Alkalmazott algebra (MBN412G)

2. zárthelyi dolgozat (MINTA) 2014. május 7. 2013/2014. tavaszi félév

1. Legyen $G = S_6$ és $H_1 = \{\pi \in G : |M_\pi| \text{ páros}\}$, $H_2 = \{\pi \in G : 1\pi = 1, 2\pi = 2\}$. Igaz-e, hogy H_k $(k = 1, 2)$ részcsoportja G-nek? Igaz-e, hogy H_k $(k = 1, 2)$ normális részcsoportja G-nek?

2. Határozza meg a $(\mathbb{Q}; +)$ csoport $A = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{8}\right\}$ részhalmaza által generált részcsoportot. Igaz-e, hogy $[A]$ ciklikus? Mi lesz az A részhalmaz által generált normális részcsoport?

3. Legyen $G_1 = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ és $G_1 = (\mathbb{Q}_{>0}; \cdot)$, ahol $\mathbb{Q}_> = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$. Mutassa meg, hogy a $\varphi \colon G_1 \to G_2$, $x \mapsto |x|$ leképezés homomorfizmus. Igaz-e, hogy $G_1/N \cong G_2$, ahol N a φ homomorfizmus magja?

4. Az $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 2, -1)$ bázisban a $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Határozza meg φ adjungáltját.

5. Legyenek φ és ψ olyan lineáris transzformációi a V véges dimenziós euklideszi térnek, amelyekre $\varphi^*\psi = \psi\varphi^* = 0$ teljesül. Mutassa meg, hogy ekkor $\operatorname{Im}(\varphi + \psi) = \operatorname{Im}(\varphi) \oplus \operatorname{Im}(\psi)$.

6. Legyen a $\varphi \colon \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Adjon meg bázist az $(0, 2, 0, 1, 4)$ vektor által generált invariáns altérben. Határozza meg a φ lineáris transzformáció karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját és Jordan-féle normálalakját.

7. Legyen a $\varphi \colon K^3 \to K^3$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

$(K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Határozza meg a φ lineáris transzformáció Jordan-féle normálalakját.