Lineáris függetlenség, bázis és koordinátasor

Ajánlott gyakorló feladatok:

- **Megyesi László**, *Lineáris algebra feladatok*, III/1-3.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- **Megyesi László**, *Lineáris algebra feladatok*, III/4-5., IV/1-3.

5.1. Döntse el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, 2, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 0)$;

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, -2, 4), (2, -3, 1), (-4, 5, 5)$;

(d) $V = \mathbb{R}^4$, $(1, -2, 3, 4), (0, -3, 1, 2), (2 - 4, 5, 9)$;

(e) $V = \mathbb{R}^5$, $(1, -2, 0, 3, 1), (0, 0, 2, 4, -2), (3, 0, 0, -3, -3), (-1, -1, 2, 4, 1)$.

5.2. Határozza meg az alábbi vektorrendszerek rangját.

(a) $(1, 0, 1, 1), (-1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 2)$;

(b) $(1, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, -2, 1, 0)$;

(c) $(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -1, 1), (1, 1, 2, 3)$.

5.3. Döntse el a V vektortér adott vektorrendszeréről, hogy bázisa-e, generátorrendszere-e V-nek.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, -1, 2), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -2, 1)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, -3, -1)$;

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, 2, -1), (-1, 1, 1), (1, 2, 0)$;

(d) $V = \mathbb{R}^4$, $(1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, 2, 1, 1)$.

5.4. Adja meg a v vektor koordinátasorát a megadott bázisban.

(a) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$;

(b) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, -1, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 3)$;

(c) $v = (1, 2, 1)$, bázis: $(-1, 2, 1), (1, 2, 3), (-1, 1, 1)$;

(d) $v = (1, 2, 1, 2)$, bázis: $(-1, 1, 1, 0), (1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (-1, -1, -2, -2)$.

$\boxed{5.5.}$ Határozza meg $\mathbb{R}^4$ következő altereinek dimenzióját és egy bázisát.

(a) $U = [(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)]$;

(b) $U = [(1, 2, 4, 1), (-2, -4, -5, -3), (-1, -2, -7, 0), (1, 2, -2, 3)]$;

(c) $U = [(1, -1, 1, 2), (-1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 3, 4)]$.

$\boxed{5.6.}$ Legyen a V vektortér 10, az U_1, illetve U_2 alterei pedig rendre 8, illetve 9 dimenziósak. Hány dimenziós lehet az $U_1 \cap U_2$ altér?