Alkalmazott algebra

Szorgalmi feladatok (2.) | MBN412G | 2013/2014. tavaszi félév

Sz-10. Legyen $T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Mutassa meg, hogy $(T; +)$ és $(T \setminus \{O\}; \cdot)$ is csoportok, ahol $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (1 pont)

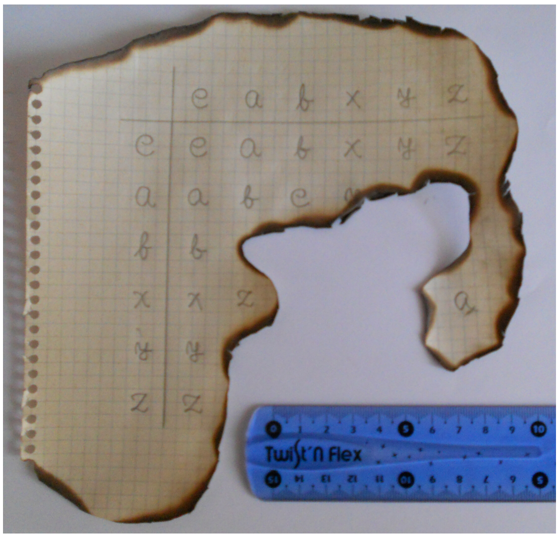
Sz-11. Legyen $G = \{\ell_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a \cdot x + b : a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$. Mutassa meg, hogy $(G; \circ)$ csoport, ahol $\circ$ a leképezésszorzás. (1 pont)

Sz-12. Tekintsük a

$$\circledast \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ x \circledast y = \begin{cases} x \cdot y, & \text{ha } a > 0, \\ \dfrac{x}{y}, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

művelet, és legyen $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \circledast)$. Mutassa meg, hogy G csoport. (1 pont)

Sz-13. Egy a legújabb kori Szegedről származó kockás füzet megsárgult, megégett lapján az alábbi töredékes ábrát találták az Alapítvány régészei:



Egy az ősi matematikatörténetben jártas tudós azt mondta, hogy „Polgártársaim! Nagy nap ez a mai! Én úgy gondolom, hogy ez a töredék egy csoport Cayley-táblázatának a részlete. Lehet, hogy mégsem voltak olyan barbárok azok az ősi Magyarok!". Igaza volt-e a professzornak? (1 pont)

Sz-14. Legyen c rögzített pozitív valós szám. Csoportot alkot-e az $R_c = \{r \in \mathbb{R} : |r| < c\}$ halmaz a

$$\circledast \colon R_c \times R_c \to R_c,\ r \circledast s = \frac{r+s}{1 + \dfrac{rs}{c^2}}$$

műveletre nézve. (1 pont)

Sz-15. A D_n $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3)$ n-edfokú diédercsoportban jelölje φ a középpont körüli $\dfrac{2\pi}{n}$ szögű forgatást, τ pedig az egyik tengelyes tükrözést. Igazolja a következőket:

(a) $\varphi\tau = \tau\varphi^{-1}$;

(b) $D_n = \{\mathrm{id}, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}, \tau, \varphi\tau, \varphi^2\tau, \ldots, \varphi^{n-1}\tau\}$.

Határozza meg, hogy a fent felsorolt elemek közül melyikkel egyenlők a következő elemek:

$$\tau\varphi, \tau\varphi^2, \ldots, \tau\varphi^{n-1}, \tau\varphi^{-2}, (\varphi\tau\varphi)^{2014}, (\tau\varphi^{-1}\tau)^{n-1}, (\varphi\tau\varphi^3\tau^{-5}\varphi^{-1})^{10n-50}.$$

(3 pont)

Sz-16. Adjon meg olyan alakzatot a síkban, melynek szimmetriacsoportja 1, 2, 3, illetve 4 elemű. Adjon meg olyan alakzatot a síkban, melynek szimmetria- és mozgáscsoportja is 4 elemű. (1 pont)

Sz-17. Írja le a kör mozgás- és szimmetriacsoportját. (2 pont)

Sz-18. Hány eleme van a szabályos tetraéder mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának? (2 pont)

Sz-19. Hány eleme van a kocka mozgás-, illetve szimmetriacsoportjának? (3 pont)

Sz-20. Adjon meg olyan elemet a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2)$ csoportban, amelyben nem szerepel 0, azonban csak véges sok különböző hatványa van. (1 pont)

Sz-21. Adjon meg olyan elemet a $\mathrm{GL}(\mathbb{R}, 3)$ csoportban, amelyben nem szerepel 0, azonban csak véges sok különböző hatványa van. (2 pont)

Sz-22. Adja meg az n-edik komplex egységgyökök E_n csoportjának elemeit, és mindegyik esetén azt is, hogy hány különböző hatványa van. (2 pont)

Sz-23. Legyen V_n a legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok vektortere a valós számtest felett ($n \in \mathbb{N}$). Igaz-e, hogy $V_n = \mathrm{Ker}(D) \oplus \mathrm{Im}(D)$, ahol D a differenciálás, azaz

$$D\colon V_n \to V_n,\ D(f) = f'.$$

(1 pont)

Sz-24. Legyen V véges dimenziós vektortér és $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformációja V-nek. Bizonyítsa be, hogy

$$V \supseteq \mathrm{Im}(\varphi) \supseteq \mathrm{Im}(\varphi^2) \supseteq \mathrm{Im}(\varphi^3) \supseteq \cdots,$$
$$\{0\} \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi^2) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi^3) \subseteq \cdots.$$

Mutassa meg, hogy van olyan k természetes szám, amelyre $\mathrm{Im}(\varphi^k) = \mathrm{Im}(\varphi^{k+1})$ teljesül. Majd igazolja, hogy

$$V = \mathrm{Im}(\varphi^k) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi^k),$$

és az $\mathrm{Im}(\varphi^k)$, $\mathrm{Ker}(\varphi^k)$ alterek φ-invariánsak. (3 pont)

Sz-25. Legyen $\mathfrak{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ bázis az $\mathbb{R}$ feletti $V = \mathbb{R}^4$ vektortérben. Tetszőleges $v \in V$ vektor koordinátasora a $\mathfrak{B}$ bázisban legyen $(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)})$. Tekintsük az alábbi U_1, U_2 részhalmazokat V-ben:

$$U_1 = \left\{v \in V : v^{(3)} = v^{(2)} \text{ és } v^{(4)} = v^{(1)}\right\},$$
$$U_2 = \left\{v \in V : v^{(3)} = -v^{(2)} \text{ és } v^{(4)} = -v^{(1)}\right\}.$$

Igazolja az alábbiakat.

(a) U_1 és U_2 alterek V-ben;

(b) $\{b_1 + b_4, b_2 + b_3\}$ bázis U_1-ben és $\{b_1 - b_4, b_2 - b_3\}$ bázis U_2-ben;

(c) $V = U_1 \oplus U_2$.

Határozza meg az $\mathrm{id}_V\colon V \to V,\ v \mapsto v$ lineáris transzformáció mátrixát a $\mathfrak{B}$ és a $\mathfrak{C} = \{b_1 + b_4, b_2 + b_3, b_1 - b_4, b_2 - b_3\}$ bázisokban. (2 pont)