Lineáris algebra

Szorgalmi Feladatok (1.) (10A104-3) 2012/2013. tavaszi félév

$\boxed{1.1.}$ Legyenek $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$ tetszőleges mátrixok $(m, n, k, l \in \mathbb{N})$. Mi a feltétele annak, hogy

(a) az AB szorzat létezzen, de a BA szorzat ne;

(b) az AB és BA szorzatok is létezzenek, de ne legyenek azonos méretűek;

(c) az AB és BA szorzatok is létezzenek, és azonos méretűek legyenek?

$\boxed{1.2.}$ Adja meg az összes olyan valós mátrixot, amely felcserélhető az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixszal.

$\boxed{1.3.}$ Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$ mátrixot $(n \in \mathbb{N})$.

$\boxed{1.4.}$ Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n$ mátrixot $(n \in \mathbb{N})$.

$\boxed{1.5.}$ Számítsuk ki az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ mátrixot $(n \in \mathbb{N})$.

> Legyen A négyzetes mátrix. Az A mátrix főátlójában lévő elemeinek az összegét a mátrix nyomának nevezzük és $\mathrm{tr}(A)$-val jelöljük. Azaz, ha $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $\mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}$.

$\boxed{1.6.}$ Legyenek A és B azonos méretű négyzetes mátrixok. Igazolja, hogy $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

$\boxed{1.7.}$ Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok esetén $(n \in \mathbb{N})$?

(a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;

(b) $(AB)^T = B^T A^T$;

(c) $(A^k)^l = A^{kl}$ $(k, l \in \mathbb{N})$.