Sz-26. Oldja meg S_6-ban az alábbi egyenleteket:
(a) $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$; (b) $\pi^2 = (1\ 2)(3\ 4)$; (c) $\pi^3 = (1\ 2\ 3)$.
(1 pont)

Sz-27. Milyen lehet a szerkezete
(a) egy 2 és egy $n > 2$ hosszúságú; (b) egy 3 és egy $n > 3$ hosszúságú
ciklus szorzatának (ebben, illetve a fordított sorrendben)? (2 pont)

Sz-28. Legyen π az A halmaz egy permutációja. Adott $a \in A$ esetén az a elem *pályája* az $\left\{a\pi^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ halmaz.
(a) Igazolja, hogy a pályák halmaza osztályozása A-nak.
(b) Adja meg a $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto -k$ és a $\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto k-1$ permutációk pályáit.
(1 pont)

Sz-29. Véges A halmaz esetén mi a kapcsolat a $\pi \in S_A$ permutáció pályái és π páronként idegen ciklusokra bontott alakja között? (1 pont)

Sz-30. A páronként idegen ciklusokra bontott alak segítségével adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra, hogy egy permutáció előálljon valamely permutáció négyzeteként (azaz második hatványaként). (2 pont)

Sz-31. Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
(a) tetszőleges $\pi \in S_n$ permutációhoz létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\pi^k = \mathrm{id}$;
(b) létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $\pi^k = \mathrm{id}$ teljesül minden $\pi \in S_n$ permutáció esetén.
(1 pont)

Sz-32. Bizonyítsa be, hogy minden S_n-beli permutáció felírható legfeljebb $(n-1)$ darab transzpozíció szorzataként ($n \in \mathbb{N}$). (1 pont)

Sz-33. Igazolja, hogy egy n hosszúságú ciklus nem írható fel $(n-1)$-nél kevesebb transzpozíció szorzataként ($n \in \mathbb{N}$). (3 pont)

Sz-34. Legyen $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$. Igazolja, hogy minden S_n-beli permutáció előáll
(a) az $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$ transzpozíciók; (b) az $(1\ 2)$ és $(1\ 2\ \ldots\ n)$ ciklusok
szorzataként. (2 pont)

Sz-35. Legyen $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$. Igazolja, hogy minden A_n-beli permutáció előáll
(a) az összes 3 hosszúságú ciklus;
(b) az $(1\,2\,3), (1\,2\,4), \ldots, (1\,2\,n)$ ciklusok;
(c) az $(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4), \ldots, (n-2\ n-1\ n)$ ciklusok
szorzataként. (3 pont)

Sz-36. Legyen n rögzített, 1-nél nagyobb természetes szám. Bizonyítsa be, hogy ha két S_n-beli ciklus felcserélhető egymással, akkor mozgatott elemeik halmaza vagy diszjunkt, vagy egybeesik. (2 pont)

Sz-37. Legyen $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ az a lineáris transzformációja a komplex számtest feletti $\mathbb{C}^n$ vektortérnek ($n \in \mathbb{N}$), amely a standard bázis elemeit ciklikusan permutálja: $e_k\varphi = e_{k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ és $e_n\varphi = e_1$. Határozza meg φ sajátértékeit és sajátvektorait. (3 pont)

Sz-38. Egészítse ki az $(1, -1, 1, 1)$ vektorrendszert olyan ortogonális bázissá, melyben a vektorok koordinátái egész számok. (1 pont)

Sz-39. Bizonyítsa be, hogy minden legalább két dimenziós euklideszi térben végtelen sok ortonormált bázis van. (2 pont)

Sz-40. Legyen V egy n-dimenziós euklideszi tér ($n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$). Adjon meg V-ben végtelen sok olyan vektort, amelyek közül bármely n lineárisan független, de semelyik kettő sem ortogonális. (2 pont)