Csoportelemek rendje és csoportok részcsoportjai

4.1. Feladat. Határozza meg a g elem rendjét a megadott G csoportban:

(a) $G = S_6$, $g = (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)$;
(b) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $g \in \{\overline{5}, \overline{9}, \overline{11}\}$;
(c) $D_{12} = \langle \varphi, \tau \rangle$, $g = \varphi^4 \tau \varphi^3$;
(d) $G = \mathbb{Z}_{18}^*$, $g \in \{\overline{5}, \overline{7}\}$;
(e) $G = \left\{ \varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon^{12} = 1 \right\}$, $g \in \left\{ \cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6} \right\}$.

4.2. Feladat. Határozza meg a G csoport k rendű elemeit:

(a) $G = S_9$, $k \in \{8, 15, 21\}$;
(b) $G = D_{18}$, $k \in \{4, 6, 9\}$;
(c) $G = \mathbb{Z}_{2014}$, $k \in \{1, 2014\}$.

4.3. Feladat. Határozza meg az alábbi csoportok véges rendű elemeit:

(a) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}^+$;
(b) $\mathbb{C}^*$;
(c) a kör szimmetriacsoportja.

4.4. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi, véges fokú permutációkra vonatkozó állítások:

(a) Minden páros rendű permutáció páros.
(b) Minden páros permutáció rendje páros.
(c) Minden páratlan rendű permutáció páros.
(d) Minden páratlan permutáció páros rendű.

4.5. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha a és b egy csoport tetszőleges véges rendű elemei, akkor

(a) $o(a) = o(b^{-1}ab)$;
(b) $o(ab) = o(ba)$;
(c) ha $ab = ba$, akkor $o(ab) \mid \text{lk.k.t.}(o(a), o(b))$.

4.6. Feladat. Döntse el, hogy részcsoportot alkot-e az alábbi H halmaz a megadott G csoportban:

(a) $G = \mathbb{Z}$, $H = \{k \in \mathbb{Z} : 6 \mid k\}$;
(b) $G = \mathbb{Z}$, $H = \{k \in \mathbb{Z} : 2 \mid k \text{ vagy } 3 \mid k\}$;
(c) $G = \mathbb{Z}_9$, $H = \mathbb{Z}_9^*$;
(d) $G = S_6$, $H = \{\pi \in S_6 : 3\pi = 3\}$;
(e) $G = \mathbb{C}^*$, $H = \{c \in \mathbb{C}^* : c^n = 1 \text{ valamely } n \in \mathbb{N}\text{-re}\}$;
(f) $G = S_4$, H az összes transzpozíciók halmaza S_4-ben.

4.7. Feladat. Határozza meg a G csoport A részhalmaza által generált részcsoportját:

(a) $G = \mathbb{Z}_{18}$, $A = \{\overline{4}\}$;
(b) $G = \mathbb{Z}$, $A = \{6, 10, 15\}$;
(c) $G = \mathbb{Z}_{30}$, $A = \{\overline{6}, \overline{10}\}$;
(d) $G = D_{12}$, $A = \{\varphi^2, \varphi\tau\}$;
(e) $G = S_4$, $A = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}$;
(f) $G = S_4$, $A = \{(1\,2\,3), (1\,2)(3\,4)\}$.

4.8. Feladat. Döntse el, hogy ciklikusak-e az alábbi csoportok:

(a) S_3, S_4, S_5;
(b) $\mathbb{Z}_{12}^*$, $\mathbb{Z}_{13}^*$, $\mathbb{Z}_{14}^*$;
(c) Q.

4.9. Feladat. Van-e 1, 2, illetve 3 elemű minimális generátorrendszer az alábbi csoportokban.

(a) $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_{17}$, $\mathbb{Z}_{18}$;
(b) S_3, S_4, S_5;
(c) D_3, D_4, D_5.

4.10. Feladat. Határozza meg az alábbi csoportok összes részcsoportját, valamint rajzolja fel annak a részbenrendezett halmaznak a Hasse-diagramját, amelyet a részcsoportok halmaza alkot a szokásos tartalmazásra nézve.

(a) $\mathbb{Z}_{18}$;
(b) V;
(c) $\mathbb{Z}_{15}^*$;
(d) D_4;
(e) S_3;
(f) A_4.

4.11. Feladat. Legyen V euklideszi tér és $u, v \in V$, $u \neq 0$. Igaz-e, hogy az u és $v - \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2} \cdot u$ vektorok merőlegesek?

4.12. Feladat. Legyenek n és k természetes számok. Legyen V n-dimenziós euklideszi tér és $u_1, \ldots, u_k \in V \setminus \{0\}$ páronként ortogonális vektorok. Igaz-e, hogy $k \leqslant n$?

4.13. Feladat. Legyen V euklideszi tér. Mutassa meg, hogy tetszőleges $u, v \in V$ vektorokra teljesülnek az alábbi egyenlőségek.

(a) $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\|v\|^2$;

(b) $\|u+v\|^2 + \|u-v\| = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

4.14. Feladat. Legyen $I = \{r \in \mathbb{R} : 0 \leqslant r \leqslant 1\}$ és legyen V az I halmazon folytonos valós függvények halmaza. Mutassa meg, hogy V euklideszi tér az

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \qquad (f, g \in V)$$

belső szorzattal. Határozzon meg ortonormált bázist az

$$u_1 : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto 1, \quad u_2 : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto t, \quad u_3 : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^2$$

vektorok által generált altérben.

4.15. Feladat. Legyen n természetes szám és $V = \mathbb{R}^{n\times n}$. Az $A = (a_{i,j}) \in V$ mátrix **nyoma**:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

Mutassa meg, hogy V euklideszi tér az

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) \qquad (A, B \in V)$$

belső szorzattal.

4.16. Feladat. Legyenek az $ABCD$ (síkbeli) négyszög oldalai a, b, c és d. Mutassa meg, hogy a négyszög területe:

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}},$$

ahol $s = (a+b+c+d)/2$, $\alpha = CAB\sphericalangle$ és $\gamma = BCD\sphericalangle$.