6.1. Feladat. Homomorfizmusok-e az alábbi leképezések?

(a) $\varphi\colon S_n \to S_n,\ \pi \mapsto \pi(1\ 2\ 3)\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3)$;
(b) $\varphi\colon S_n \to S_n,\ \pi \mapsto (2\ 3)\pi(2\ 3)\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3)$;
(c) $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6,\ \overline{n} \mapsto \overline{n}$;
(d) $\varphi\colon \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_6,\ \overline{n} \mapsto \overline{2n}$.

Határozza meg a homomorfizmusok magját is.

Legyenek G és H csoportok, $\varphi: G \to H$ (csoport) homomorfizmus. Tetszőleges $S \leqslant G$ és $T \leqslant H$ részcsoportokra legyen

$$\varphi_*(S) = \{\varphi(s) : s \in S\} \subset H \qquad \text{és} \qquad \varphi^*(T) = \{g \in G : \varphi(g) \in T\} \subset G.$$

6.2. Feladat. Legyenek G és H csoportok, $\varphi\colon G \to H$ (csoport) homomorfizmus, valamint legyen $S, S' \leqslant G$ és $T, T' \leqslant H$. Igazolja az alábbiakat:

(a) $\varphi_*(S) \leqslant H$ és $\varphi^*(T) \leqslant G$;
(b) $S \subseteq \varphi^*(\varphi_*(S))$ és $\varphi_*(\varphi^*(T)) \subseteq T$.

6.3. Feladat. Legyen $p > 2$ prímszám. Határozza meg D_p normális részcsoportjait.

6.4. Feladat. Legyen H részcsoport a G csoportban. Mutassa meg, hogy $\bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg$ normális részcsoportja G-nek.

6.5. Feladat. Mutassa meg, hogy ha a G csoport rendje 6, akkor $G \cong \mathbb{Z}_6$ vagy $G \cong S_3$.

⌜♣♢♡♠⌟

6.6. Feladat. Legyen a $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & -1 \\ -7 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Adjon meg bázist az $(1, 1, -1, 0)$ vektor által generált invariáns altérben.

6.7. Feladat. Azt mondjuk, hogy a $\varphi \in L(V)$ transzformáció *nilpotens*, ha $\varphi^n = 0$ teljesül valamely $n \in \mathbb{N}$-re. Igaz-e, hogy nilpotens transzformáció egyetlen sajátértéke a 0 valós szám?

6.8. Feladat. Adjon meg olyan lineáris transzformációt, amelynek sajátvektorai $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ és sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

6.9. Feladat. Adjon példát olyan ortogonális transzformációra, amelynek nincs valós sajátértéke.

6.10. Feladat. Mutassa meg, hogy nincs olyan $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix, amelyre $A^2 + E_3 = O_3$ teljesül, ahol $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.11. Feladat. Határozza meg annak a $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris transzformációnak a minimálpolinomját, melynek mátrixa a standard bázisban

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$