7.1. Feladat. Legyen λ tetszőleges valós szám, és legyen

$$R_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & y \\ \lambda y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mutassa meg, hogy $R_\lambda \leqslant \mathbb{R}^{2\times 2}$. Igaz-e, hogy R_{-1} test?

7.2. Feladat. Határozza meg az $x^2 + x = 0$ egyenlet megoldásait az R gyűrűben, ahol R az $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{41}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ gyűrűk valamelyike.

7.3. Feladat. Legyen $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Mutassa meg, hogy

$$F = \{p \cdot E_2 + q \cdot A : p, q \in \mathbb{Q}\}$$

részgyűrűje a $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ gyűrűnek. Igaz-e, hogy F test?

7.4. Feladat. Legyen R kommutatív gyűrű, $I \lhd R$, és legyen

$$\sqrt{I} = \{r \in R : r^n \in I \text{ teljesül valamely } n \in \mathbb{N}\text{-re}\}.$$

Igazolja az alábbiakat:

(a) $I \subseteq \sqrt{I}$, $\sqrt{I} \lhd R$ és $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$;

(b) ha $J \lhd R$, akkor $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$;

(c) ha $J \lhd R$ és $I \subseteq J \subseteq \sqrt{I}$, akkor $\sqrt{J} = \sqrt{I}$.

7.5. Feladat. Legyen

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ -b\sqrt{5} & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$I = \left\{ \begin{pmatrix} c & -(c+3d)\sqrt{5} \\ -(c+3d)\sqrt{5} & c \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Mutassa meg, hogy $I \lhd R \leqslant \mathbb{R}^{2\times 2}$ és I nem főideál R-ben.

7.6. Feladat. Legyen $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$. Mutassa meg, hogy F egységelemes gyűrű, amelyben minden, a zéruselemtől különböző elemeknek van inverze. Igazolja, hogy az

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$$

leképezés injektív homomorfizmus, valamint $F \cong \mathbb{R}$.

7.7. Feladat. Legyen α az alábbi leképezés:

$$\alpha\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ f \mapsto \begin{pmatrix} f(0) & 0 \\ f'(0) & f(0) \end{pmatrix}.$$

Mutassa meg, hogy α homomorfizmus, majd határozza meg α mag- és képterét.

7.8. Feladat. Legyen F az összes $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok halmaza, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$. Mutassa meg, hogy F részteste az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gyűrűnek, amely izomorf a $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - x + 1)$ testtel.

$\ulcorner\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit\urcorner$

7.9. Feladat. Hozza kanonikus alakra az R gyűrű feletti A mátrixot:

(a) $R = \mathbb{Z}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $R = \mathbb{Z}[i]$, $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 1+i & 0 \\ 0 & 3+i \end{pmatrix}$;

(c) $R = \mathbb{Q}[x]$, $A = \begin{pmatrix} x^3 - x & 2x^2 \\ x^2 + 5x & 3x \end{pmatrix}$;

(d) $R = \mathbb{R}[x]$, $A = \begin{pmatrix} 2-x & 3 & 7 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix}$.

7.10. Feladat. Határozza meg az összes olyan $\mathbb{Q}$ feletti Jordan-mátrixot, amely $n \times n$-es és minimálpolinomja m:

(a) $n = 4$, $m = (x+1)^2$;

(b) $n = 6$, $m = (x+2)^2(x-1)$;

(c) $n = 7$, $m = (x+1)^2(x-3)$;

(d) $n = 6$, $m = (x^3+x+1)(x-1)$.

7.11. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n \in \mathbb{N})$.
