Ismétlő feladatok

1.1. Feladat. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok a K test feletti $V = K^3$ vektortérben ($K \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$)?

(a) $(1,0,4),(2,1,0),(3,4,1)$; (b) $(2,0,1),(2,1,0),(1,1,1)$; (c) $(1,3,2),(1,2,3),(4,1,4)$.

1.2. Feladat. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok a $\mathbb{Z}_p$ test feletti $V = \mathbb{Z}_p^3$ vektortérben ($p \in \{5,6,7\}$)?

(a) $(\overline{1},\overline{0},\overline{4}),(\overline{2},\overline{1},\overline{0}),(\overline{3},\overline{4},\overline{1})$; (b) $(\overline{2},\overline{0},\overline{1}),(\overline{2},\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1},\overline{1})$; (c) $(\overline{1},\overline{3},\overline{2}),(\overline{1},\overline{2},\overline{3}),(\overline{4},\overline{1},\overline{4})$.

1.3. Feladat. Adja meg az
(a) $(\overline{1},\overline{1},\overline{0},\overline{1})$; (b) $(\overline{0},\overline{1},\overline{1},\overline{1})$; (c) $(\overline{1},\overline{1},\overline{1},\overline{1})$.
vektorok koordinátasorát a $\mathbb{Z}_2$ feletti $\mathbb{Z}_2^4$ vektortér

$$(\overline{1},\overline{1},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0},\overline{1})$$

bázisára vonatkozóan.

1.4. Feladat. Határozza meg az alábbi $\mathbb{Z}_p$ feletti mátrixok rangját ($p \in \{5,7\}$):

(a) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{4} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{1} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{4} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$.

1.5. Feladat. Legyen a $\varphi\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ lineáris transzformáció mátrixa az $(1,1,2),(0,2,1),(2,1,1)$ bázisban

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Határozza meg $(3,1,2)\varphi$-t.

1.6. Feladat. Legyen a $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3$ lineáris transzformáció mátrixa az $(\overline{1},\overline{1},\overline{2}),(\overline{0},\overline{2},\overline{1}),(\overline{2},\overline{1},\overline{1})$ bázisban

(a) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$.

Határozza meg $(\overline{2},\overline{1},\overline{2})\varphi$-t.

1.7. Feladat. Adja meg a

$$\varphi\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2,\ (x,y,z) \mapsto (2x+3y+z, 3x+y+2z)$$

lineáris leképezés mátrixát az

$$\mathfrak{E}\colon (2,2,1),(1,2,3),(0,2,1), \qquad \mathfrak{F}\colon (1,1),(0,1)$$

bázispárban, majd adja meg a bázisáttérés mátrixát az első bázisról a $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ bázisra.

1.8. Feladat. Adja meg a

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2,\ (x,y,z) \mapsto (\overline{2}x+\overline{3}y+z, \overline{3}x+y+\overline{2}z)$$

lineáris leképezés mátrixát az

$$\mathfrak{E}\colon (\overline{2},\overline{2},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2},\overline{3}),(\overline{0},\overline{2},\overline{1}), \qquad \mathfrak{F}\colon (\overline{1},\overline{1}),(\overline{0},\overline{1})$$

bázispárban, majd adja meg a bázisáttérés mátrixát az első bázisról a $(\overline{1},\overline{1},\overline{1}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{0})$ bázisra.

1.9. Feladat. Legyen φ a $V = \mathbb{R}^2$ sík $2x + 3y = 4$ egyenesére vonatkozó tengelyes tükrözés. Írja φ mátrixát a $\mathfrak{B}\colon (1, -2), (-2, 3)$ bázisban.

1.10. Feladat. Írja fel a $V = \mathbb{R}^2$ sík φ lineáris transzformációjának mátrixát a $\mathfrak{B}\colon (1, 1), (-1, 1)$ bázisban:

(a) φ az $x - 2y = 0$ egyenesre vontakozó tengelyes tükrözés;

(b) φ az $x - 2y = 0$ egyenesre vontakozó merőleges vetítés;

(c) φ az origó körüli $\dfrac{2\pi}{3}$ szögű forgatás.

Határozza meg a φ lineáris transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait is.

1.11. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok sajátértékeit a $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{R}$ testek felett. Tegyük fel, hogy a megadott mátrix a φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Adjon meg bázist φ sajátaltereiben, valamint döntse el, hogy φ mátrixa diagonalizálható-e $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, iletve $\mathbb{C}$ fölött.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 3 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} -14 & -12 & 9 \\ 15 & 13 & -9 \\ -5 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

1.12. Feladat. Hozza kanonikus alakra az alábbi kvadratikus alakokat, és határozza meg az osztályukat.

(a) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$; (b) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$;

(c) $2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$; (d) $x_1x_2 + x_2x_3$.

1.13. Feladat. Keressen az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (valós) mátrixhoz olyan D diagonális és P nemelfajuló (valós) mátrixokat, melyekre $A = PDP^T$ teljesül:

1.14. Feladat. Határozza meg a

$$\begin{aligned} 30x &\equiv 34 \pmod{154}, \\ 28x &\equiv 196 \pmod{231}, \\ 63x &\equiv 309 \pmod{715} \end{aligned}$$

kongruenciarendszer összes egész megoldását.

1.15. Feladat. Határozza meg a $H = \{n \in \mathbb{Z} : 1973 \leqslant n < 3987 \text{ és ln.k.o.}(n, 2014) = 1\}$ halmaz elemszámát.

1.16. Feladat. Döntse el, hogy igaz-e az alábbi állítás:

„Mivel $3^{2014} \equiv 891 \pmod{2014}$, ezért a 2014 egész szám nem prímszám.”

1.17. Feladat. Határozza meg a primitív 2014-edik egységgyökök számát.

1.18. Feladat. Határozza meg 2014 rendjét modulo N ($11 \leqslant N \leqslant 23$ prímszám).

1.19. Feladat. Legyen $p = x^{12} + 6x^{10} - 10x^8 - x^4 - 6x^2 + 10$. Bontsa irreducibilis polinomok szorzatára a p polinomot a $K[x]$ polinomgyűrűben ($K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).