Sz-100. Legyen $R = (R; +, \cdot)$ egységelemes gyűrű, melynek egységeleme e. Definiáljuk a $*$ műveletet az alábbi módon:

$$*\colon R \times R \to R,\ a * b = a + b - a \cdot b.$$

Legyen

$$G = \{a \in R : \text{van olyan } r \in R, \text{ amelyre } a * r = r * a = 0 \text{ teljesül}\}.$$

Mutassa meg, hogy $(G; *)$ csoport és $a \in G$ pontosan akkor teljesül, ha az $e - a$ elemnek van inverze (a szorzásra vonatkozóan) R-ben. (2 pont)

Sz-101. Legyen p prímszám. Mutassa meg, hogy izomorfiától eltekintve pontosan két darab p-elemű gyűrű van. (2 pont)

Sz-102. Határozza meg az $A = (a_{i,j})_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix ($n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$) Jordan-féle normálalakját a komplex számtest felett, ahol tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ indexekre

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } 1 \leqslant i = j \leqslant n-1, \\ -1, & \text{ha } j = i+1 \text{ vagy } i = j = n, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(2 pont)

Sz-103. Határozza meg az $A = (a_{i,j})_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix ($n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$) Jordan-féle normálalakját a komplex számtest felett, ahol tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ indexekre

$$a_{i,j} = \max(j - i + 1, 0).$$

(2 pont)

Sz-104. Határozza meg az $A = (a_{i,j})_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix ($n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$) Jordan-féle normálalakját a komplex számtest felett, ahol tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ indexekre

$$a_{i,j} = \begin{cases} j, & \text{ha } j \leqslant i, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(2 pont)

Sz-105. Határozza meg az $A = (a_{i,j})_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix ($n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$) Jordan-féle normálalakját a komplex számtest felett, ahol tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ indexekre

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } i = j, \\ a_{i,j}, & \text{ha } j > i, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

és $a_{1,2}a_{2,3}\cdots a_{n-1,n} \neq 0$. (2 pont)

Sz-106. Határozza meg a $B = A^2$ mátrix Jordan-féle normálalakját a komplex számtest felett, ahol $A = (a_{i,j})_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ($n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$) és tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ indexekre

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } j = i+1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(2 pont)

Sz-107. Határozza meg az $A = (a_{i,j})_{2n\times 2n} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ mátrix ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) Jordan-féle normálalakját a komplex számtest felett, ahol tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ indexekre

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ b_i, & \text{ha } i + j = 2n + 1, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

és $b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ tetszőleges komplex számok. (2 pont)

Sz-108. Határozza meg az $A = (a_{i,j})_{2n\times 2n} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ mátrix ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) Jordan-féle normálalakját a komplex számtest felett, ahol tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ indexekre

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_i, & \text{ha } i = j, \\ b_i, & \text{ha } i + j = 2n + 1, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

és $a_1, a_2, \dots, a_{2n}, b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ tetszőleges komplex számok. (2 pont)

Sz-109. Legyen K test, $A \in K^{m\times m}$ és $B \in K^{n\times n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

(a) Ha az A, illetve B mátrix Jordan-féle normálalakja J_A, illetve J_B, akkor a $C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$ mátrix Jordan-féle normálalakja $J_C = \begin{pmatrix} J_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_B \end{pmatrix}$.

(b) Mi a kapcsolat m_A, m_B és m_C között.

(2 pont)

Sz-110. Legyen K test és $A \in K^{n\times n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Mutassuk meg, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.

(a) Az A mátrix hasonló egy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

alakú mátrixhoz.

(b) Az A mátrix χ_A karakterisztikus polinomja és m_A minimálpolinomja asszociált.

(2 pont)

Sz-111. Bizonyítsa be, hogy minden $\mathbb{C}$ feletti négyzetes mátrix előáll két szimmetrikus mátrix szorzataként. (2 pont)

Sz-112. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan mátrix ($n \in \mathbb{N}$), amelyre $A^m = E_n$ teljesül valamely $m \in \mathbb{N}$-re. Mutassa meg, hogy A diagonalizálható. (Az E_n mátrix az $n \times n$-es egységmátrix.) (2 pont)

Sz-113. Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{df_1}{dt} = 5f_1 - 6f_2 - 6f_3,$$
$$\frac{df_2}{dt} = -f_1 + 4f_2 + 2f_3,$$
$$\frac{df_3}{dt} = 3f_1 - 6f_2 - 4f_3.$$

(2 pont)