5.1. Feladat. Döntse el, hogy izomorfak-e egymással az alábbi csoportok:

(a) $\mathbb{Z}_6^*$ és $\mathbb{Z}_4^*$; (b) $\mathbb{Z}_{15}^*$ és $\mathbb{Z}_8$; (c) D_4 és Q;

(d) a kör szimmetriacsoportja és $\mathbb{C}^*$;

(e) a kör mozgáscsoportja és az 1 abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportja;

(f) $\mathrm{GL}(K, n)$ és $\mathrm{GL}(V)$, ahol V n-dimenziós vektortér a K test felett.

5.2. Feladat. Határozza meg a megadott G csoport H részcsoportja szerinti bal, illetve jobb oldali mellékosztályozást, és döntse el, hogy H normálosztó-e:

(a) $G = [a],\ H = [a^d]$, ahol $o(a) = n \in \mathbb{N},\ d \mid n$; (b) $G = D_n,\ H = [\varphi\tau]$, ahol $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$;

(c) $G = D_{2n},\ H = [\varphi^n]$, ahol $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$; (d) $G = S_4,\ H = V$;

5.3. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha $H, K \leqslant G$ olyan véges részcsoportok, amelyek rendje egymáshoz relatív prím, akkor $H \cap K = \{1\}$.

5.4. Feladat. A Lagrange-tétel alkalmazásával határozza meg a D_6 és Q csoport összes részcsoportját. Továbbá döntse el, hogy a részcsoportok közül melyek normálosztók, és adja meg a normálosztók részbenrendezett halmazának Hasse-diagramját is.

5.5. Feladat. Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált normálosztóját:

(a) $G = S_4,\ A = \{(1\ 3)(2\ 4)\}$; (b) $G = D_6,\ A = \{\varphi\}$; (c) $G = D_6,\ A = \{\varphi^2\}$;

(d) $G = D_6,\ A = \{\varphi\tau\}$; (e) $G = Q,\ A = \{i\}$; (f) $G = \mathrm{GL}(\mathbb{R}, 2),\ A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ e & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

5.6. Feladat. Igazolja, hogy a G csoportban megadott N részcsoport normálosztó, valamint adja meg a G/N faktorcsoport elemeit. Milyen „ismert” csoporttal izomorf G/N?

(a) $G = S_7,\ N = A_7$; (b) $G = S_4,\ N = V$; (c) $G = \mathbb{Z}_{15}^*,\ N = \{\overline{1}, \overline{14}\}$;

(d) $G = \mathbb{Q}^*,\ N = \{1, -1\}$; (e) $G = \mathbb{Z},\ N = [4, 6]$; (f) $G = \mathbb{Q},\ N = \mathbb{Z}$.

5.7. Feladat. Határozza meg a D_6 és Q csoport összes faktorcsoportját (lásd az 5.4. Feladatot), és minden esetben határozza meg, hogy a faktorcsoport milyen „ismert” csoporttal izomorf.

⌜♣♢♡♠⌟

5.8. Feladat. Legyen $\omega = \dfrac{1}{2}$ és

$$\begin{aligned} u_1 &= (\omega, \omega, \omega, \omega), \\ u_2 &= (\omega, -\omega, \omega, -\omega), \\ u_3 &= (\omega, -\omega, -\omega, \omega), \\ u_4 &= (\omega, \omega, -\omega, -\omega). \end{aligned}$$

Valamint legyen

$$\langle -, - \rangle_1 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \left\langle \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \cdot u_k, \sum_{k=1}^{4} \beta_k \cdot u_k \right\rangle_1 = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \beta_k.$$

Mutassa meg, hogy tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^4$ vektorokra $\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_1$ teljesül.

5.9. Feladat. Legyen $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : f^* \leqslant 2\}$ a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok szokásos vektortere. Mutassa meg, hogy az alábbi $V \times V \to \mathbb{R},\ (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ leképezések skalárszorzatot definiálnak V-n:

(a) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$; (b) $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{2} f^{(k)}(1)g^{(k)}(1)$;

(c) $\langle f, g \rangle = \sum_{k=-4}^{4} f(k)g(k)dt$; (d) $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{9} f(k)g(k)$.

Legyen V n-dimenziós (valós) euklideszi tér ($n \in \mathbb{N}$), $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció. A φ lineáris transzformáció adjungáltja az az egyértelműen meghatározott $\varphi^*\colon V \to V$ lineáris transzformációja V-nek, amelyre

$$\langle u\varphi, v\rangle = \langle u, v\varphi^*\rangle$$

teljesül tetszőleges $u, v \in V$ vektorokra.

5.10. Feladat. Legyen V véges dimenziós (valós) euklideszi tér, valamint legyenek φ és ψ lineáris transzformáció V-nek. Igazolja az alábbiakat:

(a) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

(b) $(\lambda \cdot \varphi)^* = \lambda \cdot \varphi^*$ ($\lambda \in \mathbb{R}$);

(c) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;

(d) $(\varphi^*)^* = \varphi$.

5.11. Feladat. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk adjungáltját (ahol az euklideszi terünk a sík a szokásos skalárszorzattal):

(a) tükrözés az x-tengelyre;

(b) tükrözés az origón átmenő e egyenesre;

(c) origó körüli $\dfrac{\pi}{2}$ szögű forgatás;

(d) origó körüli α szögű forgatás;

(e) merőleges vetítés az x-tengelyre;

(f) merőleges vetítés az origón átmenő e egyenesre.

5.12. Feladat. Legyen φ olyan lineáris transzformációja a V véges dimenziós euklideszi térnek, amelyre $\varphi^2 = 0$, azaz $v\varphi^2 = 0$ ($v \in V$). Mutassa meg, hogy $v\varphi \perp v\varphi^*$ teljesül tetszőleges $v \in V$-re. Igaz-e az állítás megfordítása?

5.13. Feladat. Legyenek φ és ψ olyan lineáris transzformációi a V véges dimenziós euklideszi térnek, amelyekre $\varphi^*\psi = \psi\varphi^* = 0$ teljesül. Mutassa meg, hogy ekkor $\operatorname{Im}(\varphi + \psi) = \operatorname{Im}(\varphi) \oplus \operatorname{Im}(\psi)$.