Lineáris algebra

Szorgalmi Feladatok (5.) | (10A104-3) | 2012/2013. tavaszi félév

5.1. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak a V vektortérben az alábbi vektorok lineársian függő, illetve lineárisan független vektorrendszert:

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1, -4, 3, 2), v_2 = (-1, 4, -2, -4), v_3 = (3 - 12, x, 10)$,

(b) $V = \mathbb{R}^5$, $v_1 = (-1, -3, 2, 1, -1), v_2 = (-2, -8, 7, 3, -1), v_3 = (1, 9 - 11, -4, x)$.

5.2. Mikor lesz lineárisan függő, illetve független a

$$(1, -1, 2, 1), (2, -1, x + 3, x), (1, 0, x + 1, 2x - 2)$$

vektorrendszer az x valós paraméter függvényében?

5.3. Tegyük fel, hogy a V valós vektortérben a $v_1, v_2, \dots \in V$ vektoroknak csak véges sok lineáris kombinációja állítja elő a nullvektort. Következik-e ebből, hogy a $v_1, v_2, \dots$ vektorrendszer lineárisan független?

5.4. Tegyük fel, hogy a v_1, v_2, v_3 vektorok közül egyik sem a nullvektor. Mit állíthat a v_1 és v_3 vektorok viszonyáról lineáris függőség, illetve függetlenség szempontjából, ha

(a) a v_1, v_2 és a v_2, v_3 vektorrendszerek is lineárisan függők;

(b) a v_1, v_2 vektorrendszer lineárisan független és a v_2, v_3 vektorrendszer lineárisan függő;

(c) a v_1, v_2 és a v_2, v_3 vektorrendszer is lineárisan független?

5.5. A v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszerről a következőket tudjuk: a v_1, v_2, v_3 részrendszer lineárisan független, de az összes többi háromtagú részrendszer lineárisan függő. Meghatározza-e ez egyértelműen a v_4 vektort?

5.6. Határozza meg az x paraméter értékét úgy, hogy a

$$(2, -4, 1), (-1, 3, 1), (-3, x, 12)$$

vektorrendszer rangja a lehető legkisebb legyen.

5.7. Határozza meg az

$$(1, -1, 2, 1), (1, 0, 3, 0), (2, -1, x + 4, x^2 - 3x + 3), (-1, 4, x, x - 6)$$

vektorrendszer rangját az x valós paraméter függvényében.

5.8. Az x valós paraméter függvényében vizsgálja meg, hogy az

$$(1, -1, x), (x, 0, 1), (1, 1, -2)$$

vektorrendszer generátorrendszere-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek.

5.9. Adja meg az x valós paraméter értékét úgy, hogy az adott vektorrendszer NE legyen bázisa az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek:

(a) $(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, x, 2, 1)$;

(b) $(-1, 1, 0, 1), (x, 1, 2, 1), (1, x, -1, 2), (1, 0, 1, 0)$.

5.10. Adjon meg bázist $\mathbb{R}^{100}$ alábbi altereiben, és határozza meg a dimeziójukat.

(a) $U_1 = \{(x_1, \dots, x_{100}) : x_1 = x_3 = \dots = x_{99} = 0\}$;

(b) $U_2 = \{(x_1, \dots, x_{100}) : x_1 + x_2 + \dots + x_{50} = x_{51} + x_{52} + \dots + x_{100}\}$.

5.11. Döntse el, hogy meg lehet-e adni egy 99-dimenziós vektortérben két 50-dimenziós alteret úgy, hogy csak a nullvektor a közös elemük?