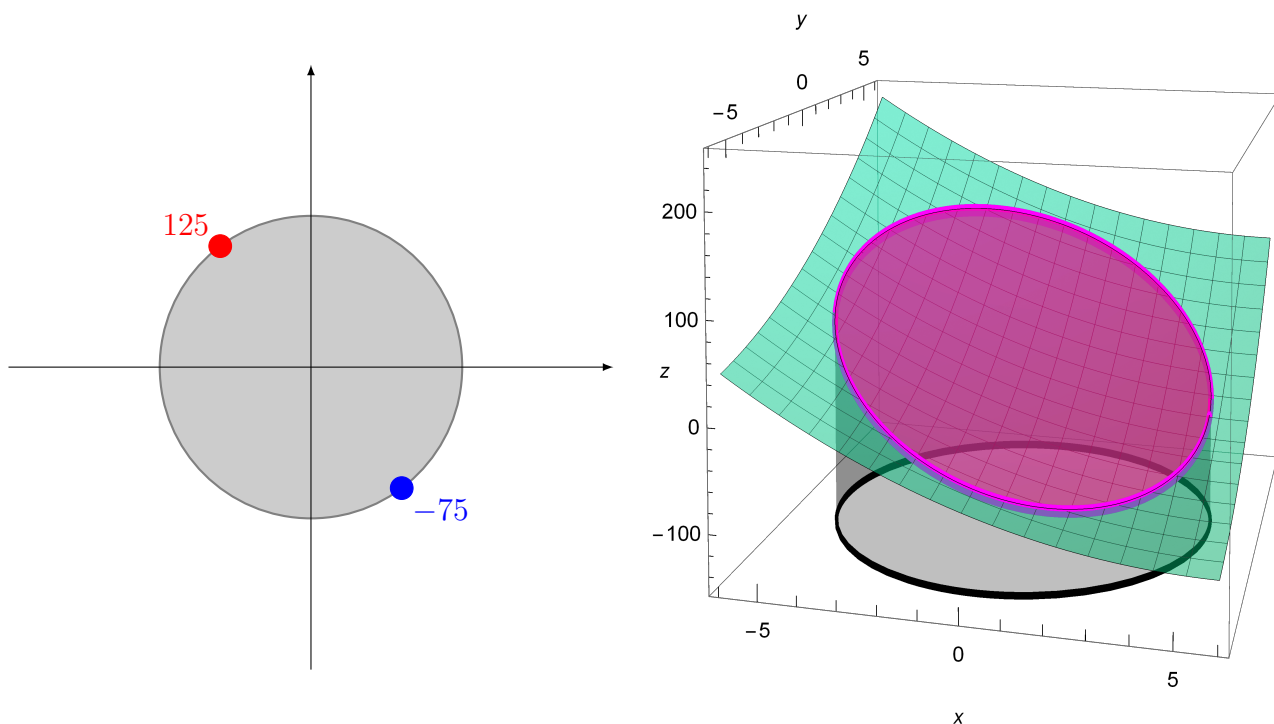
$$\begin{aligned}\frac{36}{(\lambda + 1)^2} + \frac{64}{(\lambda + 1)^2} &= 25 \\ \frac{100}{25} &= (\lambda + 1)^2 \\ 4 &= (\lambda + 1)^2 \\ \pm 2 &= \lambda + 1.\end{aligned}$$

Azaz $\lambda_1 = 1$ és ekkor $x_1 = 3$, $y_1 = -4$, valamint $\lambda_2 = -3$ és ekkor $x_2 = -3$, $y_2 = 4$. Tehát a kritikus pontok $M_1(3, -4)$ és $M_2(-3, 4)$.

$$f(3, -4) = 9 + 16 - 36 - 64 = -75$$

$$f(-3, 4) = 9 + 16 + 36 + 64 = 125$$

miatt M_1 a minimum hely, a **minimum** érték -75 , a maximum hely M_2 , a **maximum** érték 125 .



Videók

Görbe mentén

1. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 - 2x - y^2 + 4y$ függvény feltételes szélsőérték helyeit az

- a) $x = 2$ egyenes, b) a $(2, -3)$ -ból $(2, 3)$ -ba menő szakasz mentén.

Megoldás.



- a) Maximum hely: $(2, 2)$.
b) Minimum hely: $(2, -3)$; maximum hely: $(2, 2)$.

2. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ függvény feltételes szélsőérték helyeit

- a) az $y = x$ egyenes mentén,
b) a $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ pontból a $(2, 2)$ pontba menő szakasz mentén,
c) az origóból induló, az $(1, 1)$ ponton átmenő félegyenes mentén.

Megoldás.



- a) Nincs szélsőérték.
b) Minimum helyek: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $(1, 1)$; maximum hely: $(2, 2)$,
c) Minimum hely: $(1, 1)$.

3. Feladat. Határozzuk meg $f(x, y) = x + 2y$ feltételes szélsőérték helyeit az $y^2 + xy = 1, y > 0$ görbe mentén.

Megoldás. Minimum hely: $(0, 1)$.



4. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 3$ függvény feltételes szélsőérték helyeit az $x^2 + y^2 = 1$ görbe mentén.

Megoldás.



Minimum helyek: $(0, -1)$, $(0, 1)$; maximum helyek: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

5. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 1$ függvény feltételes szélsőérték helyeit az $x^2 + y^2 = 1$ görbe mentén.

Megoldás. Minimum hely: $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; maximum hely: $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.



6. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 4x - y^2 - 2y + 1$ függvény feltételes szélsőérték helyeit az $x^2 = 1 + y^2$ görbe mentén.

Megoldás. Nincs szélsőérték.



7. Feladat. Határozzuk meg $f(x, y) = xy$ feltételes szélsőérték helyeit a $4x^2 + 9y^2 = 8$ görbe mentén.

Megoldás.



Minimum helyek: $\left(1, -\frac{2}{3}\right), \left(-1, \frac{2}{3}\right)$; maximum helyek: $\left(1, \frac{2}{3}\right), \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$.

Korlátos, zárt halmazon

8. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$ függvény globális szélsőérték helyeit a $(-2, 0), (2, 0), (2, 4)$ pontok által meghatározott zárt háromszögon.

Megoldás. Minimum hely: $(1, 0)$; maximum hely: $(-2, 0)$.



9. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ függvény globális szélsőérték helyeit a $(-1, -1), (2, 2), (2, -1), (-1, 2)$ pontok által meghatározott zárt négyzeten.

Megoldás. Minimum hely: $(-1, -1)$; maximum helyek: $(-1, 2), (2, -1)$.



10. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 3$ függvény globális szélsőérték helyeit a $-1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2$ feltételek által meghatározott zárt téglalapon.

Megoldás.



Minimum helyek: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1\right)$; maximum helyek: $(\pm 1, \pm 2), (0, \pm 2)$.

11. Feladat. Adjuk meg $f(x, y) = xy + 2x - \ln x^2 y$ globális szélsőérték helyeit az $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, 3\right), (3, 3)$ pontok által meghatározott zárt háromszögon.

Megoldás. Minimum hely: $\left(\frac{1}{4}, 3\right)$; maximum hely: $(3, 3)$.



12. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 5x - xy$ függvény globális szélsőérték helyeit az $y = 0$, $x = 2$, $y = x^2$ egyenletű görbék által határolt korlátos, zárt síkrészen.

Megoldás. Minimum hely: $(2, 4)$; maximum helyek: $(1, 0)$, $(2, 0)$.



13. Feladat. Határozzuk meg $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^4$ globális szélsőérték helyeit a $4x^2 + y^2 \leq 9$ tartományon.

Megoldás. Minimum helyek: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; maximum helyek: $(0, \pm 3)$.



Kvízek

A csoport

Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$ függvény globális szélsőértékeit a $(-3, 0)$, $(1, -4)$ pontokat összekötő szakaszon.

B csoport

Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4y + 1$ függvény globális szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 4$, $y > 0$ és $y = 0$ görbék által kijelölt zárt félkörlelapon.

C csoport

Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ feltétel melletti globális szélsőértékeit.

Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása. A $(-3, 0)$, $(1, -4)$ pontokon áthaladó egyenes meredeksége

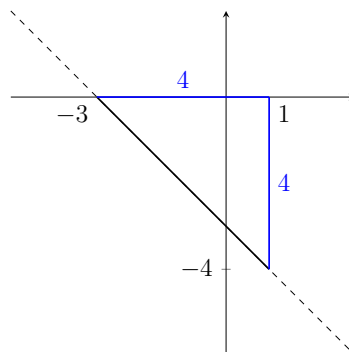
$$m = \frac{-4}{4} = -1.$$

Így $y = -x + b$, ahol a $(-3, 0)$ pont koordinátáit behelyettesítve

$$0 = y = -x + b = -(-3) + b = 3 + b,$$

azaz $b = -3$. Tehát

$$y = -x - 3.$$



Az

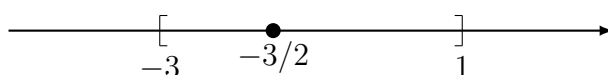
$$\begin{aligned} f(x, -x - 3) &= x^3 + 3x(-x - 3) + (-x - 3)^3 \\ &= x^3 - 3x^2 - 9x - (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) \\ &= -12x^2 - 36x - 27 = g(x) \end{aligned}$$

1 pt

egyváltozós függvény szélsőértékeit keressük a $[-3, 1]$ zárt intervallumon. A derivált

$$g'(x) = -24x - 36,$$

emiatt a kritikus pont $x = -3/2$, ami belső pontja a $[-3, 1]$ intervallumnak.



2 pt

Így $\frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2} = y$ alapján

$$\begin{aligned} f(-3, 0) &= g(-3) = -27 \\ f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= g\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \\ &= -\frac{27}{8} + \frac{27}{4} - \frac{27}{8} = 0 \\ f(1, -4) &= g(1) = 1 - 12 - 27 = -38. \end{aligned}$$

Tehát az $f(x, y)$ függvénynek a feltétel mellett az $(1, -4)$ pontban minimuma, a $(-3/2, -3/2)$ pontban maximuma van, a minimum érték -38 , a maximum érték 0 .

3 pt

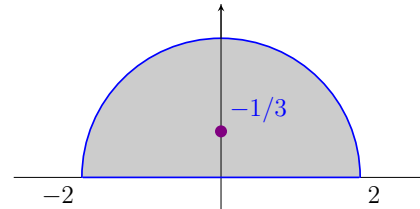
B csoport

Feladat megoldása. Mivel $f'_x = 2x$, $f'_y = 6y - 4$, így

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 6y - 4 = 0, \end{cases} \text{ azaz } x = 0 \text{ és } y = 2/3.$$

Tehát $M_1(0, 2/3)$ az egyetlen kritikus pont. Ez belső pontja a félkörnek és

$$f(0, 2/3) = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{3}{3} = -\frac{1}{3}$$



A kerület két részből áll.

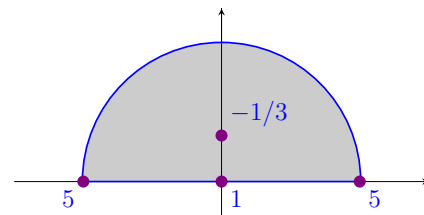
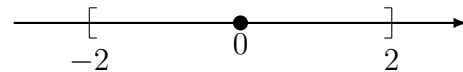
- A vízszintes szakaszon $y = 0$ és $-2 \leq x \leq 2$.

Ezért

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x^2 + 1 = g_1(x) \\ g'_1(x) &= 2x \end{aligned}$$

alapján a kritikus pont $x = 0$, ami belső pontja a $[-2, 2]$ intervallumnak.

$$\begin{aligned} f(-2, 0) &= g_1(-2) = 4 + 1 = 5 \\ f(0, 0) &= g_1(0) = 1 \\ f(2, 0) &= g_1(2) = 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$



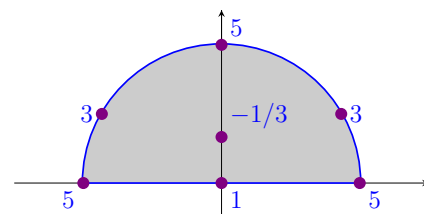
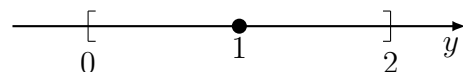
- A félköríven $x^2 + y^2 = 4$ és $0 \leq y \leq 2$.

Tehát

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + 3y^2 - 4y + 1 \\ &= x^2 + y^2 + 2y^2 - 4y + 1 \\ &= 2y^2 - 4y + 5 = g_2(y), \quad 0 \leq y \leq 2 \\ g'_2(y) &= 4y - 4 \end{aligned}$$

miatt a kritikus pont $y = 1$, amely belső pontja a $[0, 2]$ intervallumnak.

Ekkor $x = \pm\sqrt{3}$ és



$$f(\pm 2, 0) = g_2(0) = 5, \quad f(\pm\sqrt{3}, 1) = g_2(1) = 2 - 4 + 5 = 3, \quad f(0, 2) = g_2(2) = 5.$$

Összegezve kapjuk, hogy függvénynek a zárt félkörleapon az $M_1(0, 2/3)$ -ben van a minimuma, ami $-1/3$, és a $(-2, 0)$, $(0, 2)$ és $(2, 0)$ pontokban pedig a maximuma, ami 5.

1 pt

2 pt

3 pt

C csoport

Feladat megoldása.

$$F(x, y, \lambda) := x^2 + y^2 + \lambda((x - 2)^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda(x - 2) &= 0 \\ 2y + 2\lambda y &= 0 \\ (x - 2)^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$

A második egyenletből

$$\begin{aligned} 2y + 2\lambda y &= 0 \\ 2y(1 + \lambda) &= 0 \\ y = 0, \quad \lambda &= -1. \end{aligned}$$

1 pt

Ha $\lambda = -1$, akkor az első egyenletbe visszahelyettesítve a $2x - 2(x - 2) = 4$ összefüggést kapjuk, ami ellentmondás, így $\lambda \neq -1$.

Amennyiben $y = 0$, akkor a harmadik egyenletbe behelyettesítve

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 - 1 &= 0 \\ (x - 2)^2 &= 1 \\ x - 2 &= \pm 1 \\ x = 3, \quad x &= 1. \end{aligned}$$

Ha $x = 3$, akkor az első egyenletből $\lambda = -3$, ha $x = 1$, akkor $\lambda = 1$. Tehát a kritikus pontok

$$\lambda_1 = 1 \text{ esetén } M_1(1, 0) \text{ és } \lambda_2 = -3 \text{ esetén } M_2(3, 0).$$

2 pt

Továbbá

$$F''_{xx} = 2 + 2\lambda, \quad F''_{xy} = F''_{yx} = 0, \quad F''_{yy} = 2 + 2\lambda$$

szerint

$$\Delta_2 F = (2 + 2\lambda)^2 \quad \text{és} \quad \Delta_1 F = 2 + 2\lambda.$$

- A $\lambda_1 = 1$ esetben $\Delta_2 F = 16 > 0$ és $\Delta_1 F = 4 > 0$, így az $M_1(1, 0)$ pontban minimum van, a minimum érték $f(1, 0) = 1$.
- A $\lambda_2 = -3$ esetben pedig $\Delta_2 F = 16 > 0$ és $\Delta_1 F = -4 < 0$, tehát az $M_2(3, 0)$ pontban maximum van, a maximum érték $f(3, 0) = 9$.

3 pt

12.

Egzakt differenciálegyenlet; vonalintegrál

Házi feladatok

Egzakt differenciálegyenlet

Legyenek $P = P(x, y)$ és $Q = Q(x, y)$ kétváltozós függvények. A

$$Pdx + Qdy = 0 \quad \text{vagy} \quad P + Qy' = 0$$

alakra hozott differenciálegyenletet egzaktnak nevezzük, ha

$$P'_y \equiv Q'_x.$$

Ekkor létezik olyan $U = U(x, y)$ függvény, melyre $U'_x = P$ és $U'_y = Q$, továbbá a differenciálegyenlet (implicit) megoldása

$$U = C,$$

azaz a kétváltozós U függvény szintvonalai.

1. Feladat. Oldjuk meg a $(\cos x - x \sin x + y)dx + (x - \cos y)dy = 0$ differenciálegyenletet.

Megoldás. Esetünkben

$$P = \cos x - x \sin x + y \quad \text{és} \quad Q = x - \cos y,$$

ahonnan

$$P'_y = 1 \quad \text{és} \quad Q'_x = 1, \quad \text{azaz} \quad P'_y \equiv Q'_x.$$

Így a differenciálegyenlet egzakt. Tehát van olyan U függvény, amelyre $U'_x = P$ és $U'_y = Q$.

- Az $U'_x = P = \cos x - x \sin x + y$ összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$U = \int (\cos x - x \sin x + y) dx.$$

Parciális integrálással, az

$$f = x, \quad g' = \sin x, \quad f' = 1, \quad g = -\cos x$$

választással kapjuk, hogy

$$\int \underbrace{x \sin x}_{fg'} dx = \underbrace{-x \cos x}_{fg} + \int \underbrace{\cos x}_{f'g} dx = -x \cos x + \sin x + C,$$

így

$$\begin{aligned} U &= \int (\cos x - x \sin x + y) dx = \sin x + x \cos x - \sin x + yx + C + g(y) \\ &= x \cos x + yx + C + g(y), \end{aligned}$$

hiszen tetszőleges $g(y)$ függvénynek is 0 az x változó szerinti deriváltja.

- Az $U'_y = Q = x - \cos y$ összefüggés miatt

$$U = \int (x - \cos y) dy = xy - \sin y + C + h(x).$$

Tehát

$$U = x \cos x + yx + C + g(y),$$

illetve

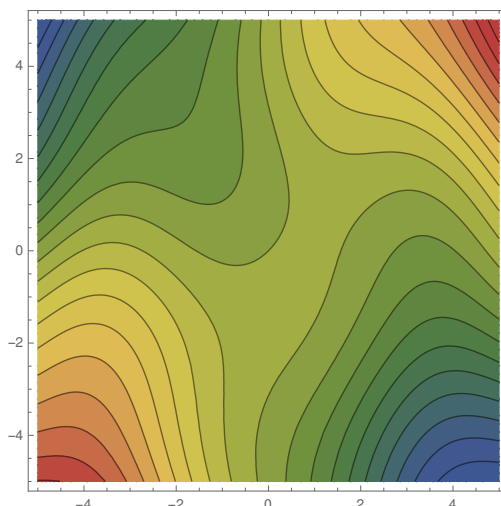
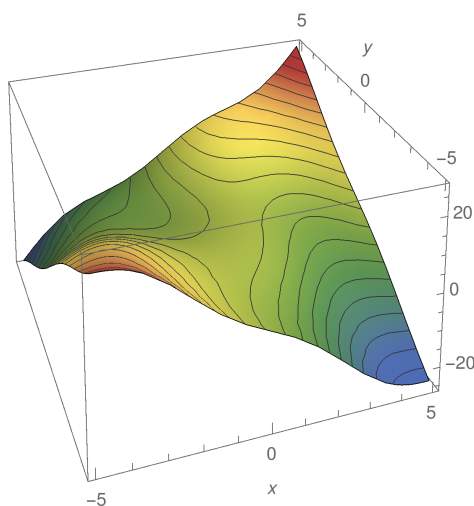
$$U = xy - \sin y + C + h(x)$$

alapján $g(y) = -\sin y$, $h(x) = x \cos x$. Azaz

$$U = x \cos x + xy - \sin y + C,$$

és a differenciálegyenlet implicit megoldása:

$$x \cos x + xy - \sin y = C.$$



A fenti ábrákon az U függvény néhány szintvonala, azaz az egzakt differenciálegyenlet néhány megoldása látható.

2. Feladat. Határozzuk meg a $\ln(y^2 + 1) + \frac{2y(x-1)}{y^2 + 1} \cdot y' = 0$ differenciálegyenlet megoldásait.

Megoldás. Esetünkben

$$P = \ln(y^2 + 1) \quad \text{és} \quad Q = \frac{2y(x-1)}{y^2 + 1},$$

ahonnan

$$P'_y = \frac{2y}{y^2 + 1} \quad \text{és} \quad Q'_x = \frac{2y}{y^2 + 1}, \quad \text{azaz} \quad P'_y \equiv Q'_x$$

miatt a differenciálegyenlet egzakt.

- Az $U'_x = P = \ln(y^2 + 1)$ összefüggés alapján

$$U = \int \ln(y^2 + 1) \, dx = x \ln(y^2 + 1) + C + g(y).$$

- Az $U'_y = Q = \frac{2y(x-1)}{y^2 + 1}$ összefüggés miatt, a

$$z = y^2 + 1, \quad dz = 2y \, dy$$

helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy

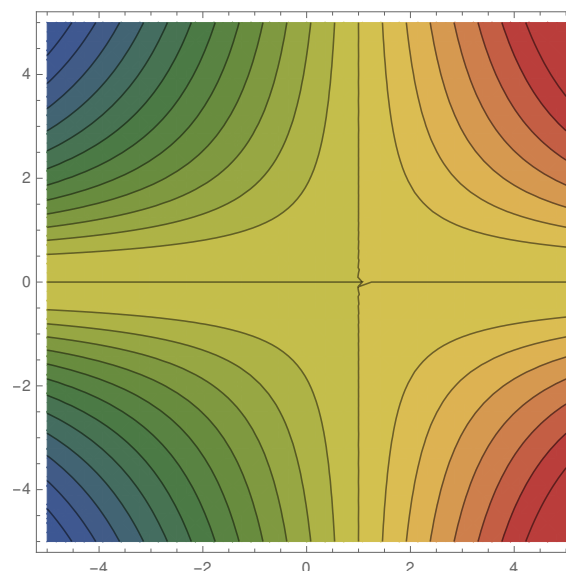
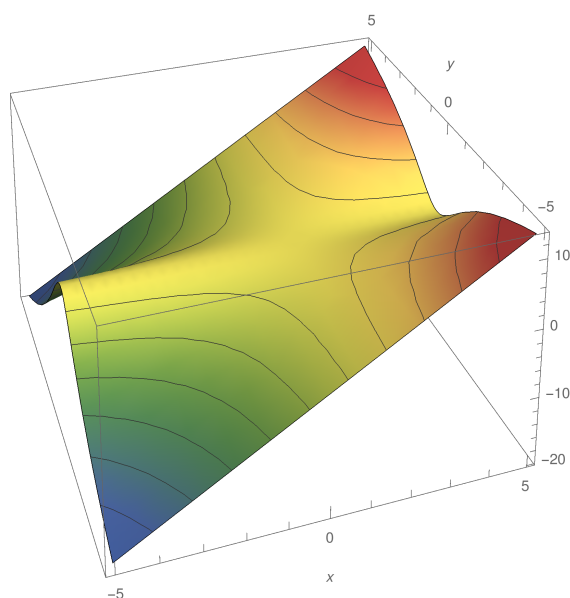
$$\begin{aligned} U &= \int \frac{2y(x-1)}{y^2 + 1} \, dy = (x-1) \int \frac{2y}{y^2 + 1} \, dy = (x-1) \int \frac{1}{z} \, dz \\ &= (x-1) \ln |y^2 + 1| + C + h(x) = x \ln |y^2 + 1| - \ln |y^2 + 1| + C + h(x). \end{aligned}$$

Így $g(y) = -\ln |y^2 + 1|$, $h(x) = 0$, azaz

$$U = x \ln |y^2 + 1| - \ln |y^2 + 1| + C.$$

Tehát a differenciálegyenlet implicit megoldása:

$$x \ln |y^2 + 1| - \ln |y^2 + 1| = C.$$



Vonalintegrál

Az

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

vonalintegrált az L irányított görbe $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ paraméterezése után az

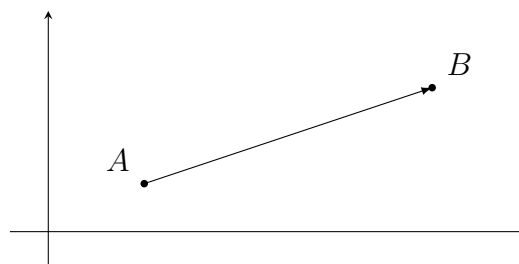
$$\int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

összefüggéssel határozzuk meg. Esetünkben az L görbe vagy egy szakasz, vagy egy körív, amelyek például a következő módon adhatók meg:

Szakasz paraméterezése:

Az $A = (a_1, a_2)$ pontból a $B = (b_1, b_2)$ pontba mutató szakasz egy lehetséges paraméterezése

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 + (b_1 - a_1)t \\ y(t) &= a_2 + (b_2 - a_2)t, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$



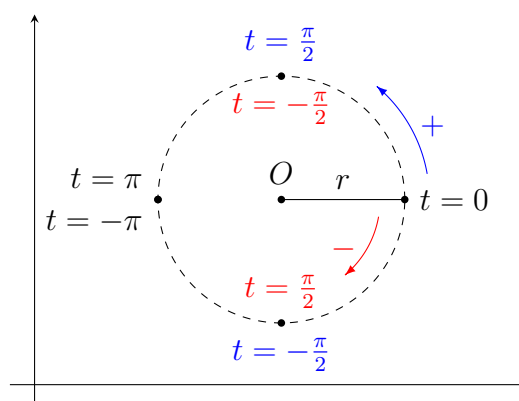
Körív paraméterezése:

Az $O = (a, b)$ középpontú, r sugarú körvonal egy paraméterezése **pozitív** irányítás esetén

$$\begin{aligned} x(t) &= a + r \cos t \\ y(t) &= b + r \sin t, \quad -\pi < t \leq \pi, \end{aligned}$$

negatív irányítás esetén

$$\begin{aligned} x(t) &= a + r \cos t \\ y(t) &= b - r \sin t, \quad -\pi < t \leq \pi. \end{aligned}$$



3. Feladat. Határozzuk meg $\int_L \ln(x+1) dx - xy^2 dy$ értékét, ahol L a $(2, -1) \rightarrow (0, 2)$ pontokat összekötő szakasz.

Megoldás. A szakasz induló pontja $A = (2, -1)$ és a $B = (0, 2)$ pontba érkezik, ezért a szakasz paraméterezése

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + (0 - 2)t = 2 - 2t \\ y(t) &= -1 + (2 + 1)t = 3t - 1, \quad \text{ahol } 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

amiből $x'(t) = -2, y'(t) = 3$. Így

$$\begin{aligned} \int_L \ln(x+1) dx - xy^2 dy &= \int_0^1 [\ln((2-2t)+1) \cdot (-2) - (2-2t)(3t-1)^2 \cdot 3] dt \\ &= \int_0^1 [-2 \ln(3-2t) - 3(2-2t)(3t-1)^2] dt. \end{aligned}$$

Az első kifejezés primitív függvényét parciális integrálással, az

$$f' = -2, \quad g = \ln(3 - 2t), \quad f = -2t, \quad g' = -2/(3 - 2t)$$

választással kapjuk:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(-2) \ln(3 - 2t)}_{f'g} dt &= \int \underbrace{-2t \ln(3 - 2t)}_{fg} - \int \underbrace{(-2t) \frac{-2}{3 - 2t}}_{fg'} dt \\ &= -2t \ln(3 - 2t) + 2 \int \left(1 - \frac{3}{3 - 2t}\right) dt \\ &= -2t \ln(3 - 2t) + 2t + 3 \ln |3 - 2t| + C. \end{aligned}$$

A második kifejezés esetén

$$\begin{aligned} \int [3(2 - 2t)(3t - 1)^2] dt &= \int (-54t^3 + 90t^2 - 42t + 6) dt \\ &= -54 \frac{t^4}{4} + 90 \frac{t^3}{3} - 42 \frac{t^2}{2} + 6t + C. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \int_L \ln(x + 1) dx - xy^2 dy &= \int_0^1 [-2 \ln(3 - 2t) - 3(2 - 2t)(3t - 1)^2] dt \\ &= \left[-2t \ln(3 - 2t) + 2t + 3 \ln |3 - 2t| + 54 \frac{t^4}{4} - 90 \frac{t^3}{3} + 42 \frac{t^2}{2} - 6t \right]_0^1 \\ &= -2 \ln 1 + 2 + 3 \ln 1 + 54 \frac{1}{4} - 90 \frac{1}{3} + 42 \frac{1}{2} - 6 - 3 \ln 3 \\ &= 2 + \frac{27}{2} - 30 + 21 - 6 - 3 \ln 3. \end{aligned}$$

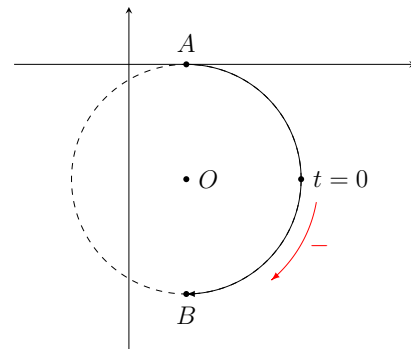
4. Feladat. Határozzuk meg $\int_L (x - 3y) dx - y^2 dy$ értékét, ahol L a $P(1, -2)$ középpontú, 2 sugarú körív $A(1, 0) \rightarrow B(1, -4)$ pontjait negatív irányban köti össze.

Megoldás. A kör középpontja $O = (1, -2)$, sugara $r = 2$, irányítása negatív. Így

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + 2 \cos t, & x'(t) &= -2 \sin t \\ y(t) &= -2 - 2 \sin t, & y'(t) &= -2 \cos t, \end{aligned}$$

és az ábrán alapján

$$-\pi/2 \leq t \leq \pi/2.$$



Így

$$\begin{aligned} & \int_L (x - 3y) dx - y^2 dy \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1 + 2 \cos t - 3(-2 - 2 \sin t))(-2 \sin t) - (-2 - 2 \sin t)^2(-2 \cos t)] dt, \end{aligned}$$

ahonnan a zárójelek felbontása és összevonás után kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-14 \sin t + 8 \cos t - 12 \sin^2 t + 12 \cos t \sin t + 8 \cos t \sin^2 t) dt.$$

Ekkor

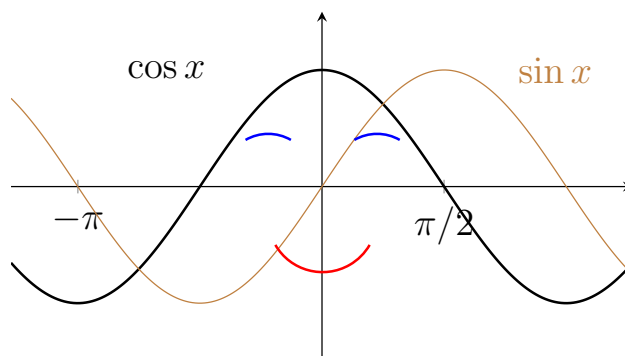
- $\int -14 \sin t dt = 14 \cos t + C,$
- $\int 8 \cos t dt = 8 \sin t + C,$
- $\int -12 \sin^2 t dt = \int -12 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \int (-6 + 6 \cos 2t) dt = -6t + 3 \sin 2t + C,$

valamint helyettesítéssel integrálással, $u = \sin t$, $du = \cos t dt$ választással

- $\int 12 \cos t \sin t dt = 12 \int u du = 6u^2 + c = 6 \sin^2 t + C,$
- $\int 8 \cos t \sin^2 t dt = 8 \int u^2 du = 8 \cdot \frac{u^3}{3} + c = \frac{8}{3} \sin^3 t + C.$

Így

$$\begin{aligned} & \int_L (x - 3y) dx - y^2 dy \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-14 \sin t + 8 \cos t - 12 \sin^2 t + 12 \cos t \sin t + 8 \cos t \sin^2 t) dt \\ &= \left[14 \cos t + 8 \sin t - 6t + 3 \sin 2t + 6 \sin^2 t + \frac{8}{3} \sin^3 t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 14 \cos \frac{\pi}{2} + 8 \sin \frac{\pi}{2} - 3\pi + 3 \sin \pi + 6 \sin^2 \frac{\pi}{2} + \frac{8}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \\ &\quad - \left(14 \cos \frac{-\pi}{2} + 8 \sin \frac{-\pi}{2} + 3\pi + 3 \sin(-\pi) + 6 \sin^2 \frac{-\pi}{2} + \frac{8}{3} \sin^3 \frac{-\pi}{2} \right) \\ &= 8 - 3\pi + 6 + \frac{8}{3} - \left(-8 + 3\pi + 6 - \frac{8}{3} \right). \end{aligned}$$



Videók

Egzakt differenciálegyenlet

1. Feladat. Egzaktak-e az alábbi differenciálegyenletek?

a) $(3x^2y - 4x)dx + (x^3 - 4x)dy = 0$

b) $2xy + \frac{1}{y} + \left(x^2 + \ln y - \frac{x}{y^2}\right)y' = 2x$

c) $y' = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 2y}$

Megoldás.

a) Nem egzakt.

b) Egzakt.

c) Egzakt.



Oldjuk meg az alábbi egzakt differenciálegyenleteket.

2. Feladat. $(2xy - 3)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$

Megoldás. $x^2y - 3x + y^2 = c$



3. Feladat. $(2xy - 2x + \frac{1}{y})dx + (x^2 + \ln y - \frac{x}{y^2})dy = 0$

Megoldás. $x^2y - x^2 + \frac{x}{y} + y \ln y - y = c$



4. Feladat. $e^{x-2y} = (2e^{x-2y} + 3y)y'$

Megoldás. $e^{x-2y} - \frac{3}{2}y^2 = c$



5. Feladat. $(3x^2 + x \sin y)y' + 6xy = \cos y$, $y(2) = 0$

Megoldás. $3x^2y - x \cos y = -2$



6. Feladat. $y' = \frac{2xy + 9x^2}{2y - x^2}$, $y(-1) = 2$

Megoldás. $y^2 - x^2y - 3x^3 = 5$



Vonalintegrál

7. Feladat. Adjuk meg

- a) az $A(2, 3)$ pontból a $B(1, 4)$ pontba, valamint a B -ből A -ba menő,
- b) az $A(-1, 2)$ pontból a $B(3, 1)$ pontba, valamint a B -ből A -ba menő

szakaszokat paraméteres alakban.

Megoldás.



- a) $A \rightarrow B: \quad x(t) = 2 - t, \quad y(t) = 3 + t, \quad 0 \leq t \leq 1$
 $B \rightarrow A: \quad x(t) = 1 + t, \quad y(t) = 4 - t, \quad 0 \leq t \leq 1$
- b) $A \rightarrow B: \quad x(t) = 4t - 1, \quad y(t) = 2 - t, \quad 0 \leq t \leq 1$
 $B \rightarrow A: \quad x(t) = 3 - 4t, \quad y(t) = t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1$

8. Feladat. Adjuk meg az $O(-1, 2)$ középpontú, $r = 3$ sugarú,

- a) $A(-1, -1)$ kezdőpontú, $B(2, 2)$ végpontú, pozitív irányítású;
- b) $A(-1, -1)$ kezdőpontú, $B(2, 2)$ végpontú, negatív irányítású;
- c) $C(-4, 2)$ kezdőpontú, $D(-1, 5)$ végpontú, pozitív irányítású;
- d) $D(-1, 5)$ kezdőpontú, $C(-4, 2)$ végpontú, pozitív irányítású

körívek paraméteres alakját.

Megoldás.



- a) $x(t) = -1 + 3 \cos t, \quad y(t) = 2 + 3 \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
- b) $x(t) = -1 + 3 \cos t, \quad y(t) = 2 - 3 \sin t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$
- c) $x(t) = -1 + 3 \cos t, \quad y(t) = 2 + 3 \sin t, \quad t \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$
- d) $x(t) = -1 + 3 \cos t, \quad y(t) = 2 + 3 \sin t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Számoljuk ki az alábbi vonalintegrálok értékét.

9. Feladat. $\int_{\gamma} (3x - y)dx + xydy$, ahol γ az $A(0, 2)$ kezdőpontú, $B(2, 1)$ végpontú szakasz

Megoldás. $\frac{5}{3}$



10. Feladat. $\int_{\gamma} (3x - y)dx + xydy$, ahol γ az $O(-1, 1)$ középpontú, $r = 2$ sugarú, $A(-3, 1)$ kezdőpontú, $B(-1, -1)$ végpontú, negatív irányítású körív

Megoldás. $-6\pi - \frac{50}{3}$



11. Feladat. $\int_{\gamma} x^2 y dx + 3x dy$, ahol γ az $O(0, 0)$ középpontú, $r = 3$ sugarú, $A(3, 0)$ kezdőpontú, $B(0, 3)$ végpontú, pozitív irányítású körív

Megoldás. $\frac{27\pi}{16}$



12. Feladat. $\int_{\gamma} \frac{2}{x^2} dx + 2xy dy$, ahol γ az $O(0, 0)$ középpontú, $r = 2$ sugarú, $P(1, \sqrt{3})$ kezdőpontú, $Q(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ végpontú, negatív irányítású körív

Megoldás. $\frac{8 - 7\sqrt{2}}{3}$



13. Feladat. $\int_{\gamma} \frac{2x + 3y}{x + 2} dx + \frac{y^2 - x}{y + 1} dy$, ahol γ az $A(1, 2)$ kezdőpontú, $B(2, 0)$ végpontú szakasz

Megoldás. $-5 + 20 \ln 4 - \frac{37}{2} \ln 3$



14. Feladat. $\int_{\gamma} (3x - 2y) dx + y^2 dy$, ahol $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$; γ_1 az $(0, 2)$ kezdőpontú, $B(4, 2)$ végpontú szakasz; γ_2 az $O(3, 2)$ középpontú, $r = 1$ sugarú, $B(4, 2)$ kezdőpontú, $C\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ végpontú, negatív irányítású körív

Megoldás. $\frac{93 - 7\sqrt{2} - 9\pi}{12}$



15. Feladat. $\int_{\gamma} (3x^2 y - 4y) dx + (x^3 + \ln y - 4x) dy$, ahol γ az $A(1, 3)$ kezdőpontú, $B(3, 1)$ végpontú szakasz

Megoldás. $26 - 3 \ln 3$



16. Feladat. $\int_{\gamma} (3x^2 y - 4y) dx + (x^3 + \ln y - 4x) dy$, ahol γ az $A(1, 3)$ kezdőpontú, $B(3, 1)$ végpontú szakasz

Megoldás. $26 - 3 \ln 3$



Kvízek

A csoport

Feladat. Oldjuk meg a

$$\frac{dx}{2\sqrt{x-y}} - \frac{4\sqrt{x-y}+1}{2\sqrt{x-y}} dy = 0$$

differentiálegyenletet.

B csoport

Feladat. Határozzuk meg

$$\int_L \frac{x-y^2}{y+1} dx - \frac{x}{y+2} dy$$

értékét, ahol L az $A(-2, 1) \rightarrow B(0, 0) \rightarrow C(2, 0)$ pontokat összekötő törtszakasz.

C csoport

Feladat. Határozzuk meg az

$$\int_L (2x-1) dx - \frac{y-1}{x^3-x^2} dy$$

vonalintegrál értékét, ahol az L görbe az $O(1, 1)$ középpontú, 1 sugarú, pozitív irányítású körvonal $A(2, 1)$ és $B(1 + \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2)$ pontjait összekötő negyedkörív.

Kvizek megoldása

A csoport

Feladat megoldása. A

$$P = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} = \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2},$$

$$Q = -\frac{4\sqrt{x-y}+1}{2\sqrt{x-y}} = -2 - \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2}$$

összefüggések miatt

$$P'_y = \left[\frac{1}{2}(x-y)^{-1/2} \right]'_y = -\frac{1}{4}(x-y)^{-3/2},$$

$$Q'_x = \left[-2 - \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2} \right]'_x = -\frac{1}{4}(x-y)^{-3/2},$$

azaz $P'_y \equiv Q'_x$, a differenciálegyenlet egzakt.

1 pt

- Mivel $U'_x = P = \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2}$,

$$U = \int \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2} dx = (x-y)^{1/2} + C + g(y).$$

2 pt

- Viszont $U'_y = Q = -2 - \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2}$ miatt

$$U = \int \left(-2 - \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2} \right) dy = -2y + (x-y)^{1/2} + C + h(x).$$

Így $g(y) = -2y$, $h(x) = 0$, vagyis

$$U = (x-y)^{1/2} - 2y + C.$$

Tehát a differenciálegyenlet implicit megoldása

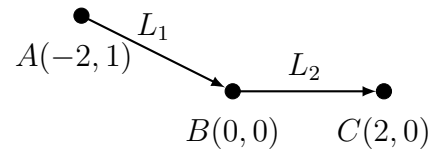
$$(x-y)^{1/2} - 2y = C.$$

3 pt

B csoport

Feladat megoldása.

Az L görbe 2 szakaszból áll.



- Az első rész $L_1 = A(-2, 1) \rightarrow B(0, 0)$, ezért

$$\begin{aligned} x(t) &= -2 + (0 - (-2))t = -2 + 2t, & x'(t) &= 2 \\ y(t) &= 1 + (0 - 1)t = 1 - t, & y'(t) &= -1, & 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

1 pt

Így

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \frac{x - y^2}{y + 1} dx - \frac{x}{y + 2} dy &= \int_0^1 \left[\frac{-2 + 2t - (1 - t)^2}{2 - t} \cdot 2 - \frac{-2 + 2t}{3 - t} \cdot (-1) \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{-t^2 + 4t - 3}{2 - t} \cdot 2 - \frac{2t - 2}{t - 3} \right] dt = \int_0^1 \left[\frac{2t^2 - 8t + 6}{t - 2} - \frac{2t - 6 + 4}{t - 3} \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2t^2 - 8t + 6}{t - 2} - 2 - \frac{4}{t - 3} \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2t(t - 2) - 4(t - 2) - 2}{t - 2} - 2 - \frac{4}{t - 3} \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[2t - 4 - \frac{2}{t - 2} - 2 - \frac{4}{t - 3} \right] dt \\ &= [t^2 - 6t - 2 \ln |t - 2| - 4 \ln |t - 3|]_0^1 \\ &= (1 - 6 - 2 \ln |-1| - 4 \ln |-2|) - (-2 \ln |-2| - 4 \ln |-3|) \\ &= -5 - 2 \ln 2 + 4 \ln 3. \end{aligned}$$

2 pt

- A második rész $L_2 = B(0, 0) \rightarrow C(2, 0)$, így

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 + (2 - 0)t = 2t, & x'(t) &= 2 \\ y(t) &= 0 + (0 - 0)t = 0, & y'(t) &= 0, & 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \int_{L_2} \frac{x - y^2}{y + 1} dx - \frac{x}{y + 2} dy &= \int_0^1 \left[\frac{2t}{1} \cdot 2 - \frac{2t}{2} \cdot 0 \right] dt \\ &= \int_0^1 4t dt = [2t^2]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

Tehát

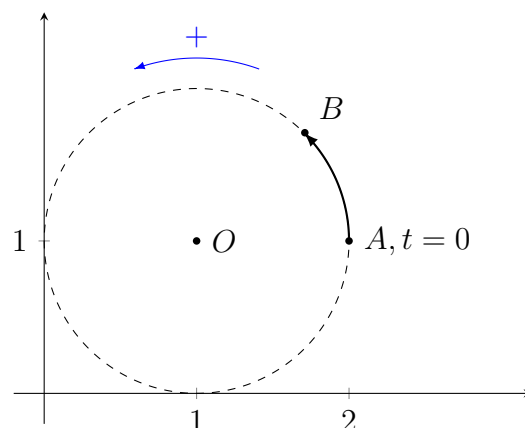
$$\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} = -3 - 2 \ln 2 + 4 \ln 3.$$

3 pt

C csoport

Feladat megoldása. A görbe paraméterezése:

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 + \cos t, & x'(t) &= -\sin t; \\y(t) &= 1 + \sin t, & y'(t) &= \cos t; \\0 &\leq t \leq \pi/4.\end{aligned}$$



1 pt

Tehát

$$\begin{aligned}&\int_L (2x - 1) dx - \frac{y - 1}{x^3 - x^2} dy \\&= \int_0^{\pi/4} \left[(2(1 + \cos t) - 1) \cdot (-\sin t) - \frac{1 + \sin t - 1}{(1 + \cos t)^2(1 + \cos t - 1)} \cdot (\cos t) \right] dt \\&= \int_0^{\pi/4} \left[-2 \sin t \cos t - \sin t - \frac{\sin t}{(1 + \cos t)^2} \right] dt \\&= \int_0^{\pi/4} \left[-\sin 2t - \sin t + \frac{-\sin t}{(1 + \cos t)^2} \right] dt.\end{aligned}$$

Az $u = 1 + \cos t$ helyettesítéssel, $u' = -\sin t$ alapján

$$\int \frac{-\sin t}{(1 + \cos t)^2} dt = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{1 + \cos t} + C.$$

2 pt

Így

$$\begin{aligned}&\int_L (2x - 1) dx - \frac{y - 1}{x^3 - x^2} dy = \left[\frac{\cos 2t}{2} + \cos t - \frac{1}{1 + \cos t} \right]_0^{\pi/4} \\&= \left(\frac{\cos \pi/2}{2} + \cos \pi/4 - \frac{1}{1 + \cos \pi/4} \right) - \left(\frac{\cos 0}{2} + \cos 0 - \frac{1}{1 + \cos 0} \right) \\&= \left(\frac{0}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}/2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{1 + 1} \right).\end{aligned}$$

3 pt

13.

Integrál

Házi feladatok

Ábrázoljuk az integrálási tartományt, majd cseréljük fel az integrálási sorrendet.

1. Feladat.
$$\int_{1/3}^2 \int_{1/x}^{-\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}} f(x, y) dy dx$$

Megoldás. A $dydx$ sorrend jelentése alapján az integrált az

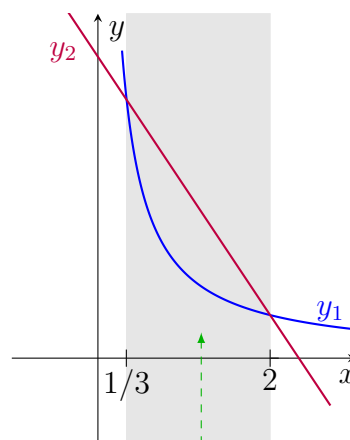
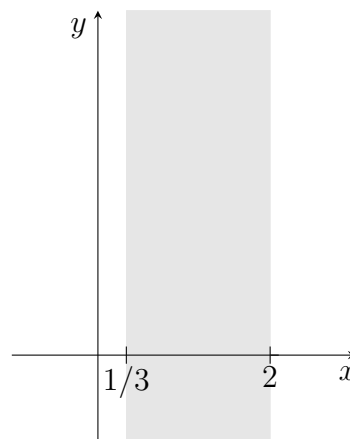
$$\int_{x=1/3}^{x=2} \left(\int_{y=1/x}^{y=-\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}} f(x, y) dy \right) dx$$

bővített alakban adjuk meg. Kívülről befelé haladva megállapítjuk, hogy a tartomány az $1/3 \leq x \leq 2$ sávban található.

A belső integrál,

$$\int_{y=1/x}^{y=-\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}} f(x, y) dy$$

alapján az integrálási tartományt alulról az $y_1 = 1/x$, felülről pedig az $y_2 = -3x/2 + 7/2$ görbe határolja az $1/3 \leq x \leq 2$ sávban.



Az $x = 1/3$, $x = 2$ határpontokban kiszámoljuk az $y_1(x)$, $y_2(x)$ értékeket:

$$y_1(1/3) = \frac{1}{1/3} = 3, \quad y_1(2) = \frac{1}{2}$$

$$y_2(1/3) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3, \quad y_2(2) = -3 + \frac{7}{2} = \frac{1}{2},$$

és ezeket jelöljük az y tengelyen.

Amennyiben fordított sorrendben, $dx dy$ sorrendben integrálunk, akkor először azt állapítjuk meg, hogy az integrálási tartomány mely vízszintes sávban található, azaz y milyen határok között van. Esetünkben $1/2 \leq y \leq 3$, ezért a külső integrál

$$\int_{y=1/2}^{y=3} \left(\quad \right) dy.$$

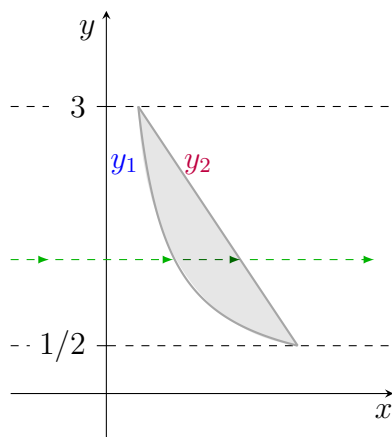
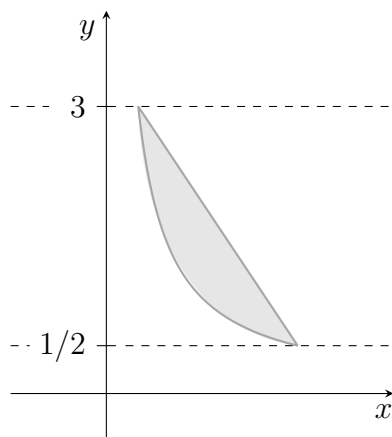
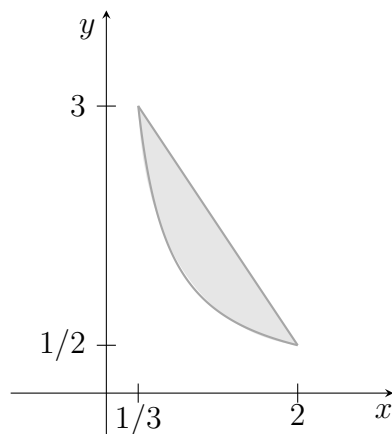
A belső integrál határainak meghatározása a következőképp történik. Egy rögzített $1/2 < y < 3$ érték mentén húzzunk egy vízszintes egyenest és ezen haladjunk balról jobbra. Ekkor az integrálási tartományt az $y_1 = 1/x$ görbe mentén érjük el, haladunk benne egészen az $y_2 = -3x/2 + 7/2$ egyenesig, majd kilépünk belőle. Azaz minden $1/2 \leq y \leq 3$ érték esetén a tartományt balról (a nyíl irányából alulról) az $y_1 = 1/x$ görbe, jobbról (felülről) az $y_2 = -3x/2 + 7/2$ egyenes határolja. Rögzített y érték esetén x az $y = 1/x$, vagyis az $x = 1/y$ értéktől az $y = -3x/2 + 7/2$, vagyis az $x = -2y/3 + 7/3$ értékig változik.

Így a belső integrál

$$\int_{x=1/y}^{x=-\frac{2}{3}y+\frac{7}{3}} f(x, y) dx.$$

Tehát a felcserélt sorrend

$$\int_{y=1/2}^{y=3} \left(\int_{x=1/y}^{x=-\frac{2}{3}y+\frac{7}{3}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{1/2}^3 \int_{1/y}^{-\frac{2}{3}y+\frac{7}{3}} f(x, y) dx dy.$$

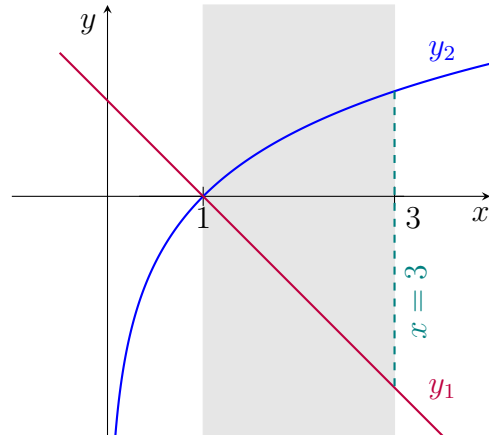


2. Feladat. $\int_1^3 \int_{1-x}^{\ln x} f(x, y) dy dx$

Megoldás. Az

$$\int_{x=1}^{x=3} \left(\int_{y=1-x}^{y=\ln x} f(x, y) dy \right) dx$$

bővített alak szerint a tartomány az $1 \leq x \leq 3$ sávban található. A belső integrál alapján az integrálási tartományt alulról az $y_1 = 1 - x$ egyenes, felülről pedig az $y_2 = \ln x$ görbe határolja az $1 \leq x \leq 3$ sávban.



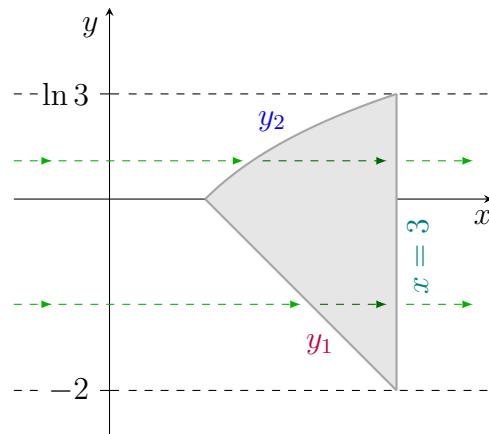
Az $x = 1$, $x = 3$ határpontokban kiszámoljuk az $y_1(x)$, $y_2(x)$ értékeket:

$$y_1(1) = 0, \quad y_1(3) = -2$$

$$y_2(1) = \ln 1 = 0, \quad y_2(3) = \ln 3.$$

A fordított sorrendet tekintve az integrálási tartomány jól láthatóan az $-2 \leq y \leq \ln 3$ vízszintes sávban található.

Ugyanakkor, ha egy rögzített $-2 < y < \ln 3$ érték mentén húzunk egy vízszintes egyenest és ezen haladjunk balról jobbra, akkor $-2 \leq y \leq 0$ esetén az $y_1 = 1 - x$ egyenes mentén, ha $0 \leq y \leq \ln 3$, akkor viszont az $y_2 = \ln x$ görbe mentén lépünk be az integrálási tartományba. A halmazból mindig az $x = 3$ egyenes mentén lépünk ki. Ezek alapján a tartományt az $y = 0$ egyenletű egyenes mentén ketté kell vágni.

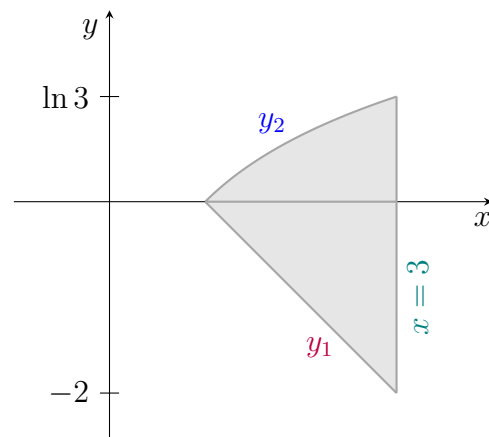


Azaz az integrált fel kell bontani:

$$\int_{y=-2}^{y=0} (\quad) dy + \int_{y=0}^{y=\ln 3} (\quad) dy.$$

Ha $-2 \leq y \leq 0$, akkor rögzített y érték esetén x az $y = 1 - x$, vagyis az $x = 1 - y$ értéktől az $x = 3$ értékig változik.

Ha $0 \leq y \leq \ln 3$, akkor rögzített y érték esetén x az $y = \ln x$, vagyis az $x = e^y$ értéktől az $x = 3$ értékig változik. Tehát a felcserélt sorrend



$$\int_{-2}^0 \left(\int_{1-y}^3 f(x, y) dx \right) dy + \int_0^{\ln 3} \left(\int_{e^y}^3 f(x, y) dx \right) dy.$$

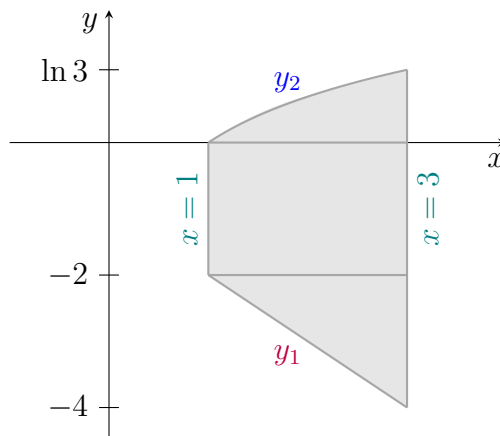
3. Feladat. $\int_1^3 \int_{-1-x}^{\ln x} f(x, y) dy dx$

Megoldás. Az

$$\int_{x=1}^{x=3} \left(\int_{y=-1-x}^{y=\ln x} f(x, y) dy \right) dx$$

bővített alak szerint a tartomány az $1 \leq x \leq 3$ sávban található. A belső integrál alapján az integrálási tartományt alulról az $y_1 = -1 - x$, felülről pedig az $y_2 = \ln x$ görbe határolja az $1 \leq x \leq 3$ sávban. Valójában az előző feladat alsó határoló egyenesét az y tengely mentén 2-vel lefelé toltuk. A fordított sorrendhez jól láthatóan az integrálási tartományt három részre kell bontani, az $y = 0$ és az $y = -2$ egyenletű egyenesek mentén.

Ezért a külső integrál



$$\int_{y=-4}^{y=-2} (\quad) dy + \int_{y=-2}^{y=0} (\quad) dy + \int_{y=0}^{y=\ln 3} (\quad) dy ,$$

és a belső integrálok, az előző feladat segítségével

$$\int_{-4}^{-2} \left(\int_{-1-y}^3 f(x, y) dx \right) dy + \int_{-2}^0 \left(\int_1^3 f(x, y) dx \right) dy + \int_0^{\ln 3} \left(\int_{e^y}^3 f(x, y) dx \right) dy .$$

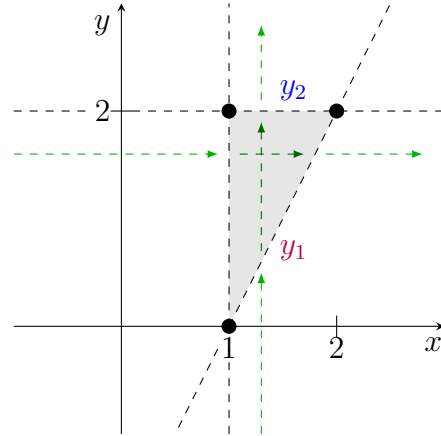
4. Feladat. Számítsuk ki az $\iint_H (xy - 3x) dxy$ integrált, ahol H az $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$ pontok által meghatározott háromszög.

Megoldás. Első lépésben eldöntjük, hogy milyen sorrendben integrálunk:

$$\begin{aligned} \int (xy - 3x) dx &= \frac{x^2}{2}y - 3\frac{x^2}{2} + C , \\ \int (xy - 3x) dy &= x\frac{y^2}{2} - 3xy + C \end{aligned}$$

miatt a kifejezést bármely változó szerint könnyű integrálni. A későbbiekben C -t már nem írjuk ki.

Ekkor a tartomány alakját vizsgáljuk. Jól láthatóan alulról-felülről és balról-jobbról is egy-egy görbe határolja a tartományt, azaz bármely sorrendet választjuk is nem kell bontani az integrált. Az utolsó szempont a sorrend megválasztásánál a határoló görbék egyenlete. Azért döntünk a $dydx$ sorrend mellett, mert a lentől-fentről határoló görbék egyenletét általában az y változóra kifejezve adjuk meg. Tehát $1 \leq x \leq 2$, a tartományt alulról az $y_1 = 2x - 2$ egyenes, felülről az $y_2 = 2$ egyenes határolja.



Így

$$\begin{aligned} \iint_H (xy - 3x) \, dxy &= \int_1^2 \left(\int_{y=2x-2}^{y=2} (xy - 3x) \, dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{xy^2}{2} - 3xy \right]_{y=2x-2}^{y=2} dx \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x \cdot 2^2}{2} - 3x \cdot 2 - \left(\frac{x(2x-2)^2}{2} - 3x(2x-2) \right) \right] dx \\ &= \int_1^2 (-2x^3 + 10x^2 - 12x) \, dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{10}{3}x^3 - 6x^2 \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2} \cdot 2^4 + \frac{10}{3} \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 \right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{10}{3} - 6 \right). \end{aligned}$$

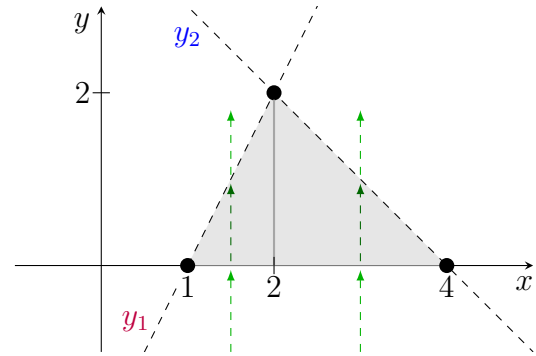
5. Feladat. Határozzuk meg az $\iint_H \frac{x-2y}{2x+1} \, dxy$ integrál értékét, ahol H az $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$ pontok által meghatározott háromszög.

Megoldás. A sorrendet vizsgálva

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2y}{2x+1} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1-4y}{2x+1} \, dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1+4y}{2x+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(x - (1+4y) \frac{\ln|2x+1|}{2} \right), \\ \int \frac{x-2y}{2x+1} \, dy &= \frac{1}{2x+1} \int (x-2y) \, dy = \frac{1}{2x+1} (xy - y^2) = \frac{xy - y^2}{2x+1} \end{aligned}$$

alapján jól látható, hogy a kifejezést az y változó szerint jóval könnyebb integrálni. Ezért a $dydx$ sorrendet választjuk.

Vegyük fel az integrálási tartományt. A $dydx$ sorrend miatt az $x = 2$ egyenes mentén bontani kell az integrált, a lentől-fentről határoló görbék egyenletét y -ra kell rendezni. Az $(1, 0)$, $(4, 0)$ pontok az x tengelyen helyezkednek el, $y_3 = 0$. Az $(1, 0)$, $(2, 2)$ pontokat összekötő egyenes egyenlete $y_1 = 2x - 2$, a $(2, 2)$, $(0, 4)$ pontokat összekötő egyenes egyenlete $y_2 = 4 - x$. Tehát



$$\iint_H \frac{x-2y}{2x+1} dx dy = \int_1^2 \left(\int_{y=0}^{y=2x-2} \frac{x-2y}{2x+1} dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{y=0}^{y=-x+4} \frac{x-2y}{2x+1} dy \right) dx.$$

Az első rész

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_{y=0}^{y=2x-2} \frac{x-2y}{2x+1} dy \right) dx &= \int_1^2 \left[\frac{xy - y^2}{2x+1} \right]_{y=0}^{y=2x-2} dx = \int_1^2 \frac{x(2x-2) - (2x-2)^2}{2x+1} dx \\ &= \int_1^2 \frac{-2x^2 + 6x - 4}{2x+1} dx. \end{aligned}$$

Ekkor a

$$\begin{aligned} (-2x^2 + 6x - 4) : (2x + 1) &= -x + \frac{7}{2} \\ -(-2x^2 - x) & \\ 7x - 4 & \\ -\left(7x + \frac{7}{2}\right) & \\ -\frac{15}{2} & \end{aligned}$$

polinomosztásból

$$\frac{-2x^2 + 6x - 4}{2x + 1} = -x + \frac{7}{2} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2x + 1}$$

adódik, amiből

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{-2x^2 + 6x - 4}{2x + 1} dx &= \int_1^2 \left(-x + \frac{7}{2} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2x + 1} \right) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} \cdot \frac{\ln|2x+1|}{2} \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{2^2}{2} + \frac{7}{2} \cdot 2 - \frac{15}{2} \cdot \frac{\ln(2 \cdot 2 + 1)}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{2} - \frac{15}{2} \cdot \frac{\ln(2 + 1)}{2} \right). \end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned}\int_2^4 \left(\int_{y=0}^{y=-x+4} \frac{x-2y}{2x+1} dy \right) dx &= \int_2^4 \left[\frac{xy-y^2}{2x+1} \right]_{y=0}^{y=-x+4} dx = \int_2^4 \frac{x(-x+4) - (-x+4)^2}{2x+1} dx \\ &= \int_2^4 \frac{-2x^2 + 12x - 16}{2x+1} dx,\end{aligned}$$

ahol a

$$\begin{aligned}(-2x^2 + 12x - 16) : (2x + 1) &= -x + \frac{13}{2} \\ -(-2x^2 - x) & \\ 13x - 16 & \\ -\left(13x + \frac{13}{2}\right) & \\ -\frac{45}{2} &\end{aligned}$$

polinomosztással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{-2x^2 + 12x - 16}{2x+1} dx &= \int_2^4 \left(-x + \frac{13}{2} - \frac{45}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} \right) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{13}{2}x - \frac{45}{2} \cdot \frac{\ln|2x+1|}{2} \right]_2^4 \\ &= \left(-\frac{4^2}{2} + \frac{13}{2} \cdot 4 - \frac{45}{2} \cdot \frac{\ln(2 \cdot 4 + 1)}{2} \right) \\ &\quad - \left(-\frac{2^2}{2} + \frac{13}{2} \cdot 2 - \frac{45}{2} \cdot \frac{\ln(2 \cdot 2 + 1)}{2} \right).\end{aligned}$$

6. Feladat. Számoljuk ki a $\iint_H e^{\frac{x}{y}} dxy$ integrált, ahol H az $x = 0$, $y = 1$ és az $y^2 = x$ egyenletű görbék által határolt korlátos, zárt síkrész.

Megoldás. Először az integrálás sorrendjéről döntünk. Vegyük észre, hogy az

$$\int e^{\frac{x}{y}} dy$$

integrált nem tudjuk meghatározni, ugyanakkor az x változó szerinti integrál egyszerűen adódik:

$$\int e^{\frac{x}{y}} dx = \int e^{\frac{1}{y} \cdot x} dx = ye^{\frac{x}{y}}.$$

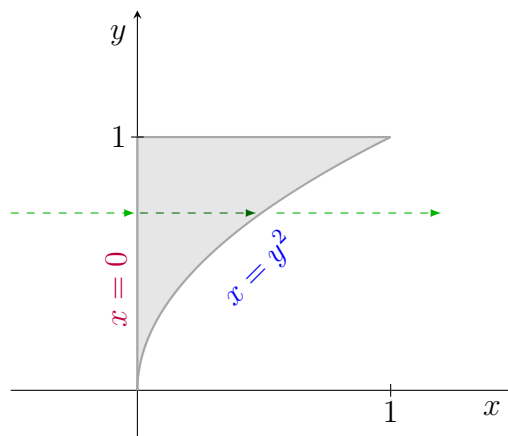
Tehát a $dxdy$ sorrend szerint integrálunk.

A határoló görbéket felvéve az ábra alapján megállapítjuk, hogy $0 \leq y \leq 1$.

Továbbá rögzített y esetén mindig az $x = 0$ egyenes mentén lépünk be a tartományba és mindig az $x = y^2$ görbe mentén lépünk ki.

A tartományt nem kell bontani, továbbá a balról–jobbról határoló görbék egyenlete eleve x -re van kifejezve.

Így



$$\iint_H e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy = \int_0^1 \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 (y e^y - y) dy.$$

Parciálisan integrálva az

$$f = y, \quad g' = e^y, \quad f' = 1, \quad g = e^y$$

választással azt kapjuk, hogy

$$\int \underbrace{y e^y}_{f g'} dy = \underbrace{y e^y}_{f g} - \int \underbrace{e^y}_{f' g} dy = y e^y - e^y.$$

Tehát

$$\int_0^1 (y e^y - y) dy = \left[y e^y - e^y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = e - e - \frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$$

Videók

Integrál

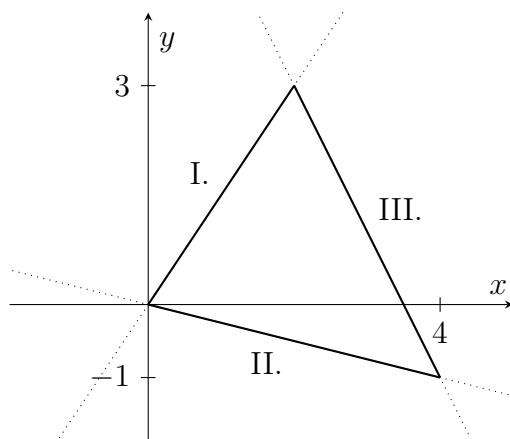
1. Feladat. Ábrázoljuk és írjuk fel az alábbi síkbeli tartományokat határoló egyenesek egyenletét az x illetve az y változójaként is.

- a) A $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(4, -1)$ pontok által határolt háromszög.
 b) A $(-2, 1)$, $(0, 3)$, $(2, 1)$, $(4, 2)$ csúcsok által meghatározott négyszög.

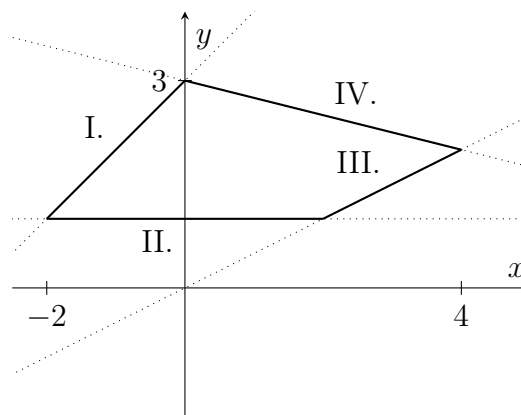
Megoldás.



- a) I. $y = \frac{3}{2}x$, $x = \frac{2}{3}y$
 II. $y = -\frac{1}{4}x$, $x = -4y$
 III. $y = -2x + 7$, $x = -\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$



- b) I. $y = x + 3$, $x = y - 3$
 II. $y = 1$
 III. $y = \frac{1}{2}x$, $x = 2y$
 IV. $y = -\frac{1}{4}x + 3$, $x = -4y + 12$



2. Feladat. Ábrázoljuk az alábbi görbék által meghatározott integrálási tartományt, majd fejezzük ki a határoló görbék egyenletét y függvényeként.

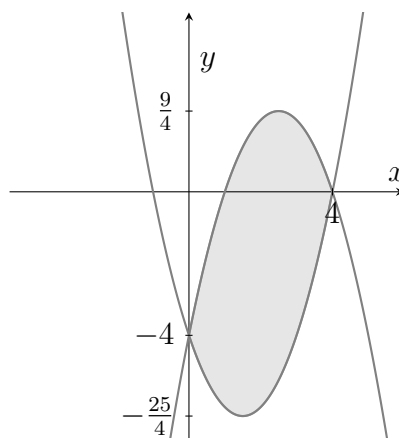
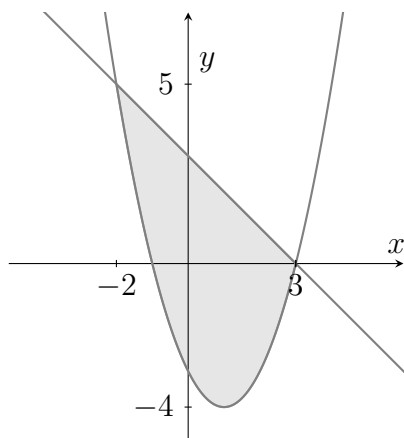
- a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $g(x) = 3 - x$
 b) $f(x) = x^2 - 3x - 4$; $g(x) = -x^2 + 5x - 4$

Megoldás.



- a) $f(x)$: $x = 1 \pm \sqrt{4 + y}$;
 $g(x)$: $x = 3 - y$

- b) $f(x)$: $x = \frac{3 \pm \sqrt{25 + 4y}}{2}$;
 $g(x)$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{9 - 4y}}{2}$

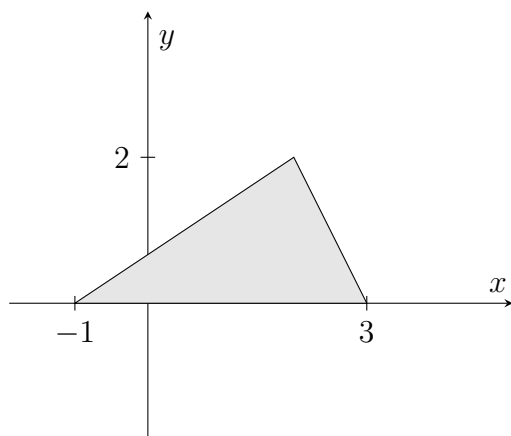


3. Feladat. Ábrázoljuk a H integrálási tartományt, ahol H a $(-1, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$ pontok által meghatározott zárt háromszög; majd írjuk fel a kettős integrálokat a megadott sorrendnek megfelelően.

a) $dx dy$

b) $dy dx$

Megoldás.



$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^2 \left(\int_{x=\frac{3}{2}y-1}^{x=\frac{1}{2}y+3} f(x, y) dx \right) dy \\ \text{b) } & \int_{-1}^2 \left(\int_{y=0}^{y=\frac{2x+2}{3}} f(x, y) dy \right) dx \\ & + \int_2^3 \left(\int_{y=0}^{y=-2x+6} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

4. Feladat. Ábrázoljuk a H integrálási tartományt, ahol H az $(1, 4)$, $(3, -1)$, $(5, 5)$, $(6, 2)$ pontok által meghatározott, zárt négyszög; majd írjuk fel a kettős integrálokat a megadott sorrendnek megfelelően.

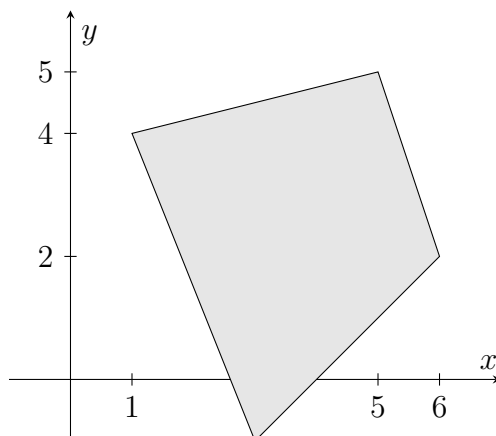
a) $dx dy$

b) $dy dx$

Megoldás.



$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_{-1}^2 \left(\int_{x=\frac{-2y+13}{5}}^{x=y+4} f dx \right) dy + \int_2^4 \left(\int_{x=\frac{-2y+13}{5}}^{x=\frac{-y+20}{3}} f dx \right) dy + \int_4^5 \left(\int_{x=4y-15}^{x=\frac{-y+20}{3}} f dx \right) dy \\ \text{b) } & \int_1^3 \left(\int_{y=\frac{-5x+13}{2}}^{y=\frac{x+15}{4}} f dy \right) dx + \int_3^5 \left(\int_{y=x-4}^{y=\frac{x+15}{4}} f dy \right) dx + \int_5^6 \left(\int_{y=x-4}^{y=-3x+20} f dy \right) dx \end{aligned}$$



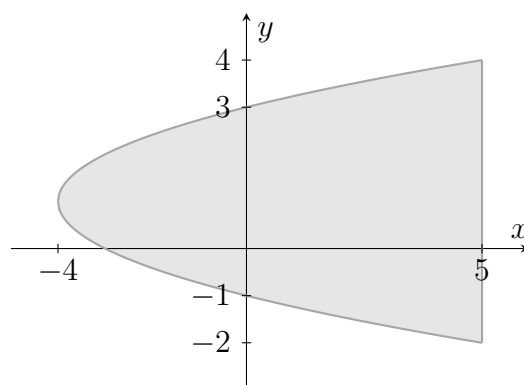
Ábrázoljuk az integrálási tartományt, majd cseréljük fel az integrálási sorrendet.

5. Feladat.
$$\int_{-2}^4 \left(\int_{x=y^2-2y-3}^{x=5} f(x, y) dx \right) dy$$

Megoldás.



$$\int_{-4}^5 \left(\int_{y=1-\sqrt{4+x}}^{y=1+\sqrt{4+x}} f(x, y) dy \right) dx$$

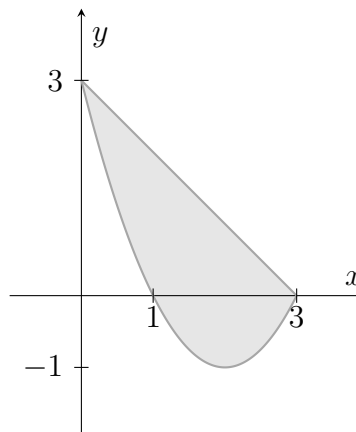


6. Feladat.
$$\int_0^3 \left(\int_{y=x^2-4x+3}^{y=-x+3} f(x, y) dy \right) dx$$

Megoldás.



$$\int_{-1}^0 \left(\int_{x=2-\sqrt{y+1}}^{x=2+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx \right) dy + \int_0^3 \left(\int_{x=2-\sqrt{y+1}}^{x=-y+3} f(x, y) dx \right) dy$$

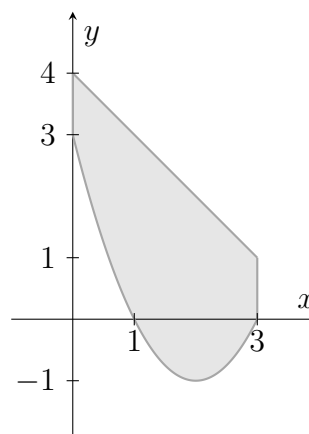


7. Feladat. $\int_0^3 \left(\int_{x^2-4x+3}^{-x+4} f(x, y) dy \right) dx$

Megoldás.



$$\int_{-1}^0 \left(\int_{2-\sqrt{y+1}}^{2+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_{2-\sqrt{y+1}}^3 f(x, y) dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_{2-\sqrt{y+1}}^{-y+4} f(x, y) dx \right) dy + \int_3^4 \left(\int_0^{-y+4} f(x, y) dx \right) dy$$



Számoljuk ki az alábbi kettős integrálok értékét.

8. Feladat. $\iint_H (3x^2y - 6y) dxy$, ahol H a $(0, 0)$, $(3, 2)$, $(4, 0)$ pontok által meghatározott, zárt háromszög

Megoldás. $\frac{388}{5}$



9. Feladat.

- a) $\iint_H (5y + 1) dx dy$, ahol H az $y = 3 - x$, $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$, $0 \leq x \leq 2$ kifejezések által meghatározott, zárt tartomány
- b) $\iint_H (5y + 1) dy dx$, ahol H az $y = 3 - x$, $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$, $0 \leq x \leq 2$ kifejezések által meghatározott, zárt tartomány

Megoldás.

a) $55 \ln 2 - \frac{5}{8}$



b) $55 \ln 2 - \frac{5}{8}$



- 10. Feladat.** $\iint_H (e^{-x^2} + xy) dx y$, ahol H a $(0, 0)$, $(3, 3)$, $(3, -3)$ pontok által meghatározott, zárt háromszög

Megoldás. $1 - e^{-9}$



- 11. Feladat.** $\iint_H \frac{2xy}{3y + 1} dx y$, ahol H az $(1, 0)$, $(1, 4)$, $(3, 2)$ pontok által meghatározott, zárt háromszög

Megoldás. $\frac{16}{9} + \frac{28}{9} \ln 7 - \frac{247}{81} \ln 13$



- 12. Feladat.** $\iint_H \frac{x + y}{x + 1} dx y$, ahol H a $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$ pontok által meghatározott, zárt háromszög

Megoldás. $12 \ln 3 - 8 \ln 2 - 6$



- 13. Feladat.** Kettős integrálás segítségével határozzuk meg az $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ integrál értékét.

Megoldás. $\frac{\pi}{2}$



- 14. Feladat.** Kettős integrálás segítségével határozzuk meg az $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ integrál értékét.

Megoldás. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$



Kvízek

A csoport

Feladat. Ábrázoljuk az integrálási tartományt, majd cseréljük föl az integrálási sorrendet.

$$\int_0^2 \int_{1-x^2}^{x^3+1} f(x, y) \, dy dx$$

B csoport

Feladat. Számítsuk ki az $\iint_H \frac{2y}{x^2-4} \, dxy$ integrált, ahol H az $(1, 0)$, $(-1, 4)$ és az $(1, 4)$ pontok által határolt, zárt háromszög.

C csoport

Feladat. Számítsuk ki az $\iint_H e^{-y^2} \, dxy$ integrált, ahol H a $(-2, -2)$, $(0, 0)$ és a $(0, -2)$ pontok által határolt, zárt háromszög.

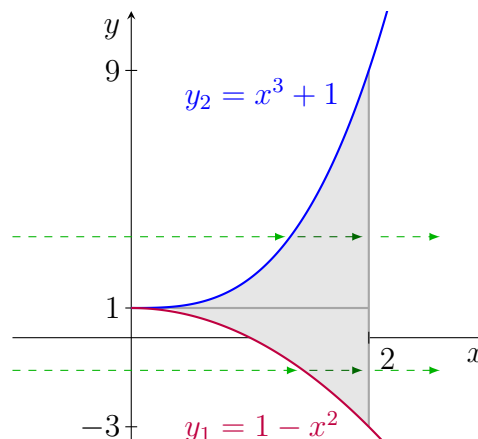
Kvízek megoldása

A csoport

Feladat megoldása. Az integrálási tartomány a $0 \leq x \leq 2$ sávban található, alulról az $y_1 = 1 - x^2$, felülről pedig az $y_2 = x^3 + 1$ görbe határolja. Az $x = 0$, $x = 2$ határpontokban

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(2) = -3$$

$$y_2(0) = 1, \quad y_2(2) = 9.$$



1 pt

Az integrálási tartomány jól láthatóan a $-3 \leq y \leq 9$ sávban helyezkedik el és az $y = 1$ egyenletű egyenes mentén ketté kell vágni, az integrált fel kell bontani:

$$\int_{y=-3}^{y=1} (\quad) dy + \int_{y=1}^{y=9} (\quad) dy.$$

2 pt

Rögzített y érték esetén

- ha $-3 \leq y \leq 1$, akkor x az $y = 1 - x^2$, vagyis $x > 0$ miatt az $x = \sqrt{1-y}$ értéktől az $x = 2$ értékig változik.
- ha $1 \leq y \leq 9$, akkor x az $y = x^3 + 1$, vagyis az $x = \sqrt[3]{y-1}$ értéktől az $x = 2$ értékig változik.

Tehát a felcserélt sorrend

$$\int_{-3}^1 \left(\int_{\sqrt{1-y}}^2 f(x, y) dx \right) dy + \int_1^9 \left(\int_{\sqrt[3]{y-1}}^2 f(x, y) dx \right) dy.$$

3 pt

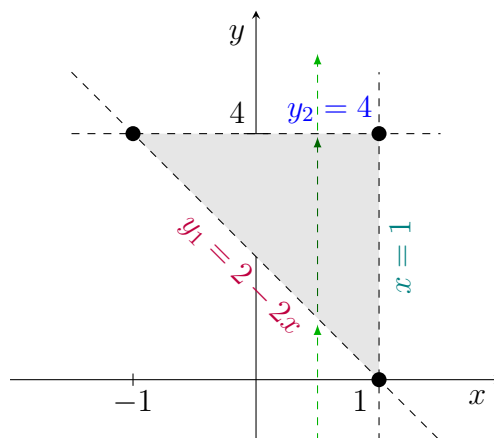
B csoport

Feladat megoldása. Az y -változó szerint egyszerű integrálni,

$$\int \frac{2y}{x^2 - 4} dy = \frac{1}{x^2 - 4} \cdot \int 2y dy = \frac{y^2}{x^2 - 4} + C,$$

ezért a $dydx$ sorrendet választjuk.

Az ábra alapján $-1 \leq x \leq 1$, nem kell bontani. A tartományt alulról az $(1, 0)$, $(-1, 4)$ pontokat összekötő egyenes, $y_1 = 2 - 2x$, felülről a $(-1, 4)$, $(1, 4)$ pontokat összekötő egyenes, $y_2 = 4$ határolja.



1 pt

$$\begin{aligned} \iint_H \frac{2y}{x^2 - 4} dxy &= \int_{-1}^1 \left(\int_{y=2-2x}^{y=4} \frac{2y}{x^2 - 4} dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{x^2 - 4} \right]_{y=2-2x}^{y=4} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{4^2}{x^2 - 4} - \frac{(2 - 2x)^2}{x^2 - 4} \right] dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{16}{x^2 - 4} - \frac{4x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4} \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{-4x^2 + 8x + 12}{x^2 - 4} dx = -4 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} dx \\ &= -4 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 4 - 2x + 1}{x^2 - 4} dx = -4 \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{2x - 1}{x^2 - 4} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{x^2 - 4} &= \frac{2x - 1}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} \\ 2x - 1 &= A(x + 2) + B(x - 2) \end{aligned}$$

2 pt

Behelyettesítve a nevező gyökeit:

$$\begin{aligned} x = 2 \quad \text{esetén} \quad & 3 = A \cdot 4, \quad \text{azaz} \quad A = 3/4, \\ x = -2 \quad \text{esetén} \quad & -5 = B \cdot (-4), \quad \text{azaz} \quad B = 5/4. \end{aligned}$$

Azaz

$$\begin{aligned} \iint_H \frac{2y}{x^2 - 4} dxy &= -4 \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{3/4}{x - 2} - \frac{5/4}{x + 2} \right) dx = -4 \left[x - \frac{3}{4} \ln |x - 2| - \frac{5}{4} \ln |x + 2| \right]_{-1}^1 \\ &= -4 \left[1 - \frac{3}{4} \ln 1 - \frac{5}{4} \ln 3 - \left(-1 - \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{5}{4} \ln 1 \right) \right] \\ &= -4 \left[1 - \frac{5}{4} \ln 3 + 1 + \frac{3}{4} \ln 3 \right]. \end{aligned}$$

3 pt

C csoport

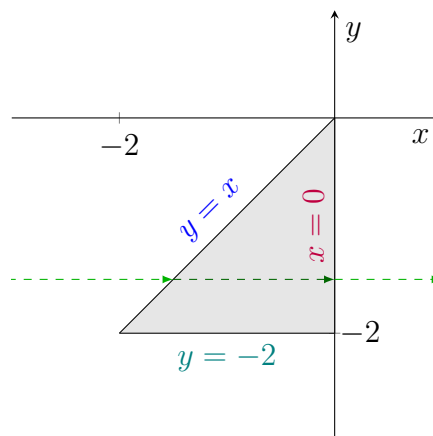
Feladat megoldása. Az

$$\int e^{-y^2} dy$$

integrált nem tudjuk meghatározni, ugyanakkor az x változó szerinti integrál:

$$\int e^{-y^2} dx = xe^{-y^2}.$$

Tehát a $dx dy$ sorrendet választjuk.



1 pt

Az ábra alapján megállapítjuk, hogy $-2 \leq y \leq 0$. Továbbá rögzített y esetén mindig az $x = y$ egyenes mentén lépünk be a tartományba és mindig az $x = 0$ görbe mentén lépünk ki, ezért

$$\iint_H e^{-y^2} dx dy = \int_{-2}^0 \int_{x=y}^{x=0} e^{-y^2} dx dy,$$

Továbbá

$$\int_{-2}^0 \left(\int_y^0 e^{-y^2} dx \right) dy = \int_{-2}^0 \left[xe^{-y^2} \right]_{x=y}^{x=0} dy = \int_{-2}^0 (-ye^{-y^2}) dy.$$

2 pt

Helyettesítéses integrálással, az

$$u = -y^2, \quad du = -2y dy, \quad \frac{1}{2} du = -y dy$$

helyettesítéssel élve kapjuk, hogy

$$\int (-ye^{-y^2}) dy = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{-y^2} + C.$$

Tehát

$$\iint_H e^{-y^2} dx dy = \left[\frac{1}{2} e^{-y^2} \right]_{-2}^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4}.$$

3 pt

Előismeretek

Értelmezési tartomány

1. Feladat. Határozzuk meg, majd ábrázoljuk számegyenesen a következő függvények értelmezési tartományát.

(a) $\frac{2^x}{x^2 + x}$ (b) $\sqrt{2x + 1}$ (c) $\log_2(x^2 - 4)$ (d) $\frac{\sin x}{x \log_{1/3} x}$

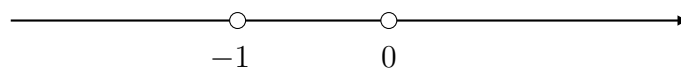
Megoldás.

- (a) Az értelmezési tartomány megadásakor (kikötés vizsgálat) három dologra kell figyelniük: törtre, páros kitevőjű gyökre és logaritmusra.
Egy tört nevezője nem lehet nulla, így ebben az esetben

$$\begin{aligned}x^2 + x &\neq 0 \\x(x + 1) &\neq 0,\end{aligned}$$

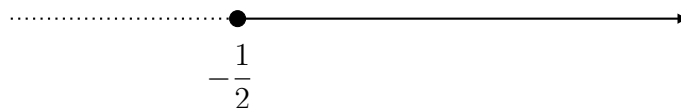
ahonnan

$$x \neq 0 \quad \text{és} \quad x \neq -1.$$



- (b) Négyzetgyököt csak nemnegatív kifejezésnek vehetjük, tehát

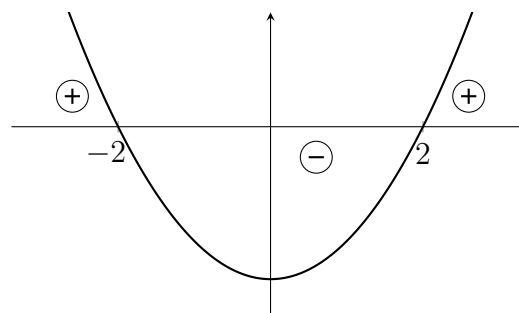
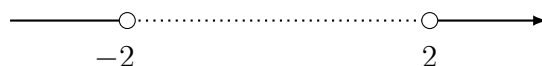
$$\begin{aligned}2x + 1 &\geq 0 \\x &\geq -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$



- (c) Logaritmusát csak pozitív kifejezésnek vehetjük, ezért

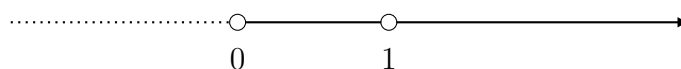
$$x^2 - 4 > 0.$$

Az $f(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ parabolát ábrázolva leolvasható az egyenlőtlenség megoldása: $x > 2$ vagy $x < -2$.



(d) Figyelnünk kell a törtre és a logaritmusra is, azaz

$$\begin{aligned} x \log_{1/3} x &\neq 0 && \text{és} && x > 0 \\ x \neq 0, \log_{1/3} x &\neq 0 && \text{és} && x > 0 \\ x \neq 0, x &\neq 1 && \text{és} && x > 0. \end{aligned}$$



Polinomosztás; elemi törtekre bontás

2. Feladat. Végezzük el a következő polinomosztásokat.

(a) $(x^2 + 5x + 2) : (x + 2)$

(b) $(x^5 - 3x^3 + x^2 + 4x + 1) : (x^2 - 2x + 3)$

Megoldás.

(a)

$$\begin{array}{r} (x^2 + 5x + 2) : (x + 2) = x + 3 \\ -(x^2 + 2x) \\ \hline 3x + 2 \\ -(3x + 6) \\ \hline -4 \end{array}$$

A fenti számolás alapján

$$\frac{x^2 + 5x + 2}{x + 2} = x + 3 - \frac{4}{x + 2}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
& (x^5 - 3x^3 + x^2 + 4x + 1) : (x^2 - 2x + 3) = x^3 + 2x^2 - 2x - 9 \\
& -(x^5 - 2x^4 + 3x^3) \\
& \quad 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 4x + 1 \\
& -(2x^4 - 4x^3 + 6x^2) \\
& \quad -2x^3 - 5x^2 + 4x + 1 \\
& -(-2x^3 + 4x^2 - 6x) \\
& \quad -9x^2 + 10x + 1 \\
& -(-9x^2 + 18x - 27) \\
& \quad -8x + 28
\end{aligned}$$

Így

$$\frac{x^5 - 3x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^2 - 2x + 3} = x^3 + 2x^2 - 2x - 9 + \frac{-8x + 28}{x^2 - 2x + 3}.$$

3. Feladat. Bontsuk elemi törtekre a következő kifejezéseket.

(a) $\frac{5}{(x-1)(x+3)}$

(b) $\frac{2-x}{x^2-2x+1}$

(c) $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+2)}$

Megoldás.

(a) A tört nevezője két különböző elsőfokú tényező szorzata, így a felbontás

$$\frac{5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}.$$

Közös nevezőre hozva kapjuk, hogy

$$\frac{5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)},$$

amiből

$$5 = A(x+3) + B(x-1).$$

Az A és B értékek meghatározása történhet a nevező, $(x-1)(x+3)$ gyökeinek, azaz az $x=1$ és az $x=-3$ helyettesítésével.

- Az $x=1$ behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$5 = A \cdot 4, \quad \text{ahonnan} \quad A = \frac{5}{4}.$$

- Az $x=-3$ helyettesítéssel írhatjuk, hogy

$$5 = B \cdot (-4), \quad \text{ahonnan} \quad B = -\frac{5}{4}.$$

Ebből

$$\frac{5}{(x-1)(x+3)} = \frac{5/4}{x-1} + \frac{-5/4}{x+3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x+3}.$$

- (b) Ebben az esetben a tört nevezője az $x-1$ elsőfokú tényező négyzete, így a helyes felbontás

$$\frac{2-x}{x^2-2x+1} = \frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2},$$

amiből

$$2-x = A(x-1) + B.$$

Az A, B értékek meghatározása történhet az egyenlő együtthatók módszerével is. Ezt általában akkor használjuk, ha az ismeretlenek száma nagyobb mint ahány zérushelye van a nevezőnek, mint például ebben az esetben. Először felbontjuk a zárójelet majd csoportosítjuk az egyenmű kifejezéseket:

$$\begin{aligned} 2-x &= A(x-1) + B \\ -1 \cdot x + 2 &= A \cdot x - A + B. \end{aligned}$$

Az x változó együtthatóinak összehasonlításával kapjuk, hogy

$$\begin{cases} -1 = A \\ 2 = -A + B. \end{cases}$$

Az $A = -1$ értéket a második egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy $2 = 1 + B$, azaz $B = 1$. Így

$$\frac{2-x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}.$$

- (c) A nevező második tényezője egy olyan másodfokú polinom, amelynek nincs valós gyöke, így a helyes felbontás

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2)},$$

tehát

$$3x+1 = (A+B)x^2 + (B+C)x + 2A+C.$$

Az együtthatók összehasonlításával kapjuk, hogy

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ 3 = B+C \\ 1 = 2A+C. \end{cases}$$

Az első egyenletből $B = -A$ adódik, ezt beírjuk a második egyenletbe:

$$\begin{cases} 3 = -A+C \\ 1 = 2A+C, \end{cases}$$

majd ezen két egyenletet egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$2 = -3A,$$

vagyis $A = -2/3$. Így $B = 2/3$ és

$$3 = -\frac{2}{3} + C$$

alapján $C = 7/3$. Tehát

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{-2/3}{x+1} + \frac{(2/3)x + (7/3)}{x^2+2}.$$

Sorozatok határértéke

4. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét.

(a) $\frac{n^2 - 2n}{3n^2 - 2}$

(d) $\frac{3 \cdot 7^n + 2^{3n-1}}{3^{n+1} - 5^n}$

(b) $\frac{4n^3 - 2n}{n^2 - n + \pi}$

(e) $\frac{2^{2n} + n^4}{n - n^2 + 4n^3}$

(c) $\frac{\sqrt[3]{n^2 - 5n + 1}}{\sqrt[4]{2n^5 - 1}}$

(f) $\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n^2 + 4n - 5}$

(g) $\sqrt[n]{7^n - 4^n}$

Megoldás.

- (a) A határérték “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” alakú. A számlálóban és a nevezőben szereplő kifejezések legnagyobb kitevőjű (domináns) tagjait kiemelve, az első szorzótényező egyszerűsítése után kapjuk, hogy

$$\frac{n^2 - 2n}{3n^2 - 2} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1 - 2/n}{3 - 2/n^2} = \frac{1 - 2/n}{3 - 2/n^2} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

- (b) Az előző feladathoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{4n^3 - 2n}{n^2 - n + \pi} = \frac{n^3}{n^2} \cdot \frac{4 - 2/n^2}{1 - 1/n + \pi/n^2} = n \cdot \frac{4 - 2/n^2}{1 - 1/n + \pi/n^2} \rightarrow \infty \cdot \frac{4}{1} = \infty.$$

- (c) A domináns tagokat kiemelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 5n + 1}}{\sqrt[4]{2n^5 - 1}} &= \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{n^5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{1 - 5/n + 1/n^2}}{\sqrt[4]{2 - 1/n^5}} \\ &= \frac{1}{n^{7/12}} \cdot \frac{\sqrt[3]{1 - 5/n + 1/n^2}}{\sqrt[4]{2 - 1/n^5}} \rightarrow 0 \cdot \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[4]{2}} = 0, \end{aligned}$$

ugyanis

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{n^5}} = \frac{n^{2/3}}{n^{5/4}} = \frac{n^{8/12}}{n^{15/12}} = \frac{1}{n^{7/12}} \rightarrow 0.$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{3 \cdot 7^n + 2^{3n-1}}{3^{n+1} - 5^n} &= \frac{3 \cdot 7^n + 8^n/2}{3^n \cdot 3 - 5^n} = \frac{8^n}{5^n} \cdot \frac{3 \cdot 7^n/8^n + 1/2}{3^n/5^n \cdot 3 - 1} \\ &= \left(\frac{8}{5}\right)^n \cdot \frac{3 \cdot (7/8)^n + 1/2}{(3/5)^n \cdot 3 - 1} \rightarrow \infty \cdot \frac{1/2}{-1} = -\infty\end{aligned}$$

(e)

$$\frac{2^{2n} + n^4}{n - n^2 + 4n^3} = \frac{4^n + n^4}{n - n^2 + 4n^3} = \frac{4^n}{n^3} \cdot \frac{1 + n^4/4^n}{1/n^2 - 1/n + 4} \rightarrow \infty \cdot \frac{1}{4} = \infty$$

(f) A határérték “ $\infty - \infty$ ” alakú. A domináns tagot kiemelve, figyelve arra, hogy $\sqrt{n^2} = |n| = n$, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n^2 + 4n - 5} = \sqrt{n^2} \cdot \left(\sqrt{1 - 3/n^2} - \sqrt{1 + 4/n - 5/n^2} \right),$$

ami “ $\infty \cdot 0$ ” alakú határérték. Ezért az eredeti kifejezést az első lépésben gyöktelenítjük, majd az így kapott “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” típusú határértéket a szokásos módon, a domináns tagok kiemelésével határozzuk meg:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n^2 + 4n - 5} &= \left(\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n^2 + 4n - 5} \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 3n} + \sqrt{n^2 + 4n - 5}}{\sqrt{n^2 - 3n} + \sqrt{n^2 + 4n - 5}} \\ &= \frac{(n^2 - 3n) - (n^2 + 4n - 5)}{\sqrt{n^2 - 3n} + \sqrt{n^2 + 4n - 5}} = \frac{-7n + 5}{\sqrt{n^2 - 3n} + \sqrt{n^2 + 4n - 5}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2}} \cdot \frac{-7 + 5/n}{\sqrt{1 - 3/n} + \sqrt{1 + 4/n - 5/n^2}} \\ &= \frac{-7 + 5/n}{\sqrt{1 - 3/n} + \sqrt{1 + 4/n - 5/n^2}} \rightarrow \frac{-7}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

(g) A határérték “ $\sqrt[n]{\infty}$ ” alakú. Az n -edik gyökjel alatti kifejezésből kiemelve a domináns tagot, majd az első szorzótényezőt egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{7^n - 4^n} = \sqrt[n]{7^n(1 - 4^n/7^n)} = \sqrt[n]{7^n} \cdot \sqrt[n]{1 - 4^n/7^n} = 7 \cdot \sqrt[n]{1 - (4/7)^n}.$$

Mivel

$$1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n \rightarrow 1,$$

így, ha n elég nagy,

$$\frac{1}{2} < 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n < \frac{3}{2}$$

és ekkor a hatványfüggvény monotonitása miatt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy.}$$

Továbbá $\sqrt[n]{1/2} \rightarrow 1$ és $\sqrt[n]{3/2} \rightarrow 1$, ezért a rendőrelv alapján $\sqrt[n]{1 - (4/7)^n} \rightarrow 1$, vagyis az általunk vizsgált sorozat határértéke

$$\sqrt[n]{7^n - 4^n} = 7 \cdot \sqrt[n]{1 - (4/7)^n} \rightarrow 7 \cdot 1 = 7.$$

Valós függvények határértéke

5. Feladat. Adjuk meg a következő határértékeket.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^3}{5 + x^2} & \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{4 + x^2} & \text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 2x} \\
 \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + x + \sqrt[3]{x^2}\right) & \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{4 - x^2} & \text{(h)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x^2 - 2x}} \\
 \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x - 5}\right) & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - x^2} &
 \end{array}$$

Megoldás.

(a) A végtelenben vett határértéket a sorozatoknál tanultak szerint határozzuk meg.

Ez egy “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” típusú határérték. A számláló és a nevező domináns tagját kiemelve, és az első szorzótényezőt egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^3}{5 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{1/x^2 - 2}{5/x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1/x^2 - 2}{5/x^2 + 1} = “\infty \cdot \frac{-2}{1}” = -\infty.$$

(b) Most a mínusz végtelenben vesszük a határértéket, ami “ $-\infty + \infty$ ” alakú. A feladatban nincs páros gyökkitevőjű kifejezés, ezért ugyanúgy dolgozunk mint a végtelenben vett határérték esetén:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + x + \sqrt[3]{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = “-\infty \cdot 1” = -\infty.$$

(c) Ismételten mínusz végtelenben vesszük a határértéket, és mivel a feladatban van négyzetgyökös kifejezés, ezért az $x = -y$ helyettesítéssel visszavezetjük a feladatot végtelenben vett határértékre, ugyanis is $\sqrt{x^2} = |x|$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x - 5}\right) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(-y + \sqrt{(-y)^2 + 2(-y) - 5}\right) \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(-y + \sqrt{y^2 - 2y - 5}\right) \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\sqrt{y^2 - 2y - 5} - y\right) \cdot \frac{\sqrt{y^2 - 2y - 5} + y}{\sqrt{y^2 - 2y - 5} + y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2 - 2y - 5 - y^2}{\sqrt{y^2 - 2y - 5} + y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-2y - 5}{\sqrt{y^2 - 2y - 5} + y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{\sqrt{y^2}} \cdot \frac{-2 - 5/y}{\sqrt{1 - 2/y - 5/y^2} + 1} \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-2 - 5/y}{\sqrt{1 - 2/y - 5/y^2} + 1} = \frac{-2}{\sqrt{1} + 1} = -1,
 \end{aligned}$$

mivel $y \rightarrow \infty$, ezért $y > 0$, tehát $\sqrt{y^2} = |y| = y$.

- (d) Ebben a feladatban a határértéket véges helyen vesszük. Ilyenkor a hely behelyettesítésével megállapítjuk a határérték típusát. Az x helyére 2-t írva elvegezhető műveletet kapunk, így ez lesz a határérték is:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{4+x^2} = \frac{2-2}{4+2^2} = \frac{0}{8} = 0.$$

- (e) Behelyettesítve a 2-t kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. Ebben az esetben szorzattá alakítunk, egyszerűsítünk, majd az egyszerűsített kifejezésbe újból behelyettesítünk:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{4} = 0.$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{-x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{-x} = \frac{0}{-1} = 0$$

- (g) A határérték $\frac{1}{0}$ típusú. Ebben az esetben három lehetőség van, a határérték $+\infty$, $-\infty$ vagy nem létezik annak megfelelően, hogy a kifejezés előjeléről mit állíthatunk a hely környezetében. Ezt a féloldali határértékek vizsgálatával állapítjuk meg.

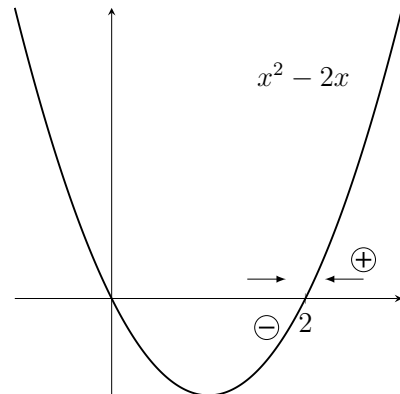
Az $x^2 - 2x = x(x-2)$ függvényt ábrázolva a grafikonról leolvassuk a nevező előjelét a 2 pont környezetében:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

és

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

Így a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 2x}$ határérték nem létezik.



- (h) Nézzük először a kitevő határértékét. Az előző feladat alapján

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 2x} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 2x} = \infty,$$

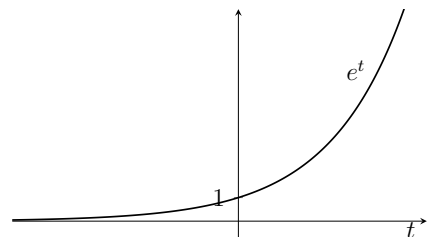
ahonnan az exponenciális függvény grafikonjának ismeretében

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x^2 - 2x}} = e^{-\infty} = 0,$$

illetve

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x^2 - 2x}} = e^{\infty} = \infty.$$

Így a keresett $\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x^2 - 2x}}$ határérték nem létezik.



Differenciálhányados; L'Hospital-szabály

6. Feladat. Definíció szerint határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ függvény $x_0 = 2$ pontbeli differenciálhányadosát.

Megoldás. A definíció alapján

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - x^2} - \sqrt{2}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - x^2} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{3x - x^2} + \sqrt{2}}{\sqrt{3x - x^2} + \sqrt{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - x^2 - 2}{(x - 2)(\sqrt{3x - x^2} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(1 - x)}{(x - 2)(\sqrt{3x - x^2} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - x}{(\sqrt{3x - x^2} + \sqrt{2})} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

7. Feladat. Formálisan deriváljuk a következő függvényeket.

(a) $x^6 - x^{1/3} + 4$

(c) $2^x \sqrt{x}$

(b) $5 \arcsin x - 3 \operatorname{tg} x + \frac{\log_2 x}{4}$

(d) $\frac{3 \cos x}{1 + \sin x}$

Megoldás.

(a)

$$[x^6 - x^{1/3} + 4]' = [x^6]' - [x^{1/3}]' + [4]' = 6x^5 - \frac{1}{3}x^{-2/3} + 0$$

(b)

$$\begin{aligned} \left[5 \arcsin x - 3 \operatorname{tg} x + \frac{\log_2 x}{4} \right]' &= 5 \cdot [\arcsin x]' - 3 \cdot [\operatorname{tg} x]' + \frac{1}{4} \cdot [\log_2 x]' \\ &= 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x \ln 2} \end{aligned}$$

(c)

$$[2^x \cdot \sqrt{x}]' = [2^x \cdot x^{1/2}]' = [2^x]' \cdot x^{1/2} + 2^x \cdot [x^{1/2}]' = 2^x \ln 2 \cdot x^{1/2} + 2^x \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

(d)

$$\begin{aligned} \left[\frac{3 \cos x}{1 + \sin x} \right]' &= \frac{[3 \cos x]' \cdot (1 + \sin x) - 3 \cos x \cdot [1 + \sin x]'}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-3 \sin x \cdot (1 + \sin x) - 3 \cos x \cdot \cos x}{(1 + \sin x)^2} \end{aligned}$$

8. Feladat. Formálisan deriváljuk a következő összetett függvényeket.

(a) $(x^2 + x)^4$ (b) $\sqrt[3]{(2 - x^2)^2}$ (c) $\ln^2 x$ (d) $xe^{-x/\lambda}$

Megoldás.

- (a) Az $(x^2 + x)^4$ összetett függvény esetén $f(y) = y^4$ a külső, $y(x) = x^2 + x$ a belső függvény. Az összetett függvény deriváltja

$$[f(y(x))]' = f'(y) \cdot y'.$$

Mivel

$$f'(y) = 4y^3 = 4(x^2 + x)^3 \quad \text{és} \quad y' = 2x + 1,$$

ezért

$$[(x^2 + x)^4]' = f'(y) \cdot y' = 4(x^2 + x)^3 \cdot (2x + 1).$$

- (b) A külső függvény $f(y) = y^{2/3}$, a belső $y = 2 - x^2$, ezért

$$f'(y) = \frac{2}{3}y^{-1/3} = \frac{2}{3}(2 - x^2)^{-1/3} \quad \text{és} \quad y' = -2x.$$

Így

$$\left[\sqrt[3]{(2 - x^2)^2}\right]' = \left[(2 - x^2)^{2/3}\right]' = f'(y) \cdot y' = \frac{2}{3}(2 - x^2)^{-1/3} \cdot (-2x).$$

- (c) Az $f(y) = y^2$ és $y = \ln x$ összefüggések szerint

$$[\ln^2 x]' = [(\ln x)^2]' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}.$$

- (d)

$$[xe^{-x/\lambda}]' = 1 \cdot e^{-x/\lambda} + x \cdot e^{-x/\lambda} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

9. Feladat. Ha alkalmazható, a L'Hospital-szabály segítségével határozzuk meg a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x + x^2}$$

határértéket.

Megoldás. A határérték $\frac{0}{0}$ típusú. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[2x + x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 + 2x} = \frac{0}{2} = 0,$$

ezért az eredeti határérték is létezik és

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x + x^2} = 0.$$

Szélsőérték

10. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ függvény szélsőértékeit a $[0, 1]$ zárt intervallumon.

Megoldás. Az f függvény differenciálható, így folytonos is. Ezért szélsőértékeit az intervallum végpontjaiban, vagy az intervallumon belül található kritikus pontokban ($f' = 0$) veszi fel. Mivel

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1,$$

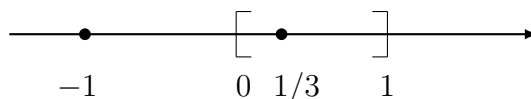
így a

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

egyenletből,

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

alapján az $x_1 = 1/3$, $x_2 = -1$ kritikus pontok adódnak, de csak az $x_1 = 1/3$ van a $[0, 1]$ intervallumban.



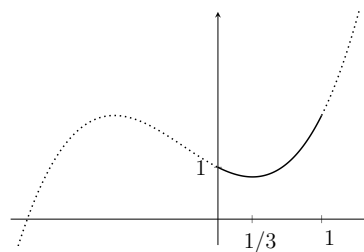
Ebben a pontban és a végpontokban számoljuk ki az eredeti, azaz az

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

függvény értékeit:

$$f(0) = 1, \quad f(1/3) = \frac{22}{27}, \quad f(1) = 2.$$

Így a minimum $22/27$, a maximum 2 .



11. Feladat. A második derivált teszt használatával határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ függvény lokális (helyi) szélsőértékeit.

Megoldás. Jól láthatóan a függvény kétszer differenciálható. A kritikus pontok

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

szerint a $3x^2 - 8x + 4 = 0$ egyenletből az $x_1 = 2$, $x_2 = 2/3$. Továbbá

$$f''(x) = 6x - 8$$

alapján

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 8 > 0 \text{ miatt } 2\text{-ben helyi minimum van, a minimum érték } f(2) = 0,$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 8 < 0 \text{ miatt } \frac{2}{3}\text{-ban helyi maximum van, a maximum érték } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}.$$

Határozatlan integrál

12. Feladat. Egyszerűsítés, algebrai átalakítás után határozzuk meg a következő egyszerű integrálokat.

$$(a) \int \left(5e^x + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$(d) \int \frac{1}{\sqrt[5]{6x+5}} dx$$

$$(b) \int e^{3-2x} dx$$

$$(e) \int \sin^2 x dx$$

$$(c) \int \frac{1}{x^2 + 6x + 9} dx$$

Megoldás.

(a)

$$\begin{aligned} \int \left(5e^x + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{x} \right) dx &= 5 \int e^x dx + \frac{1}{4} \int x^{-3} dx - \int \frac{1}{x} dx \\ &= 5 \cdot e^x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - \ln |x| + C \end{aligned}$$

(b) Az egyszerű integrálok tulajdonsága alapján,

$$\text{ha } \int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{akkor } \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C.$$

Így

$$\int e^{3-2x} dx = \frac{e^{3-2x}}{-2} + C.$$

(c)

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 9} dx = \int \frac{1}{(x+3)^2} dx = \int (x+3)^{-2} dx = \frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C$$

(d)

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{6x+5}} dx = \int (6x+5)^{-1/5} dx = \frac{(6x+5)^{4/5}}{\frac{4}{5} \cdot 6} + C$$

(e) A $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ azonosság alapján

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C.$$

13. Feladat. Helyettesítéssel integrálás alkalmazásával adjuk meg a következő függvények integrálját.

$$(a) \int 3x^2(x^3 + 8)^{10} dx \qquad (b) \int x^2 e^{1-x^3} dx \qquad (c) \int \frac{x+3}{(x^2+6x)^3} dx$$

Megoldás.

(a) A helyettesítéssel integrálás módszere:

$$\text{ha } \int f(y) dy = F(y) + C, \quad \text{akkor } \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

A megoldás során a $g(x)$ belső függvény helyett az y betűt használjuk. Az

$$\int 3x^2(x^3 + 8)^{10} dx = \int (x^3 + 8)^{10} \cdot 3x^2 dx$$

átalakítás után jól látható, hogy az első szorzótényező, $(x^3 + 8)^{10}$ az összetett függvény, továbbá a második tényező pontosan az $y = x^3 + 8$ belső függvény deriváltja, $y' = 3x^2$, azaz $dy = 3x^2 dx$. Tehát

$$\int (x^3 + 8)^{10} \cdot 3x^2 dx = \int y^{10} dy = \frac{y^{11}}{11} + C = \frac{(x^3 + 8)^{11}}{11} + C.$$

(b) Az

$$y = 1 - x^3, \quad y' = -3x^2, \quad -\frac{1}{3} dy = x^2 dx$$

helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{1-x^3} dx &= \int e^{1-x^3} \cdot x^2 dx = \int e^y \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) dy \\ &= -\frac{1}{3} e^y + C = -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + C. \end{aligned}$$

(c) Az $y = x^2 + 6x$ helyettesítéssel, $y' = 2x + 6 = 2(x + 3)$, azaz $\frac{1}{2} dy = (x + 3) dx$ alapján

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{(x^2+6x)^3} dx &= \int (x^2+6x)^{-3} \cdot (x+3) dx \\ &= \int y^{-3} \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+6x)^{-2}}{-2} + C. \end{aligned}$$

14. Feladat. Parciális integrálás alkalmazásával adjuk meg a következő függvények integrálját.

(a) $\int (2x - 1) \sin x \, dx$

(b) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

Megoldás.

(a) A parciális integrálás módszere:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g, \quad \text{vagy} \quad \int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Mindkét szorzótényező, a $2x - 1$ és a $\sin x$ is elemi függvény. Az egyik egy polinom, a másik pedig egy trigonometrikus függvény. Ezért a polinomot deriváljuk tovább, az első összefüggést használjuk, azaz az

$$f = 2x - 1$$

választással élünk, ekkor a derivált

$$f' = 2.$$

Ez azt is jelenti, hogy

$$g' = \sin x,$$

ezt integrálva

$$g = -\cos x.$$

A C konstanstól eltekintünk. Tehát

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(2x - 1) \cdot \sin x}_{f \cdot g'} \, dx &= \underbrace{(2x - 1) \cdot (-\cos x)}_{f \cdot g} - \int \underbrace{2 \cdot (-\cos x)}_{f' \cdot g} \, dx \\ &= -(2x - 1) \cos x + 2 \int \cos x \, dx \\ &= -(2x - 1) \cos x + 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

(b) Mivel az egyik szorzótényező a logaritmus függvény, ezt választjuk a "sima" függvénynek. Így az

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \cdot \ln x \, dx$$

átalakítás után a második összefüggést alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} f' &= x^{-2} & f &= -\frac{1}{x} \\ g &= \ln x & g' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^{-2} \cdot \ln x}_{f' \cdot g} \, dx &= \underbrace{-\frac{1}{x} \cdot \ln x}_{f \cdot g} - \int \underbrace{-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}_{f \cdot g'} \, dx \\ &= -\frac{1}{x} \ln x + \int x^{-2} \, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

15. Feladat. Elemi törtekre bontás segítségével határozzuk meg a következő integrálokat.

$$(a) \int \frac{2x+1}{x^2-4x+3} dx \qquad (b) \int \frac{1}{x^3+x} dx$$

Megoldás.

(a) Ekkor

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+1}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x-3)}{(x-3)(x-1)},$$

ahonnan

$$2x+1 = A(x-1) + B(x-3).$$

Két ismeretlen és két különböző gyök van, ezért a gyökök behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$\begin{array}{ll} x=3 & \text{ esetén } 7 = A \cdot 2, \quad \text{azaz } A = 7/2, \\ x=1 & \text{ esetén } 3 = B \cdot (-2), \quad \text{azaz } B = -3/2. \end{array}$$

Tehát

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{7/2}{x-3} + \frac{-3/2}{x-1},$$

amiből

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+3} dx = \int \left(\frac{7/2}{x-3} - \frac{3/2}{x-1} \right) dx = \frac{7}{2} \ln|x-3| - \frac{3}{2} \ln|x-1| + C.$$

(b) Mivel $x^3+x = x(x^2+1)$ és az x^2+1 polinomnak nincs valós gyöke, ezért a helyes elemi törtekre bontás:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}.$$

Az egyenlő együtthatók módszerével kapjuk, hogy $A+B=0$, $C=0$ és $A=1$, amiből $B=-1$. Így

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

A második kifejezés integrálját helyettesítéssel, $y = x^2+1$, $y' = 2x$ alapján kapjuk meg:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+x} dx &= \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|y| + C \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C. \end{aligned}$$

Határozott integrál; improprius integrál

16. Feladat. Számoljuk ki a következő határozott integrálokat.

$$(a) \int_3^4 \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx$$

$$(b) \int_{-\pi/2}^0 x \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

Megoldás.

- (a) A függvény az értelmezési tartományán, a $D_f = (0, \infty)$ intervallumon folytonos, ezért a $[3, 4]$ zárt intervallumon Riemann-integrálható. A határozott integrál értékét a függvény egy tetszőleges primitív függvényének segítségével számítjuk ki. Ezért előbb határozatlan integrált számolunk:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx &= \int (x^{3/2} - 2x^{1/2} + 3x^{-1/2}) dx \\ &= \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2} + C. \end{aligned}$$

A legegyszerűbb primitív függvényt a $C = 0$ választással kapjuk. Így a Newton–Leibniz tétel alapján

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx &= \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2} \right]_3^4 \\ &= \frac{2}{5} \cdot 4^{5/2} - \frac{4}{3} \cdot 4^{3/2} + 6 \cdot 4^{1/2} \\ &\quad - \left(\frac{2}{5} \cdot 3^{5/2} - \frac{4}{3} \cdot 3^{3/2} + 6 \cdot 3^{1/2} \right). \end{aligned}$$

- (b) A függvény az integrálási tartományon, a $[-\pi/2, 0]$ zárt intervallumon folytonos, ezért itt Riemann-integrálható. A határozatlan integrált parciális integrálással,

$$f = x, \quad f' = 1, \quad g' = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), \quad g = \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

alapján kapjuk meg:

$$\begin{aligned} \int x \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) dx &= x \cdot \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} - \int \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} dx \\ &= x \cdot \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{4} + C. \end{aligned}$$

Így a Newton–Leibniz tétel szerint

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^0 x \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) dx &= \left[x \cdot \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{4} \right]_{-\pi/2}^0 \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

17. Feladat. Határozzuk meg az $\int_3^\infty \frac{1}{x^2 - 4} dx$ improprius integrált.

Megoldás. A függvény folytonos a $[3, \infty)$ intervallumon, ezért a következő improprius integrált számoljuk:

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^2 - 4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_3^t \frac{1}{x^2 - 4} dx.$$

A határozatlan integrál megadásához elemi törtekre bontunk.

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)},$$

azaz

$$1 = A(x + 2) + B(x - 2).$$

Az $x = 2$, illetve $x = -2$ értékek behelyettesítésével kapjuk, hogy $A = \frac{1}{4}$, illetve $B = -\frac{1}{4}$.
Ezért

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 4} dx &= \int \frac{1/4}{x - 2} - \frac{1/4}{x + 2} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln |x - 2| - \frac{1}{4} \ln |x + 2| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \int_3^\infty \frac{1}{x^2 - 4} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| \right]_3^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t - 2}{t + 2} \right| - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{5} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - 2/t}{1 + 2/t} \right| - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{4} \ln 1 - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{5} = -\frac{1}{4} \ln \frac{1}{5}. \end{aligned}$$