Csoportok

2.1. Feladat. Döntse el, hogy a G halmazon értelmezett $\circledast\colon G^2 \to G$ művelet asszociatív-e. Van-e egységelem $\circledast$-ra vonatkozóan? Ha van egységelem, akkor melyek azok az elemek, amelyeknek van inverze az egységelemre vonatkozóan? A G halmaz csoport-e a $\circledast$ műveletre vonatkozóan?

(a) $G = \{2a : a \in \mathbb{Z}\}$, $x \circledast y = x + y$ $(x, y \in G)$;
(b) $G = \{2a : a \in \mathbb{Z}\}$, $x \circledast y = x \cdot y$ $(x, y \in G)$;
(c) $G = \mathbb{Z}$, $x \circledast y = x - y$ $(x, y \in G)$;
(d) $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \circledast y = x + y + x \cdot y$ $(x, y \in G)$;
(e) $G = \mathbb{N}$, $x \circledast y = \max(x, y)$ $(x, y \in G)$;
(f) $G = P(\mathbb{N})$, $x \circledast y = x \,\Delta\, y$ $(x, y \in G)$;
(g) $G = \mathbb{Z}_6$, $x \circledast y = x \cdot y$ $(x, y \in G)$;
(h) $G = \left\{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\right\}$, $x \circledast y = x \cdot y$ $(x, y \in G)$;
(i) $G = \left\{q \in \mathbb{Q} : q = \frac{a}{b},\ \text{ahol } a, b \in \mathbb{Z} \text{ relatív prímek és } 2 \nmid b\right\}$, $x \circledast y = x + y$;
(j) $G = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ valamely } n \in \mathbb{N}\text{-re}\}$, $x \circledast y = x \cdot y$.

2.2. Feladat. Adja meg a G csoport azon elemeit, amelyek előállnak a $g \in G$ elem pozitív egész kitevős hatványaiként, illetve egész kitevős hatványaiként.

(a) $G = (\mathbb{Z}; +)$, $g = -1$;
(b) $G = (\mathbb{Z}; +)$, $g = -3$;
(c) $G = (P(\mathbb{N}), \Delta)$, $g = \{1, 2, 3\}$;
(d) $G = (\mathbb{Z}_{28}^*; +)$, $g = \overline{-9}$;
(e) $G = D_7$, g a középpont körüli $\frac{2\pi}{7}$ szöggel való forgatás;
(f) G a kvaterniócsoport, $g = j$.

2.3. Feladat. Legyen $(G; \circledast)$ csoport, melynek egységeleme e és jelölje g^{-1} a $g \in G$ elem inverzét. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

(a) Ha a g és h elemek $(g, h \in G)$ felcserélhetők, akkor a g és h^{-1} elemek is felcserélhetők.
(b) Ha a g és h elemek $(g, h \in G)$ felcserélhetők, akkor a g^2 és h^2 elemek is felcserélhetők.
(c) Tetszőleges $g_1, \ldots, g_4 \in G$ elemekre igaz, hogy $(g_1 \circledast g_2) \circledast (g_3 \circledast g_4) = g_1 \circledast ((g_2 \circledast g_3) \circledast g_4)$.
(d) Ha tetszőleges $g \in G$ elemre $g^2 = e$ teljesül, akkor $(G; \circledast)$ Abel-csoport.

2.4. Feladat. Az alábbi következtetések közül melyek érvényesek tetszőleges $(G; \circledast)$ csoport tetszőleges a, b, c, x, y elemeire?

(a) Ha $(a \circledast x) \circledast b = a \circledast (y \circledast b)$, akkor $x = y$.
(b) Ha $x \circledast c = c \circledast y$, akkor $x = y$.

A helyes következtetést igazolja, a hamisra adjon ellenpéldát.

Lineáris algebra

2.5. Feladat. Igazolja, hogy ha V véges dimenziós vektortér, akkor V bármely U alteréhez van olyan U', altér, hogy

$$V = U \oplus U'.$$

2.6. Feladat. Legyenek φ_1, φ_2, φ_3 és φ_4 az $\mathbb{R}^3$ vektortér alábbi lineáris transzformációi:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(a, b, c) &= (a + b, b + c, c + a),\\
\varphi_2(a, b, c) &= (a - b, b - c, 0),\\
\varphi_3(a, b, c) &= (-b, a, c),\\
\varphi_4(a, b, c) &= (a, b, b).
\end{aligned}$$

(a) Határozza meg a $\operatorname{Ker}(\varphi_i)$ és $\operatorname{Im}(\varphi_i)$ altereket $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$. Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(\varphi_i) \oplus \operatorname{Im}(\varphi_i)$ teljesül minden i-re $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$?

(b) Igaz-e, hogy az $\operatorname{Im}(\varphi_2)$ altér φ_3-invariáns? Igaz-e, hogy az $\operatorname{Im}(\varphi_3)$ altér φ_2-invariáns?

2.7. Feladat. Legyen φ a V 3-dimenziós valós számtest feletti vektortér lineáris transzformációja, amelynek mátrixa V valamely bázisában:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Igaz-e, hogy $V = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$?

2.8. Feladat. Legyen φ a V 3-dimenziós K test feletti vektortér ($K \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$) lineáris transzformációja, amelynek mátrixa V valamely bázisában:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{-1} & \overline{1} \\ \overline{-1} & \overline{5} & \overline{-1} \\ \overline{1} & \overline{-1} & \overline{3} \end{pmatrix}$$

Igaz-e, hogy $V = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$?

2.9. Feladat. Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett és legyen φ olyan lineáris transzformációja V-nek, amelyre $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$ teljesül. Bizonyítsa be, hogy

$$V = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_V + \varphi) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{id}_V - \varphi).$$