Sz-41. Legyen p prímszám. Mutassa meg, hogy az

$$E_{p^\infty} = \left\{u \in \mathbb{C}^* : \text{van olyan } k \in \mathbb{N}_0,\ \text{amelyre } u^{p^k} = 1\right\}$$

halmaz részcsoportot alkot a $\mathbb{C}^*$ csoportban. (1 pont)

Sz-42. Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportját:

(a) $G = S_5,\ A = \{(1\ 2\ 3), (3\ 4\ 5)\}$; (b) $G = \mathbb{Q},\ A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$.

(2 pont)

Sz-43. Döntse el, hogy ciklikusak-e az alábbi csoportok:

(a) A_3; (b) $\mathbb{Z}_{18}^*$; (c) D_3.

(1 pont)

Sz-44. Adjon meg $1, 2$, illetve 3 elemű minimális generátorrendszert az alábbi csoportokban:

(a) D_6; (b) Q; (c) S_6.

(1 pont)

Sz-45. Határozza meg az alábbi csoportok összes részcsoportját, valamint rajzolja fel annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a részcsoportok halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve:

(a) A_4; (b) Q; (c) D_4.

(2 pont)

Sz-46. Legyen n tetszőleges természetes szám és H olyan részcsoportja S_n-nek, amely páratlan sok elemet tartalmaz. Mutassa meg, hogy H minden eleme páros permutáció. (2 pont)

Sz-47. Mutassa meg, hogy minden Abel-csoport

(a) véges rendű elemeinek halmaza; (b) legfeljebb másodrendű elemeinek halmaza

részcsoportot alkot. Adjon példát olyan Abel-csoportra, melyben a legfeljebb harmadrendű elemek nem alkotnak részcsoportot. (1 pont)

Sz-48. Igazolja, hogy bármely G csoportra és annak bármely H és K részcsoportjaira $H \cup K$ pontosan akkor részcsoport, ha $H \subseteq K$ vagy $K \subseteq H$. (1 pont)

Sz-49. Adjon példát olyan G csoportra és annak olyan H és K részcsoportjaira, amelyekre HK nem részcsoportja G-nek. (1 pont)

Sz-50. Mely $n \geqslant 3$ természetes számok esetén generátorrendszere az

$$\{(1\ 2\ 3), (1\ 2\ \ldots n)\}$$

halmaz az S_n csoportnak? (2 pont)

Sz-51. Igaz-e, hogy egy csoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részcsoportja van? (2 pont)

Sz-52. Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoport minden végesen generált részcsoportja ciklikus, és adjon meg olyan valódi részcsoportját, amely nem ciklikus. (3 pont)

Sz-53. Bizonyítsa be, hogy az E_{p^∞} (p prímszám) csoport minden valódi részcsoportja ciklikus. (3 pont)

Sz-54. Bizonyítsa be, hogy a $\mathbb{Q}$ csoportnak, valamint az E_{p^∞} (p prímszám) csoportoknak nincs minimális generátorrendszere. (3 pont)

Sz-55. Tetszőleges $n \geqslant 3$ esetén határozza meg a D_n csoport összes részcsoportját. (3 pont)

Sz-56. Igazolja, hogy egy ortogonális transzformáció karakterisztikus polinomjának minden valós gyöke 1 abszolút értékű. Adjon példát olyan ortogonális transzformációra, amelynek nincs valós sajátértéke. (1 pont)

Sz-57. Bizonyítsa be, hogy bármely $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrixhoz létezik olyan $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ortogonális mátrix, amelyre

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

A lehetséges B mátrixok meghatározása után fogalmazza meg a fenti állítás geometria jelentését. (2 pont)

Sz-58. Adjon meg olyan $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris transzformációt, amelyre a $v = (1, -1, 1, 0)$ vektor által generált invariáns altér 3 dimenziós. (2 pont)

Sz-59. Legyen V vektortér, $\varphi \in L(V)$ és $v \in V$. Igazolja, hogy az $U_{\varphi,v} = \{u \in \langle v\rangle : u\varphi = u\}$ altér legfeljebb 1 dimenziós. Adjon példát olyan $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformációra és $v \in V$ vektorra, amelyre az $U_{\varphi,v}$ altér d dimenziós ($d \in \{0, 1\}$). (1 pont)

Sz-60. Legyen $V = \mathbb{R}[x]$. Mutassa meg, hogy V euklideszi tér a $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ belső szorzattal. Tetszőleges $p \in V$-re legyen $f_p\colon V \to V$, $q \mapsto pq$. Határozza meg f_p adjungáltját. (2 pont)

Sz-61. Legyen V véges dimenziós euklideszi tér és $\varphi \in L(V)$. Bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{Im}(\varphi^*) = (\operatorname{Ker}(\varphi))^\perp \qquad \text{és} \qquad \operatorname{Ker}(\varphi^*) = (\operatorname{Im}(\varphi))^\perp .$$

(1 pont)

Sz-62. Legyen A egy nemnegatív elemű négyzetes mátrix. Tegyük fel, hogy A invertálható és A^{-1} is nemnegatív elemű. Igazoljuk, hogy ekkor A minden sorában és oszlopában pontosan egy pozitív elem áll. (2 pont)

Sz-63. Igazolja, hogy ha az A és B szimmetrikus mátrixok szorzata is szimmetrikus, akkor $AB = BA$.(2 pont)

Sz-64. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot az

$$\begin{aligned} &a_1 = 1,\ a_2 = 1, \\ &a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3) \end{aligned}$$

rekurzió definiálja. Határozza meg a sorozat általános elemének „zárt” alakját. (2 pont)

Sz-65. Az a_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot az

$$\begin{aligned} &a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1 \\ &a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 4a_{n-3}\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4) \end{aligned}$$

rekurzió definiálja. Határozza meg a sorozat általános elemének „zárt” alakját. (3 pont)