

7. Szimplex algoritmus

7.1. Határozza meg az alábbi lineáris programozási feladatokhoz rendre azokat a standard feladatokat, amelyekre az illető lineáris programozási feladatok visszavezethetők.

$$\begin{array}{rcll}
 3x_1 + x_2 - 4x_3 & \geq & -3 & \\
 2x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 8 & \\
 x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 & \\
 x_1 & \geq & 0 & \\
 \hline
 3x_1 + x_2 - 3x_3 & \rightarrow & \max &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcll}
 4x_1 + x_2 - 5x_3 & \geq & 7 & \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 8 & \\
 -5x_1 + x_2 & = & -2 & \\
 x_1 & \leq & 0 & \\
 & & x_2 & \geq 0 \\
 \hline
 -2x_1 - 4x_2 + x_3 & \rightarrow & \min &
 \end{array}$$

7.2. Mutassa meg, hogy a

$$\begin{array}{rcll}
 2x - y & = & 0 & \\
 x + y & = & 1 & \\
 x & \geq & 0 & \\
 & & y & \geq 0 \\
 \hline
 5x + 4y & \rightarrow & \min &
 \end{array}
 \quad \text{és} \quad
 \begin{array}{rcll}
 -x + 2y & = & 1 & \\
 -3x + 3y & = & 1 & \\
 x & \geq & 0 & \\
 & & y & \geq 0 \\
 \hline
 -x + 7y & \rightarrow & \min &
 \end{array}$$

standard feladatok ekvivalensek.

7.3. Konstruáljon az alábbi lineáris programozási feladatokhoz olyan lehetséges kanonikus alakú feladatokat, amelyekre az illető lineáris programozási feladatok visszavezethetők. Adja meg a feladatok szimplex táblázatát, és oldja meg szimplex algoritmussal ezen feladatokat.

(a)

$$\begin{array}{rcll}
 x_1 + 3x_2 & \leq & 7 & \\
 3x_1 - x_2 & \leq & 11 & \\
 & & x_2 & \leq 4 \\
 & & x_i & \geq 0 \quad (i = 1, 2) \\
 \hline
 -x_1 - x_2 & \rightarrow & \min &
 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcll}
 4x_1 + 3x_2 - 11x_3 & \leq & 10 & \\
 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 & \leq & 4 & \\
 5x_1 - 2x_2 + 8x_3 & \leq & 2 & \\
 & & x_i & \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \\
 \hline
 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 & \rightarrow & \min &
 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcll}
 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 & \leq & 4 & \\
 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 & \leq & 8 & \\
 -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & \leq & 6 & \\
 x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 & \leq & 10 & \\
 & & x_i & \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\
 \hline
 -3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & \rightarrow & \min &
 \end{array}$$

7.4. Oldja meg szimplex algoritmussal a következő feladatot.

	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	
x_1	1	1	1	1	1	2	2	1	4
x_2	1	2	2	1	1	2	1	1	6
x_3	2	1	-2	2	2	1	3	1	5
	1	2	-5	1	-6	1	-6	8	0

7.5. Egy üzemben négyféle terméket állítanak elő 3-féle nyersanyag felhasználásával. A nyersanyagokból az egyes termékek előállításához rendre 1, 0, 1; 1, 1, 1; 0, 1, 1, illetve 1; 1; 0 egységnyi használnak fel. Az egyes nyersanyagokból rendre maximálisan 90, 80, illetve 50 egységnyi áll rendelkezésre. A termékek eladási egységárai 2, 3, 2, illetve 2 USD. Határozzuk meg az optimális termelési programot.

7.6. Négy termék (α , β , γ , δ) gyártásához három erőforrást (A, B, C) használnak fel a következő technológiai mátrix szerint:

	α	β	γ	δ
A	1	0	2	3
B	3	1	1	0
C	0	2	1	2

A erőforrások kapacitásai rendre: 100, 150 és 300, amelyek közül a másodikat teljesen, a harmadikból legalább 200-at fel kell használni. A termékek egységárai rendre 2, 3, 4, illetve 4 \$. Cél a maximális árbevétel. Írjuk fel a feladat matematikai modelljét és az ahhoz tartozó kanonikus alakot. Határozzuk meg a maximális árbevételt.

8. Házi Feladat

8.1. Hajtsa végre a szimplex algoritmust az alábbi szimplex táblázaton.

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	\underline{b}
u_1	-2	-9	1	9	0
u_2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	-2	0
u_3	1	1	1	1	1
z	-2	-3	1	12	0

Vigyázat!!!

9. Változatok a szimplex algoritmusra

→ *Lexikografikus szimplex algoritmus*: ha

$$\min\{b_r/a_{rj} : a_{rj} > 0, 1 \leq r \leq n\} = b_{k_1}/a_{k_1j} = \dots = b_{k_s}/a_{k_sj},$$

akkor tekintsük a

$$\mathbf{h}_{k_t} = (b_{k_t}, a_{k_t1}, \dots, a_{k_t, n+m})/a_{k_tj} \quad (t = 1, \dots, s)$$

vektorokat, és legyen $\mathbf{h}_k = \text{lexmin}\{\mathbf{h}_{k_1}, \dots, \mathbf{h}_{k_s}\}$. Válasszuk az a_{k_j} elemet generáló elemnek.

9.1. Rendezze lexikografikusan az alábbi vektorokat:

$$(3, 4, 2, 1, 0), \quad (2, 1, -1, 0, 4), \quad (3, 4, 1, -2, 0), \\ (2, 1, -1, 0, 5), \quad (3, 4, -2, 3, 4), \quad (2, 1, -1, 0, 0).$$

9.2. Adjon meg n -dimenziós vektoroknak olyan végtelen halmazát, amelynek nem létezik lexikografikus minimuma.

9.3. Mutassa meg, hogy az alábbi feladat nem oldható meg szimplex algoritmussal, majd oldja meg lexikografikus szimplex algoritmussal.

	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1/4	-8	-1	9	0
x_2	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	1
	-3/4	20	-1/2	6	0

9.4. Hajtsa végre a lexikografikus szimplex algoritmust az alábbi szimplex táblázaton.

	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	-2	-9	1	9	0
x_2	1/3	1	-1/3	-2	0
x_3	1	1	1	1	1
	-2	-3	1	12	0

9.5. Oldja meg az alábbi feladatokat lexikografikus szimplex algoritmussal.

b. vált.	$\mathbf{b}^{(v)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	0	1	-2	-3	4
x_2	0	0	1	0	4	-3	-2	1
x_3	1	0	0	1	1	1	1	1
$v=0$	0	0	0	0	-1	1	-1	1

b. vált.	$\mathbf{b}^{(v)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	0	2	-3	-5	6
x_2	0	0	1	0	6	-5	-3	2
x_3	1	0	0	1	3	1	2	4
$v=0$	0	0	0	0	-1	1	-1	1

→ *A legnagyobb csökkenés módszere*: minden iterációs lépésben, minden egyes $c_s < 0$ együtthatóra meghatározzuk a

$$\Delta_s = \min\{b_r/a_{rs} : a_{rs} > 0, 1 \leq r \leq n\}$$

mennyiséget. Ha ezek a minimumok rendre léteznek, akkor képezzük a

$$\Theta = \min\{c_s \Delta_s : c_s < 0, 1 \leq s \leq n + m\}$$

minimumot, és kiválasztjuk a legkisebb olyan j indexet, amelyre $\Theta = c_j \Delta_j$ teljesül. Ezt követően a c_j elem oszlopában választunk generáló elemet a szimplex algoritmusnak megfelelően.

9.6. Oldja meg a legnagyobb csökkenés módszerével az alábbi feladatot.

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_1 & & +6x_4 & + & 8x_5 & - & x_6 & + & x_7 & = & 4 \\
 x_2 & & +2x_4 & + & 4x_5 & & & & + & 2x_7 & = & 4 \\
 x_3 & & -x_4 & & & + & x_6 & + & x_7 & = & 6 \\
 \hline
 & & & & & & & & x_i & \geq & 0 \quad (i = 1, \dots, 7) \\
 \hline
 & & -2x_4 & - & 4x_5 & - & x_6 & + & 3x_7 & \rightarrow & \min
 \end{array}$$

9.7. Oldja meg a legnagyobb csökkenés módszerének lexikografikus változatával az alábbi feladatot.

b. vált.	$\mathbf{b}^{(v)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	0	2	-2	2	4	0
x_2	0	0	1	0	-1	2	-1	1	0
x_3	1	0	0	1	1	-1	1	3	1
$v=0$	0	0	0	0	-2	1	-2	2	-3

→ *A legmeredekebb csökkentés módszere*: minden iterációs lépésben, minden egyes $c_s < 0$ együtthatóra meghatározzuk a c_s/σ_s mennyiséget, ahol

$$\sigma_s = \sqrt{1 + a_{1s}^2 + \dots + a_{ns}^2}.$$

Ezek után képezzük a

$$\Theta = \min\{c_s/\sigma_s : c_s < 0, 1 \leq s \leq n + m\}$$

minimumot, és kiválasztjuk a legkisebb olyan j indexet, amelyre $\Theta = c_j/\sigma_j$ teljesül. Ezt követően a c_j elem oszlopában választunk generáló elemet a szimplex algoritmusnak megfelelően.

9.8. Oldja meg a legmeredekebb csökkentés módszerével az alábbi feladatot.

	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	2	-1	2
x_2	1	2	1	6
x_3	2	3	3	8
	-4	-5	-3	0

→ *P. Wolfe algoritmus*:

1. lépés. A tekintett lehetséges kanonikus alakú feladat jobboldalán szereplő b_i ($i = 1, \dots, n$) mennyiségeket rendre helyettesítsük a $(b_i, 0)$ ($i = 1, \dots, n$) elempárokkal.

2. lépés. Ha a feladat célfüggvénye nem tartalmaz negatív együtthatót, akkor vége az eljárásnak, a feladat bázismegoldása optimális megoldás. Ellenkező esetben a 3. lépés következik.

3. lépés. Vizsgáljuk meg rendre az egyenletrendszer jobboldalán szereplő (b_i, ν_i) ($i = 1, \dots, n$) elempárokat, és $b_i = 0$ esetén a (b_i, ν_i) párt helyettesítsük $(1, \nu_i + 1)$ -gyel. Ezek után vegyük a negatív c_s -ek minimumát. Jelölje c_j a minimummal megegyező c_s -ek közül a legkisebb indexűt, és térjünk rá a 4. lépésre.

4. lépés. Képezzük a $\nu = \max\{\nu_t : 1 \leq t \leq n\}$ maximumot és határozzuk meg az $M = \{t : 1 \leq t \leq n, \nu = \nu_t\}$ halmazt, továbbá a

$$\Delta = \min\{b_r/a_{rj} : a_{rj} > 0, r \in M\}$$

értéket. Ha ez utóbbi minimum nem létezik és $\nu = 0$, akkor vége az eljárásnak, a célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán. Ha Δ nem létezik és $\nu > 0$, akkor az 5. lépéssel folytatódik az eljárás. Végül, ha Δ létezik és

$$\Delta = \frac{b_{k_1}}{a_{k_1j}} = \dots = \frac{b_{k_s}}{a_{k_sj}},$$

akkor válasszük az a_{k_tj} ($t = 1, \dots, s$) elemek közül a legkisebb sorindexű generáló elemként. Jelölje a választott generáló elemet a_{kj} . Az a_{is} együtthatókon és a célfüggvényegyütthatókon a szimplex algoritmus szerinti átalakításokat hajtsuk végre, a (b_i, ν_i) ($i = 1, \dots, n$) elempárokon és az α konstanson pedig a következőket:

- ha $\nu_i < \nu_k (= \nu)$, akkor $(b'_i, \nu'_i) = (b_i, \nu_i)$,
- ha $\nu_i = \nu_k$ és $i \neq k$, akkor $(b'_i, \nu'_i) = (b_i - a_{ij}b_k/a_{kj}, \nu_i)$,
- $(b'_k, \nu'_k) = (b_k/a_{kj}, \nu_k)$,
- $\alpha' = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } \nu_k > 0, \\ \alpha - c_j b_k/a_{kj}, & \text{különben.} \end{cases}$

Az átalakításokkal előállított új feladattal folytassuk az eljárást a 2. lépéssel.

5. lépés. Minden egyes $t \in M$ indexre a (b_t, ν_t) elempárt helyettesítsük $(0, \nu_t - 1)$ -gyel, majd folytassuk az eljárást a 4. lépéssel.

9.9. Oldja meg a Wolf-féle eljárással az alábbi feladatot.

	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	-2	-9	1	9	0
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	-2	0
x_3	1	1	1	1	1
	-2	-3	1	12	0

→ R. G. Bland algoritmus:

1. lépés. Ha a feladat célfüggvénye nem tartalmaz negatív együtthatót, akkor vége az eljárásnak, a feladat bázismegoldása optimális megoldás. Ellenkező esetben a 2. lépés következik.

2. lépés. Vegyük a legkisebb indexű negatív célfüggvényegyütthatót, és jelölje ezt c_j . Ha $a_{rj} \leq 0$ ($r = 1, \dots, n$), akkor vége az eljárásnak, a célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán. Ellenkező esetben a 3. lépés következik.

3. lépés. Ha $\min\{b_r/a_{rj} : a_{rj} > 0, 1 \leq r \leq n\} = b_{k_1}/a_{k_1j} = \dots = b_{k_s}/a_{k_sj}$, akkor tekintsük rendre a k_1 -edik, ..., k_s -edik egyenletben szereplő $x_{i_{k_1}}, \dots, x_{i_{k_s}}$ bázisváltozókat, és legyen $i_{k_v} = \min\{i_{k_r} : 1 \leq r \leq s\}$. Ezek után válasszuk a_{k_vj} -t generáló elemnek, majd hajtsuk végre a szimplex algoritmusban megadott átalakításokat. Az előállított feladattal folytassuk az eljárást az 1. lépésnél.

9.10. Oldja meg a Bland-féle eljárással az alábbi feladatot.

b. vált.	$\mathbf{b}^{(v)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	0	0	1	-2	-4	4
x_2	0	0	1	0	2	-2	-2	1
x_3	1	0	0	1	1	1	3	2
$v = 0$	0	0	0	0	-1	0	-1	1