9. Változatok a szimplex algoritmusra

→ *Lexikografikus szimplex algoritmus*: ha

$$\min\{b_r/a_{r\,j} : a_{r\,j} > 0,\ 1 \leqslant r \leqslant n\} = b_{k_1}/a_{k_1\,j} = \cdots = b_{k_s}/a_{k_s\,j},$$

akkor tekintsük a

$$\mathbf{h}_{k_t} = (b_{k_t}, a_{k_t\,1}, \ldots, a_{k_t\,n+m})/a_{k_t\,j} \quad (t = 1, \ldots, s)$$

vektorokat, és legyen $\mathbf{h}_k = \text{lexmin}\{\mathbf{h}_{k_1}, \ldots, \mathbf{h}_{k_s}\}$. Válasszuk az $a_{k\,j}$ elemet generáló elemnek.

9.3. Mutassa meg, hogy az alábbi feladat nem oldható meg szimplex algoritmussal, majd oldja meg lexikografikus szimplex algoritmussal.

0.	x_4	x_5	x_6	x_7	$\mathbf{b}$
x_1	$1/4$	-8	-1	9	0
x_2	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0
x_3	0	0	1	0	1
z	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0

10. Szimplex módszer vagy Kétfázisú szimplex algoritmus

10.1. Oldja meg az alábbi feladatot szimplex módszerrel.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\
 & & & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i = 1, 2, 3, 4) \\
\hline
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \to & \min
\end{array}$$

10.2. Oldja meg az alábbi feladatot szimplex módszerrel.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\
x_1 & + & 5x_2 & & & = & 4 \\
 & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i = 1, 2, 3) \\
\hline
-x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \to & \min
\end{array}$$

10.3. Oldja meg az alábbi feladatot szimplex módszerrel.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 6 \\
 & & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 6 \\
 & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 5 \\
 & & & & & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i = 1, \ldots, 5) \\
\hline
-x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & \to & \min
\end{array}$$

10.4. Vezesse vissza az alábbi lineáris programozási feladatot alkalmas standard feladatra, és oldja meg a kapott feladatot szimplex módszerrel.

$$
\begin{array}{rcrcl}
2x_1 & + & x_2 & \geqslant & 1 \\
x_1 & + & x_2 & \leqslant & 3 \\
x_1 & - & x_2 & \geqslant & -1 \\
 & & x_i & \geqslant & 0\ (i=1,2) \\
\hline
-x_1 & + & x_2 & \to & \min
\end{array}
$$

10.5. Vezesse vissza az alábbi lineáris programozási feladatot alkalmas standard feladatra, és oldja meg a kapott feladatot szimplex módszerrel.

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\
3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & \leqslant & 15 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geqslant & 3 \\
-x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leqslant & -1 \\
 & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i=1,2,3) \\
\hline
-x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \to & \max
\end{array}
$$

10.6. Oldja meg az alábbi feladatot szimplex módszerrel.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & = & 4 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & & & & & = & 5 \\
x_1 & + & 5x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & = & 3 \\
 & & & & & - & x_4 & & & + & x_6 & - & x_7 & = & 0 \\
 & & & & & & & & & - & x_6 & + & x_7 & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i=1,\dots,7) \\
\hline
-x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & & & + & 4x_6 & + & 6x_7 & \to & \min
\end{array}
$$

11. Konvex poliéderek

11.1. Igazoljuk, hogy az $A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ feltételeket kielégítő vektorok halmaza zárt és konvex.

11.2. Legyen K az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok által generált konvex kúp.[1] Igazolja a következőket:

(a) a K halmaz konvex;
(b) $\mathbf{0} \in K$;
(c) ha $\mathbf{a} \in K$, akkor tetszőleges $\lambda \geqslant 0$ valós számra $\lambda\mathbf{a} \in K$;
(b) $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subseteq K$.

12. Házi Feladat

12.1. Legyenek s és t tetszőleges valós számok, és tekintsük az alábbi LP feladatot.

$$
\begin{array}{rcrcl}
sx_1 & + & tx_2 & \leqslant & 1 \\
 & & x_i & \geqslant & 0\ (i=1,2) \\
\hline
x_1 & + & x_2 & \to & \max
\end{array}
$$

Adjon meg szükséges és elegendő feltételt arra vonatkozóan, hogy a feladatnak legyen optimális megoldása.

[1] Az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok által generált konvex kúpnak nevezzük az $\mathbb{R}^n$ vektortér $\{\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \geqslant 0\}$ részhalmazát.

12.2. Oldja meg szimplex algoritmussal az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\frac{1}{2}x_1 & - & \frac{11}{2}x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & + & 9x_4 & \leqslant & 0 \\
\frac{1}{2}x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & x_4 & \leqslant & 0 \\
x_1 & & & & & & & \leqslant & 1 \\
 & & & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i=1,2,3,4) \\
\hline
10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4 & \to & \min
\end{array}$$

13. Dualitás

13.1. Az alábbi primál feladathoz konstruáljuk meg a duális feladatot. Rendre ábrázoljuk az egyes egyenlőtlenségeket kielégítő ponthalmazokat, és ezek segítségével határozzuk meg mindkét feladat lehetséges megoldásainak halmazát. Ezek ismeretében határozzuk meg az optimális megoldásokat, és vessük össze az optimumértékeket.

$$\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 3 \\
4x_1 & + & 7x_2 & \leqslant & 7 \\
 & & x_i & \geqslant & 0\ (i=1,2) \\
\hline
3x_1 & + & 2x_2 & \to & \max
\end{array}$$

13.2. Határozzuk meg az alábbi primál feladat optimumát és optimális megoldását a duál feladat segítségével:

$$\begin{array}{rcrcl}
3x_1 & + & x_2 & \leqslant & 3 \\
x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 3 \\
2x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 15 \\
 & & x_i & \geqslant & 0\ (i=1,2) \\
\hline
x_1 & + & x_2 & \to & \max
\end{array}$$

13.3. Oldjuk meg duális szimplex algoritmus alkalmazásával az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & \geqslant & 0 \\
6x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geqslant & 4 \\
7x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & \leqslant & 10 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & \geqslant & 3 \\
4x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & \geqslant & 2 \\
 & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i=1,2,3) \\
\hline
3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \to & \min
\end{array}$$

13.4. Oldjuk meg duális szimplex algoritmus alkalmazásával az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{ccccccccl}
y_1 & & - & x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & -2 \\
 & y_2 & - & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\
 & & & & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i=1,2,3) \\
 & & & & & & & y_i & \geqslant & 0\ (i=1,2) \\
\hline
 & & & 5x_1 & & & + & 21x_3 & \to & \min
\end{array}$$

13.5. Oldjuk meg duális szimplex algoritmus alkalmazásával az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geqslant & 2 \\
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geqslant & 4 \\
 & & & & x_i & \geqslant & 0\ (i=1,2,3) \\
\hline
3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \to & \min
\end{array}$$

13.6. Oldjuk meg duális szimplex algoritmus alkalmazásával az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
y_1 & & & + & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 \\
& y_2 & & - & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\
& & y_3 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -4 \\
& & & & & & & & & & x_i & \geqslant & 0 \ (i = 1,2,3,4) \\
& & & & & & & & & & y_i & \geqslant & 0 \ (i = 1,2,3) \\ \hline
& & & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \to & \min
\end{array}$$

13.7. Konstruáljunk olyan primál-duál feladatpárt, melyben a primál feladatnak egy, a duál feladatnak végtelen sok optimális megoldása van.

13.8. Konstruáljunk olyan primál-duál feladatpárt, hogy egyiknek se legyen megoldása.

14. Konvex poliéderek II.

14.1. Legyen $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ olyan $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli mátrix, amelyre minden $1 \leqslant j \leqslant n$ esetén $\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| < 1$. Mutassuk meg, hogy $E - A$ invertálható.

14.2. Bizonyítsuk be, hogy ha a

$$\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \leqslant b$$

lineáris egyenlőtlenség következménye a

$$\mathbf{g}_i^T \cdot \mathbf{x} \leqslant b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

lineáris egyenlőtlenségeknek, akkor vannak olyan $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ valós számok, amelyekre

$$b - \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - \mathbf{g}_i^T \cdot \mathbf{x})$$

teljesül.

14.3. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz és $f\colon X \to \mathbb{R}$ tetszőleges leképezés. Azt mondjuk, hogy az f leképezés *kvázikonvex*, ha bármely $x_1, x_2 \in X$ és tetszőleges $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén

$$f(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \leqslant \max(f(x_1), f(x_2)).$$

Mutassunk példát kvázikonvex, de nem konvex leképezésre.

14.4. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz és $f\colon D \to \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos leképezés. Bizonyítsuk be, hogy bármely $x_1, x_2 \in D$ esetén

$$f\left(\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2),$$

akkor bármely $x_1, x_2 \in D$ és $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén

$$f(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

is teljesül.

15. Hozzárendelési feladat

Probléma: *Adott n dolgozó és ugyanennyi munka. Az egyes dolgozók a munkákat különböző költséggel tudják elvégezni. Osszuk szét a munkákat a dolgozók között úgy, hogy minden dolgozó pontosan egy munkát kapjon és a munkavégzés költsége minimális legyen.*

Jelölések:

- $\to$ $n \in \mathbb{N}$ (a dolgozók és a munkák száma),
- $\to$ $C = (c_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ahol c_{ij} a j-edik munka költsége, ha az i-edik dolgozó hajtja végre ($1 \leqslant i, j \leqslant n$), a C mátrix a **költségmátrix**,
- $\to$ $X = (x_{ij})_{n\times n} \in \{0,1\}^{n\times n}$, ahol $x_{ij} = 1$ pontosan akkor teljesül, ha a j-edik munkát az i-edik dolgozó végzi el ($1 \leqslant i, j \leqslant n$).

Ekkor a fenti probléma a következőképpen formalizálható:

$$\begin{array}{c}
\sum_{t=1}^{n} x_{it} = 1 \ (i = 1, \dots, n) \\
\sum_{t=1}^{n} x_{tj} = 1 \ (j = 1, \dots, n) \\
\hline
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min
\end{array}$$

A fenti feladat a C **költségmátrixú hozzárendelési feladat**, amelyet $H(C)$-vel jelölünk.

15.1. Legyen $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg a $H(C)$ hozzárendelési feladat megoldását.

15.2. Legyenek C és D tetszőleges $\mathbb{R}^{m\times n}$-beli mátrixok. Azt mondjuk, hogy $C = (c_{ij})$ és $D = (d_{ij})$ ekvivalensek (jel.: $C \sim D$), ha vannak olyan α_i, β_j valós számok, amelyekre $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ teljesül minden (i, j) indexpárra ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$). Mutassuk meg, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció.

15.3. Ha a $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok ekvivalensek, akkor a $H(C)$ és $H(D)$ hozzárendelési feladatok optimális megoldásai megegyeznek.

15.4. Legyen $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tegyük fel, hogy előállítottunk egy olyan $C^{(0)}, \dots, C^{(k)}$ ($k < n$) mátrixsorozatot, amely az alábbi tulajdonságokkal bír:

(1) $C \sim C^{(0)}$,
(2) $C^{(t)} \sim C^{(t+1)}$ ($t = 0, \dots, k-1$),
(3) $C^{(t)} \geqslant 0$ ($t = 0, \dots, k$),
(4) $C^{(k)}$-ban ki van jelölve egy n-elemű független 0-rendszer.

Legyen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } C^{(k)}_{ij} \text{ eleme a független 0-rendszernek,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $X \in \{0,1\}^{n\times n}$ optimális megoldása $H(C)$-nek.

15.5. Határozzuk meg az alábbi $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrixban kijelölhető összes független 0-rendszert:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15.6. Határozzuk meg a $H(C)$ hozzárendelési feladat optimális megoldását, ahol

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

15.7. Határozzuk meg a $H(C)$ hozzárendelési feladat optimális megoldását, ahol

$$C \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

16. Hozzárendelési feladat (tiltásokkal)

16.1. Legyen C az alábbi mátrixok valamelyike

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

valamint legyen $T_1 = \{x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{44}\}$ és $T_2 = \{x_{11}, x_{24}, x_{31}, x_{43}\}$. Határozzuk meg a $TH(C, T_1)$ és $TH(H, T_2)$ „tiltásos” hozzárendelési feladatok megoldásait.

16.2. Sándor, József és Benedek egy-egy asszisztenst keresnek az utóbbi időben megnövekedett feladatok ellátására. A meghírdetett interjúra öten jelentkeznek: Anna, Hanna, Panna, Bözsi és Pirike. Bizonyos okok miatt Sándor nem szeretne Pannával, Benedek pedig Pirikével együtt dolgozni. Az egyes munkákat az alábbi hatékonysággal tudnák a hölgyek végezni:

	Sándor	József	Benedek
Anna	11	8	13
Hanna	7	14	6
Panna	6	10	15
Bözsi	20	5	12
Pirike	9	9	18

Adjunk meg egy optimális felvételi stratégiát.

17. Szállítási feladat

Probléma: *Adott n darab feladóhely és m darab felvevőhely. Feladatunk az, hogy szállítsuk el a felvevő helyeken lévő anyagot a kívánt mennyiségben a felvevőhelyekre úgy, hogy a szállítással kapcsolatos költségek összege minimális legyen.*

Jelölések:

→ $n \in \mathbb{N}$ a feladóhelyek száma, egy-egy feladóhelyen azonos anyagféleség áll rendelkezésünkre,

→ a_i az i-edik feladóhelyen lévő anyag mennyisége,

→ $m \in \mathbb{N}$ a felvevőhelyek száma,

→ $C = (c_{i,j})_{n\times m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, ahol $c_{i,j}$ az egységnyi anyagmennyiségnek a szállításai költsége, ha a szállítás az i-edik feladóhelyről a j-edik felvevőhelyre ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$), a C mátrix a **költségmátrix**,

→ $X = (x_{i,j})_{n\times m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, ahol $x_{i,j}$ az i-edik feladóhelyről a j-edik felvevőhelyre szállítandó anyagmennyiséget jelöli. ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$).

Ekkor a fenti probléma a következőképpen formalizálható:

$$
\begin{array}{c}
\displaystyle\sum_{t=1}^{m} x_{i,t} = a_i \ (i = 1, \dots, n) \\
\displaystyle\sum_{t=1}^{n} x_{t,j} = b_j \ (j = 1, \dots, m) \\
x_{i,j} \geqslant 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m) \\
\hline
\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} \to \min
\end{array}
$$

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ és $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$, ekkor a fenti feladatot $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$-vel jelöljük.

17.1. Legyenek m és n tetszőleges természetes számok, a tetszőleges valós szám, valamint legyen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

és E_n az $n \times n$-es egységmátrix. Tekintsük az alábbi $A \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(mn)}$ mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{1}^T \\ E_n & E_n & E_n & \dots & E_n \end{pmatrix}.$$

Igazoljuk a következőket.

(a) Az A mátrix rangja $m + n - 1$.

(b) Legyen $1 \leqslant r \leqslant m + n$ tetszőleges természetes szám. Tegyük fel, hogy $1 \leqslant u < u + r - 1 \leqslant m + n$ és $1 \leqslant v < v + r - 1 \leqslant m + n$ ($u, v \in \mathbb{N}$), valamint legyen $b_{i,j} = A_{u+i-1,\,v+j-1}$ ($1 \leqslant i, j \leqslant r$). Mutassuk meg, hogy a $\det(b_{i,j})_{r\times r} \in \{-1, 0, 1\}$.

(c) tekintsük az A mátrix $m + n - 1$ számú független oszlopát. Az ezen oszlopvektorokból alkotott $B \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n-1)}$ mátrix bármely sorának elhagyásával kapott mátrix determinánsa nem 0.

17.2. Legyen $m = 5$, $n = 6$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és

$$H = \{(i, j) \in A \times B : \text{ln.k.o.}(i, j) < |i - j|\}.$$

Rajzoljuk fel a H-hoz tartozó cellagráfot és páros gráfot.

17.3. Legyen G egy cellagráf. Tekintsük G celláinak egy $c_1, \dots, c_k$ rendszere, valamint legyen $\{e_1, \dots, e_k\}$ a celláknak megfelelő élek rendszere $BP(G)$-ben.[2] Igazoljuk, hogy a $(c_1, c_2), (c_2, c_3), \dots, (c_{k-1}, c_k)$ élek rendszere a cellagráfban út [egyszerű út/hurok/egyszerű hurok], ha az $e_1, \dots, e_k$ élek rendszere $BP(G)$-ben út [egyszerű út/hurok/egyszerű hurok].

17.4. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= (4, 5), \\ \mathbf{b}^T &= (3, 3, 3), \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[2] A G cellagráfhoz tartozó páros gráfot $BP(G)$ jelöli.

17.5. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^T = (25, 26, 27, 32),$$
$$\mathbf{b}^T = (10, 20, 30, 30, 20),$$
$$C = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 8 & 5 & 13 \\ 8 & 22 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 7 & 11 & 17 & 4 \\ 15 & 18 & 5 & 20 & 19 \end{pmatrix}.$$

17.6. Határozzunk meg olyan vonalrendszert, amely az alábbi mátrix valamennyi 0-ját tartalmazza:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

17.7. Igazoljuk, hogy $m \times n$-es szállítási feladat esetén az összes különböző báziscella-rendszerek száma $m^{n-1} n^{m-1}$.

17.8. Legyen $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ olyan mátrix, amely minden oszlopában pontosan két egyest tartalmaz és sorai két csoportba sorolhatók oly módon, hogy minden oszlop egyesei különböző csoportba tartozó sorokban vannak. Igazoljuk, hogy A unimodális, azaz minden négyzetes részének determinánsa -1, 0 vagy 1.

17.9. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix permutációmátrix, ha minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-est tartalmaz és a többi elem 0. Bizonyítsuk be, hogy az összes permutáció-mátrixok mint vektorok által kifeszített altér dimenziója $(n-1)^2 + 1$.

17.10. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan mátrix, amelynek minden sorában és minden oszlopában pontosan r darab 1-est tartalmaz és a többi elem 0. Bizonyítsuk be, hogy A előáll r darab permutációmátrix összegeként.

17.11. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^T = (3, 5, 4), \ \mathbf{b} = (2, 4, 2, 2, 2),$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

17.12. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^T = (25, 25, 50), \ \mathbf{b} = (15, 20, 30, 35),$$
$$C = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 2 & 7 & 6 \\ 9 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

17.13. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^T = (17, 23, 25, 15), \ \mathbf{b} = (20, 20, 16, 13, 11),$$
$$C = \begin{pmatrix} 9 & 23 & 7 & 12 & 10 \\ 28 & 9 & 17 & 11 & 25 \\ 17 & 13 & 6 & 25 & 14 \\ 16 & 21 & 19 & 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

17.14. Oldjuk meg az $\mathsf{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathsf{C})$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^\mathsf{T} = (45, 70, 30, 100), \ \ \mathbf{b} = (50, 20, 10, 35, 15, 50),$$

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 8 & 9 & 7 \\ 14 & 13 & 10 & 9 & 20 & 21 \\ 15 & 11 & 13 & 25 & 8 & 12 \\ 9 & 19 & 12 & 8 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$