Legyenek G és H csoportok, $\varphi\colon G \to H$ homomorfizmus. Tetszőleges $S \leqslant G$ és $T \leqslant H$ részcsoportokra legyen

$$\varphi_*(S) = \{\varphi(s) : s \in S\} \subset H,$$
$$\varphi^*(T) = \{g \in G : \varphi(g) \in T\} \subset G.$$

Legyenek S és S' részcsoport a G csoportban. Ekkor $S \vee S'$-mal jelöljük az $[S \cup S'] \leqslant G$ részcsoportot.

Sz-84. Legyenek G és H csoportok, $\varphi\colon G \to H$ (csoport) homomorfizmus, valamint legyen $S, S' \leqslant G$ és $T, T' \leqslant H$. Igazolja az alábbiakat:

(a) $\varphi_*(S \cap S') \subseteq \varphi_*(S) \cap \varphi_*(S')$;

(b) $\varphi_*(S \vee S') = \varphi_*(S) \vee \varphi_*(S')$;

(c) $\varphi^*(T \cap T') = \varphi^*(T) \cap \varphi^*(T')$;

(d) $\varphi^*(T) \vee \varphi^*(T') \subseteq \varphi^*(T \vee T')$.

Mutassa meg, hogy az (a) és (d) esetekben valódi tartalmazás is teljesülhet. (2 pont)

Sz-85. Bizonyítsa be, hogy ha H valódi részcsoportja G-nek, akkor $\bigcup_{g\in G} g^{-1}Hg \subsetneq G$. (2 pont)

Sz-86. Legyenek G és H csoportok, G véges, valamint $\varphi\colon G \to H$ homomorfizmus, melynek magja $N = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Bizonyítsa be, hogy G tetszőleges S részcsoportjára

$$[G : S] = [\varphi_*(G) : \varphi_*(S)] \cdot [N : S \cap N]$$

teljesül. (3 pont)

Sz-87. Tetszőleges G csoportra legyen $[G, G] = \left[\left\{g^{-1}h^{-1}gh : g, h \in G\right\}\right]$. Igazolja az alábbiakat:

(a) $[G, G] \lhd G$;

(b) ha A Abel-csoport és $\varphi\colon G \to A$ homomorfizmus, akkor $[G, G] \subseteq \mathrm{Ker}\,(\varphi)$.

(1 pont)

Sz-88. Legyen $\varphi\colon G \to H$ homomorfizmus a G és H csoportok között, valamint legyen T részcsoportja H-nak. Bizonyítsa be, hogy

(a) $T \lhd H$ pontosan akkor teljesül, ha $\varphi^*(T) \lhd G$;

(b) ha $T \lhd H$, akkor $G/\varphi^*(T) \cong H/T$.

(2 pont)

Sz-89. Legyen A nemüres halmaz és $/\colon A \times A \to A,\ (a, b) \mapsto a/b$ olyan művelet A-n, amelyre

$$a/\Big(\big(((a/a)/b)/c\big)/\big(((a/a)/a)/c\big)\Big) = b$$

teljesül tetszőleges $a, b \in A$ elemekre. Mutassa meg, hogy bármely $a, b \in A$ esetén

$$a/(b/b) = a \qquad \text{és} \qquad a/a = b/b$$

teljesül. Mutassa meg, hogy $(A; \cdot, {}^{-1}, e)$ csoport, ahol

$$a \cdot b = a/\big((a/a)/b\big) \ (a, b \in A),$$
$$a^{-1} = (a/a)/a \ (a \in A),$$
$$e = a/a \ (a \in A).$$

(5 pont)

Sz-90. Legyen S szimmetrikus, Q ortogonális mátrix és $C = SQ$. Mutassa meg, hogy $S^2 = CC^T$. (1 pont)

Sz-91. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $V = \{p \in \mathbb{R}[x] : p^* \leqslant n\}$ és

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt \quad (p, q \in V).$$

Mutassa meg, hogy a $\varphi\colon V \to V,\ p \mapsto \big((1-x^2)p'\big)'$ transzformáció lineáris és határozza meg a φ lineáris transzformáció adjungáltját. (2 pont)

Sz-92. Mutassa meg, hogy véges dimenziós euklideszi tér bármely φ lineáris transzformációjára az

(a) φ önadjungált, (b) φ ortogonális (c) $\varphi^2 = \mathrm{id}$

feltételek bármelyike következik a másik kettőből. Van-e olyan, amelyik pusztán egy másikból is következik? Milyen φ lineáris transzformációkra teljesül mindhárom feltétel? (2 pont)

Sz-93. Igazolja, hogy egy ortogonális transzformáció karakterisztikus polinomjának minden valós gyöke 1 abszolút értékű. (2 pont)

Sz-94. Igazolja, hogy euklideszi tér belsőszorzatőrző transzformációja szükségképpen lináris. (1 pont)

Sz-95. Legyen V euklideszi tér, $U \leqslant V$ és $v \in V$. Bizonyítsa be, hogy az $U + v$ halmaz pontosan egy olyan vektort tartalmaz, amely merőleges U-ra. Igazolja, hogy ezen elem normája a legkisebb $U + v$-ben. (2 pont)

Sz-96. Igazolja, hogy lineáris transzformáció sajátaltereinek összege direkt összeg. (1 pont)

Sz-97. Legyen V vektortér és $v \in V$. Mutassa meg, hogy a

$$\{\varphi \in L(V) : v \text{ sajátvektora } \varphi\text{-nek}\}$$

halmaz altere $L(V)$-nek; adja meg a dimenzióját is ezen altérnek.

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Igaz-e, hogy a

$$\{\varphi \in L(V) : \lambda \text{ sajátértéke } \varphi\text{-nek}\}$$

halmaz altere $L(V)$-nek? (2 pont)

Sz-98. Definiálható-e az $\mathbb{R}^4$ vektortéren olyan belső szorzatot, amelyre nézve az $(2, 0, 1, 4)$ és a $(2, 0, 1, 5)$ vektorok ortogonálisak? (1 pont)

Sz-99. Legyen V véges dimenziós vektortér, $\varphi, \psi \in L(V)$. Igaz-e, hogy a $\varphi\psi$ és $\psi\varphi$ transzformációk sajátértékei megegyeznek? (2 pont)