Alkalmazott algebra (MBN412G)

1. zárthelyi dolgozat (MINTA) 2014. március 26. 2013/2014. tavaszi félév

1. Legyen $A = \{a \in \mathbb{N} : a \leqslant 13 \text{ és } a \text{ prímszám}\}$ és definiáljuk a $\circledast$ műveletet az alábbi módon:

$$a \circledast b = a + b - 2 \text{ legnagyobb prímosztója} \qquad (a, b \in A).$$

Igaz-e, hogy $(A; \circledast)$ monoid? Igaz-e, hogy $(A; \circledast)$ Abel-csoport?

2. Legyen $A = \mathbb{R}^*$ és definiáljuk a $\circledast$ műveletet az alábbi módon:

$$\circledast \colon A \times A \to A, a \circledast b = \begin{cases} ab, & \text{ha } a > 0, \\ \dfrac{a}{b}, & \text{ha } a < 0 \end{cases} \qquad (a, b \in A).$$

Igaz-e, hogy $(A; \circledast)$ monoid? Igaz-e, hogy $(A; \circledast)$ Abel-csoport?

3. Legyen $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ és $\tau = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4\ 5)(3\ 4\ 5\ 6\ 7) \in S_9$. Határozza meg a $\sigma_1 = \pi\tau\pi^{-1}\tau^{-1}$, $\sigma_2 = \left(\pi^{-1}\tau\right)^{2014}$ és $\sigma_3 = \left(\tau^{-1}\pi\tau\right)^{2014}$ permutációk idegen ciklusokra bontott alakját, paritását és rendjét is.

4. Határozza meg a $(\mathbb{Z}_{30}^*; \cdot)$ csoportban az $a = \overline{11}$ és $b = \overline{13}$ elemek rendjét és az általuk generált $[a]$ és $[b]$ részcsoportok elemeit.

5. Határozza meg a D_8 csoportban az $a = \varphi^2$ és $b = \tau\varphi^3$ elemek rendjét és az általuk generált $[a]$ és $[b]$ részcsoportok elemeit, ahol φ a szabályos nyolcszög középpontja körüli forgatás $\pi/4$ szöggel és τ a nyolcszög két szemközti oldalának felezőpontján átmenő egyenesre vonatkozó tükrözés.

6. A G csoport a és b elemeire teljesül, hogy $b^6 = 1$ és $ab = b^4a$. Mutassa meg, hogy $b^3 = 1$ és $ab = ba$ teljesül az a és b elemekre.

7. Legyen $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformációja az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ vektortérnek,[1] amelynek mátrix a standard bázisban:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 9 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Határozza meg φ sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit. Diagonalizálható-e A_φ? Határozza meg a $v = (1, 2, 3)$ vektor által generált sajátalteret.

8. Tekintsük az $U = [(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (2, 0, 1, 4)]$ alteret az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ vektortérben. Adjon meg olyan U_1 és U_2 valódi altereit U-nak, amelyekre $U_1 \oplus U_2 = U$ teljesül.

9. Tekintsük az $U = \{(a, b, c, d) : b + 2c - d = 0\}$ alteret az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ vektortérben. Adjon meg olyan U_1 és U_2 valódi altereit U-nak, amelyekre $U_1 \oplus U_2 = U$ teljesül.

10. Legyen $U = [(1, 1, 1, 1), (1, -1, -2, -3), (5, -1, -8, -7)]$ altér az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ vektortérben. Adjon meg ortonormált bázist az $U^\perp$ altérben.

11. Legyen $U = \{(a, b, c, d) : a - b + c - d = b + c - d = 0\}$ altér az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ vektortérben. Adjon meg ortonormált bázist az $U^\perp$ altérben.

[1] A ${}_K V$ jelölés arra utal, hogy V a K test felett vektortér.