Mátrixok

Ajánlott gyakorló feladatok:

- **Megyesi László**, *Lineáris algebra feladatok*, V/1-8.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- **Megyesi László**, *Lineáris algebra feladatok*, V/7. és V/10.

$\boxed{1.1.}$ Legyenek $A, \ldots, F$ az alábbi $\mathbb{R}$ feletti mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek):

- AB, BA, CB, BC, DC, CD, BF, F^2,
- EB^T, E^TA, D^TC^T, $(DC)^T$, $(CD)^T$,
- $(A+B)C$, $(A+B^T)D$, $AD+B^TD$.

$\boxed{1.2.}$ Legyen $f = x^2 + x - 4$ és $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Határozza meg az f polinom A helyen vett $f(A)$ helyettesítési értékét.

$\boxed{1.3.}$ Adja meg az összes olyan valós mátrixot, amely felcserélhető az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixszal.

$\boxed{1.4.}$ Határozzuk meg az A és B mátrixok szorzatát blokkosan a megadott blokkokat felhasználva:

(a) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$, $B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$;

(b) $A = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $B = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

$\boxed{1.5.}$ Az alábbi blokkos felbontások közül mely esetben végezhető el a blokkos szorzás?

$$\text{(a)}\ A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right);$$

$$\text{(b)}\ A = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right);$$

$$\text{(c)}\ A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

* * *

$\boxed{1.6.}$ Definiáljuk az A, B, C és D mátrixokat a következőképpen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{i,j})_{4\times 3}, \quad b_{i,j} = i + j - 2 \ (1 \leqslant i \leqslant 4,\ 1 \leqslant j \leqslant 3),$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket: $AB - BA$, $(A + D)B$, $B(D + A)$, C^k $(k = 2, 3, 4, 5)$.

$\boxed{1.7.}$ Legyenek $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ és a $B \in \mathbb{R}^{r\times s}$ tetszőleges mátrixok. Mit állíthatunk róluk, ha tudjuk, hogy $AB = BA$?

$\boxed{1.8.}$ Legyenek A és B olyan $(n \times n)$-es mátrixok $(n \in \mathbb{N})$, amelyekre $A^2 = B^2$ teljesül. Mit mondhatunk az A és B mátrixokról?

$\boxed{1.9.}$ Van-e olyan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, amely bármely $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixszal felcserélhető?

$\boxed{1.10.}$ Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor létezik olyan $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix, amelyre $AB = E$, ha $ad - bc \neq 0$.

$\boxed{1.11.}$ Igaz-e, hogy ha az A és B $n \times n$-es mátrixokra $AB = E$, akkor $BA = E$?

$\boxed{1.12.}$ Legyen $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Mutassuk meg, hogy ha az A és B mátrixokra $AP = PB$ teljesül, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az $A^n P = PB^n$ egyenlőség is teljesül.

$\boxed{1.13.}$ Vannak-e olyan A és B négyzetes mátrixok, amelyekre $AB - BA = E$ teljesül?

$\boxed{1.14.}$ Az $a_0, a_1, \ldots$ sorozatot definiáljuk a következőképpen:

$$a_0 = 19,\ a_1 = 73,\ a_n = 2a_{n-2} - a_{n-1}\ (n \geqslant 2).$$

Határozzuk meg a sorozat általános tagját.