Sz-66. Jelölje D_∞ az alábbi alakzat szimmetriacsoportját:

$$\cdots\ \mathrm{TTTTTTTTTTTTT}\ \cdots$$

Döntse el, hogy izomorfak-e egymással a következő csoportok:

(a) a kör szimmetriacsoportja és D_∞;

(b) D_∞ és $\left\{\begin{pmatrix} u & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{Q}, 2) : u \in \{-1, 1\}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(1 pont)

Sz-67. Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok:

(a) $\mathbb{Q}^+$ és $(\mathbb{Z}[x]; +)$; (b) $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}^+$.

(3 pont)

Sz-68. Adjon meg olyan részcsoportot a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban, mely izomorf az alábbi csoporttal:

(a) D_4; (b) S_3; (c) $\mathbb{C}^*$.

(3 pont)

Sz-69. Igazolja, hogy ha a G csoport A részhalmaza valamely részcsoport szerinti bal oldali mellékosztály, akkor G-nek van olyan részcsoportja is, amely szerint A jobb oldali mellékosztály. (1 pont)

Sz-70. Igazolja, hogy ha H, K részcsoportja a G véges csoportnak, akkor $|HK| = \dfrac{|H|\,|K|}{|H \cap K|}$. (2 pont)

Sz-71. Legyen n páratlan természetes szám. Bizonyítsa be, hogy minden $2n$ rendű Abel-csoport pontosan egy másodrendű elemet tartalmaz. (1 pont)

Sz-72. Izomorfia erejéig határozza meg az összes legfeljebb hatodrendű csoportot. (3 pont)

Sz-73. Igazolja, hogy tetszőleges G csoport esetén $\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$. (2 pont)

Sz-74. Keressen (minél kisebb elemszámú) olyan G csoportot, amelyben vannak olyan M, N részcsoportok, amelyekre $M \lhd N$, $N \lhd G$, de M nem normálosztó G-ben. (1 pont)

Sz-75. Bizonyítsa be, hogy ha a H részcsoport indexe a G csoportban 2, akkor $G \setminus H$ minden eleme páros rendű. Majd mutassa meg, hogy az A_4 csoportban nincsen hatodrendű részcsoport. (2 pont)

Sz-76. Határozza meg az S_4 csoport összes normálosztóját és összes faktorcsoportját, és minden esetben határozza meg, hogy milyen „ismert” csoporttal izomorf a szerinte vett faktorcsoport. (1 pont)

Sz-77. Igazolja, hogy a G csoportban megadott N részcsoport normálosztó. Milyen „ismert” csoporttal izomorf G/N?

(a) $G = \mathrm{GL}(K, n)$, $N = \mathrm{SL}(K, n)$, ahol K test és $n > 1$ pozitív egész;

(b) $G = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{Z}$.

(2 pont)

Sz-78. Keresse meg a D_n ($n \geq 3$) csoport összes valódi nemtriviális normálosztóját, és minden esetben határozza meg, hogy milyen „ismert” csoporttal izomorf a szerinte vett faktorcsoport. (3 pont)

Sz-79. Legyen n természetes szám és $u_1, \ldots, u_n$ bázis a V euklideszi térben. Mutassa meg, hogy pontosan egy olyan $v_1, \ldots, v_n$ bázis létezik V-ben, amelyre

$$\langle u_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

teljesül minden i, j-re ($1 \leqslant i, j \leqslant n$). (2 pont)

Sz-80. Legyen $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ olyan mátrix, melynek köbe $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Határozza meg A sajátértékeit.

(b) Mutassa meg, hogy ha $A^2 \neq 0$, akkor A hasonló az $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixhoz.

(2 pont)

Sz-81. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Mikor diagonalizálható az A mátrix? (2 pont)

Sz-82. Legyen V véges dimenziós vektortér az F test felett, és legyen $P\colon V \to V$ olyan lineáris transzformációja V-nek, amelyre $P^2 = P$ teljesül, de $P \neq 0$ és $P \neq \mathrm{id}_V$.

(a) Mutassa meg, hogy P sajátértékei 0 és 1. Mik lesznek a hozzájuk tartozó sajátalterek?

(b) Bizonyítsa be, hogy P diagonalizálható és $r(A_P) = \mathrm{tr}(A_P)$.

(c) Határozza meg P karakterisztikus és minimálpolinomját.

(2 pont)

Sz-83. Legyen $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ olyan, hogy $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, valamint legyen a $A = \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}$.
Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ vektortér $S = \left\{(w_1, w_2, w_3)^T \in \mathbb{R}^3 : v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0\right\}$ részhalmazát. Igazolja az alábbiakat.

(a) $A^2w = -w + \langle v, w\rangle \cdot v$ $(w \in \mathbb{R}^3)$;

(b) S valódi altere $\mathbb{R}^3$-nak;

(c) az S altér φ invariáns, ahol $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ w \mapsto Aw$;

(d) a φ és $\varphi|_S$ transzformációk egyike sem diagonalizátlható $\mathbb{R}$ felett.

(2 pont)