$\boxed{4.1.}$ Igazolja, hogy a pozitív valós számok halmaza vektorteret alkot a valós számok teste felett, ha az „összeadást” és a „skalárral való szorzást” a következőképpen definiáljuk:

$$u \oplus v = uv,$$
$$\lambda \odot v = v^{\lambda}$$

$(u, v \in \mathbb{R},\ u, v > 0$ és $\lambda \in \mathbb{R})$.

$\boxed{4.2.}$ Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett, valamint $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $u, v \in V$. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (A válaszaikat indokolják!)

(a) Ha $u \neq \mathbf{0}$ és $\lambda u = \mu u$, akkor $\lambda = \mu$.

(b) Ha $\lambda \neq 0$ és $\lambda u = \lambda v$, akkor $u = v$.

(c) Ha $u, v \neq \mathbf{0}$, $\lambda, \mu \neq 0$ és $\lambda u = \mu v$, akkor $\lambda = \mu$ és $u = v$.

$\boxed{4.3.}$ Legyen W altér a valós számtest feletti V vektortérben, $u, v, w \in V$, és tegyük fel, hogy

$$u + v \in W, \quad v + 2w \in W, \quad w + 3u \in W.$$

Mit állíthatunk az $5u + 3v + w$ és $6u + 3v + w$ vektorok és W kapcsolatáról?

$\boxed{4.4.}$ Legyen u, v és w három vektor egy tetszőleges vektortérben. Mit tud mondani az u vektorról, ha tudja, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$ és $u \in [v, w]$?

$\boxed{4.5.}$ Legyen $U = [(1, 2, 1), (-1, 1, 1)]$ és $V = [(0, 3, 2), (-2, -1, 0)]$ altere az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek. Igaz-e, hogy $U = V$?

$\boxed{4.6.}$ Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ és $V = [(1, 2, 1)]$ alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben. Igaz-e, hogy $U = V$?

$\boxed{4.7.}$ Tekintsük a valós számtest feletti $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi U és V altereit:

$$U = [(1, -1, 2, 0), (0, 1, 4, 1)],$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

Döntse el, hogy teljesül-e az $U = V$ egyenlőség? Adjuk meg lineáris egyenletek segítségével az U alteret.

$\boxed{4.8.}$ Döntse el, hogy az x valós paraméter mely értékei esetén lesz eleme az $(1, x+2, -2)$ vektor az $\mathbb{R}^3$ vektortér

$$U = [(1, 2, -x), (1, 1, 0), (-1, -3, x + 1)]$$

alterének.

$\boxed{4.9.}$ Döntse el, hogy az x valós paraméter mely értékei esetén lesz eleme a $(2, -1, 1)$ vektor az $\mathbb{R}^3$ vektortér

$$U = [(1, -1, 1), (1, 0, 1 - x), (-1, x + 1, -2)]$$

alterének.