Alkalmazott algebra

Szorgalmi feladatok (1.) | MBN412G | 2013/2014. tavaszi félév

Sz-1. Legyen V n-dimenziós vektortér, φ pedig V-nek olyan lineáris transzformációja, amelyre $\varphi^2 = \varphi$ teljesül. Bizonyítandó:

(a) $\mathrm{Im}(\varphi) = \{v \in V : v\varphi = v\}$;

(b) $\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Ker}(\varphi) = V$ és $\mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$;

(c) V-nek van olyan $v_1, \ldots, v_n$ bázisa, hogy $v_i\varphi \in \{v_i, 0\}$ teljesül minden i-re $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

(3 pont)

Sz-2. Mely n-ekre és $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ szögekre pozitív definit a

$$2\cos\alpha \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

kvadratikus alak? (3 pont)

Sz-3. Határozza meg a $V = \mathbb{R}^3$ tér $e = \{(t, 2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}$ egyenese körüli $\dfrac{2\pi}{3}$ szögű forgatás mátrixát a standard bázisban. (2 pont)

Sz-4. Legyen $V = \mathbb{R}^3$ és $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in V : 3x + y - z = 0\}$. Határozza meg az $\mathcal{S}$ síkra való tükrözés mátrixát az $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$ bázisban. (2 pont)

Sz-5. Azt mondjuk, hogy az n természetes szám G-szám, ha $\varphi(n) = 2^m$ teljesül valamely $m \in \mathbb{N}_0$-ra. Mutassa meg, hogy végtelen sok G-szám van. Határozza meg a 10^4-nél kisebb G-számokat. (2 pont)

Sz-6. Határozza meg az $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x + 6 \in \mathbb{Z}[x]$ polinom irreducibilis felbontását. (2 pont)

Sz-7. Legyen $n \geqslant 2$ pozitív egész szám. Határozza meg az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egész számok összegét. (2 pont)

Sz-8. Legyen $K = \mathbb{R}$ és $V = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$. Definiáljuk az $\oplus$ összeadást és $\otimes$ skalárral való szorzást a következőképpen:

$$r \oplus s = rs, \quad \lambda \odot r = r^\lambda \qquad (r, s \in V, \lambda \in K).$$

(Az egyenlőségek jobb oldalán a valós számok szorzása, illetve hatványozása szerepel.) Vektorteret kapunk-e így? (1 pont)

Sz-9. Legyen $K = \mathbb{Q}$ és $V = \mathbb{Z}$. Definiáljuk az $\oplus$ összeadást és $\otimes$ skalárral való szorzást a következőképpen:

$$r \oplus s = r + s, \quad \lambda \odot r = \lfloor \lambda r \rfloor \qquad (r, s \in V, \lambda \in K).$$

(Az egyenlőségek jobb oldalán a valós számok összeadása és szorzása szerepel, $\lfloor x \rfloor$ az x valós szám egész része.) Vektorteret kapunk-e így? (1 pont)