Permutációcsoportok

3.1. Feladat. Számítsa ki a permutációk megadott szorzatait közvetlenül a definíció alapján:

(a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&1&4&6&7&8&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&2&1&5&6&8&7\end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&1&4&5&7&6&8&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&1&5&2&8&7&6\end{pmatrix}$.

3.2. Feladat. Adja meg az alábbi permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

(a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&1&4&6&7&8&5\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&2&1&5&6&8&7\end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&5&7&2&4&1&8&6\end{pmatrix}^{-1}$; (d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&4&7&3&5&1&6&8\end{pmatrix}^{-2014}$;

(e) $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 5)$; (f) $(4\ 3\ 2\ 5)(1\ 2\ 4\ 6)(2\ 4\ 6)$; (g) $(2\ 4\ 5)(1\ 3\ 5)^{-1}(1\ 2)$;

(h) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^3$; (i) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^4$; (j) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 3\ 7\ 10)^5$.

3.3. Feladat. Határozza meg az alábbi permutációk paritását:

(a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&4&2&6&5&3&8&7\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&8&1&4&7&6&5&3\end{pmatrix}$; (c) $(4\ 3\ 2\ 5)(1\ 3\ 2)(2\ 4\ 6)$.

3.4. Feladat. Adja meg az összes olyan π permutációt — páronként idegen ciklusokra bontott alakban —, amelyre teljesül, hogy

(a) $((1\ 2\ 3)(2\ 1))^{-1}\pi = (2\ 4)$; (b) $((1\ 2\ 3)(2\ 3))^{-1}\pi(2\ 3\ 1) = (3\ 1)$.

3.5. Feladat. Oldja meg S_4-ben alábbi egyenleteket:

(a) $\pi^2 = (1\ 2\ 3)$; (b) $\pi^2 = (1\ 2)$; (c) $\pi^3 = \mathrm{id}$.

Lineáris algebra

3.6. Feladat. Legyen $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, melynek mátrixa az $\mathfrak{S}$ standard bázisban:

(a) $A_\varphi^{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix}-16&13&-19\\-12&10&-14\\6&-4&9\end{pmatrix}$; (b) $A_\varphi^{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix}-16&18&-9\\-12&14&-6\\6&-6&5\end{pmatrix}$.

Határozza meg φ sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit.

3.7. Feladat. Az $\mathbb{R}^4$ vektortér az $U_1 = [(1,1,0,0),(0,0,1,1)]$ és $U_2 = [(1,0,-1,0),(0,1,0,1)]$ altereinek direkt összege. Állítsa elő a $v = (2,0,1,4)$ vektort $u_1 + u_2$ alakban, ahol $u_1 \in U_1$ és $u_2 \in U_2$.

3.8. Feladat. Hajtsa végre a Gram–Schmidt-eljárást[1] az alábbi lineárisan független vektorrendszereken:

(a) $(1,0,0),(2,3,0),(1,6,1)$; (b) $(1,6,1),(1,0,0),(2,3,0)$; (c) $(1,1,1,1),(2,1,1,0),(2,1,3,2)$.

3.9. Feladat. Adjon meg ortogonális bázist az U altér $U^\perp$ ortogonális kiegészítőjében:

(a) $U = [(1,1,-1),(1,2,1)]$; (b) $U = [(1,-1,1,1),(1,2,-1,1),(2,1,0,2)]$;

(c) $U = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$.

[1] A módszert Jørgen Pedersen **Gram** (1850–1916, dán aktuárius és matematikus) és Erhard **Schmidt** (1876–1959, balti német matematikus) után nevezték el.