1. Szükséges definíciók

Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér K részhalmaz **konvex**, ha valahányszor $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in K$ és $\lambda \in [0,1]$, mindannyiszor $\lambda \cdot \underline{v}_1 + (1-\lambda) \cdot \underline{v}_2 \in K$.

Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorainak

$$\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{v}_k$$

lineáris kombinációja ($\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$) **konvex lineáris kombináció**, ha $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geqslant 0$ és $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$.

1.1. Konvex halmaz zárt a konvex lineáris kombinációk képzésére.

Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, $\underline{v} \in K$. Azt mondjuk, hogy $\underline{v}$ **extremális pontja** K-nak, ha $\underline{v} \neq \lambda \cdot \underline{v}_1 + (1-\lambda) \cdot \underline{v}_2$, ahol $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in K$ és $\lambda \in (0,1)$. Jelölés: $\mathrm{Ext}(K)$ a K halmaz extremális pontjainak halmaza.

Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér S részhalmazát **affin altérnek** nevezzük, ha van olyan $U \leqslant \mathbb{R}^n$ altér és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyekre $S = U + \underline{v}$ teljesül.

1.2. Legyenek U_1 és U_2 alterek $\mathbb{R}^n$-ben, valamint legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^n$. Mutassa meg, hogy ha $U_1 + \underline{v}_1 = U_2 + \underline{v}_2$, akkor $U_1 = U_2$. Igaz-e, hogy $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$?

1.3. Igazolja, hogy ha S_1 és S_2 affin alterek $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $S_1 \cap S_2$ is affin altér.

Az S **affin altér dimenziója** legyen az U altér dimenziója.

Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér P részhalmaza **konvex poliéder**, ha vannak olyan $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektorok és $a_1, \dots, a_k$ valós számok, hogy

$$P = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{v}_1^T \underline{x} \leqslant a_1, \dots, \underline{v}_k^T \underline{x} \leqslant a_k \right\}.$$

A korlátos konvex poliédereket **konvex politópoknak** nevezzük.

Legyen $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$B^< = \{\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{v}_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \geqslant 0 \text{ valós számok}\}.$$

A P konvex politóp **szimplex**, ha $\mathrm{Ext}(P) = \dim(P) + 1$.

1.4. Vajon mi lesz a P poliéder dimenziója?

2. Konvex poliéderek

2.1. Legyen $K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ és } x + y \leqslant 1 \right\}$. Határozza meg a K halmaz extremális pontjait.

2.2. Legyen

$$K = \left\{ \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} : \alpha_1, \dots, \alpha_4 \geqslant 0,\ \alpha_1 + \dots + \alpha_4 = 1 \right\}.$$

Határozza meg a K halmaz extremális pontjait.

2.3. Legyen
$$K = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\right\}.$$
Hány dimenziós affin altere $\mathbb{R}^4$-nek K?

2.4. Mutassa meg, hogy a
$$K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n \leqslant 1,\ x_1, \dots, x_n \geqslant 0\}$$
halmaz n-dimenziós szimplex.

2.5. Legyen $K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0 \text{ és } x, y, z \geqslant 0\right\}$. Írja fel K-t $B^<$ alakban.

2.6. Legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ és $K = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : A \cdot \underline{x}^T \leqslant \underline{0}^T\right\}$. Igaz-e, hogy ha $\underline{x} \in K$, akkor $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 19 \end{pmatrix}^T \cdot \underline{x}^T \leqslant 0$?

2.7. Legyen
$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : 3x + 4y - 5z \leqslant -3, 5x - 4y - 3z \leqslant 4, -4x - 3y - 7z \geqslant -30 \text{ és } x, y, z \geqslant 0\right\},$$
és tekintsük az $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x - 2y - 3z$ leképezést. Határozza meg a
$$\min_{(x,y,z)\in K} f(x, y, z) \quad \text{és} \quad \max_{(x,y,z)\in K} f(x, y, z)$$
értékeket.

3. Házi Feladatok 1.

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re és $1 \leqslant k \leqslant n$-re legyen
$$\begin{aligned} e_{k,n} &= (0 \quad \dots \quad 0 \quad \overbrace{1}^{\text{k-adik komp.}} \quad 0 \quad \dots \quad 0) \in \mathbb{R}^{1\times n}, \\ \mathbf{1}_n &= (1 \quad \dots \quad 1) \in \mathbb{R}^{1\times n}. \end{aligned}$$

3.1. Egy országgyűlési választáson a tizenöt szavazókörzetben hat jelöltre lehet szavazni. Az érvényes szavazatok megoszlását az $A = (a_{i,j})_{6\times 15}$ mátrix tartalmazza, amelynek $a_{i,j}$ eleme azt mutatja meg, hogy az i-edik jelöltre a j-edik körzetben hányan szavaztak. Milyen jelentést tulajdoníthatunk a következő kifejezések:

(a) $e_{1,6} \cdot A \cdot \mathbf{1}_{15}^T$;
(b) $\mathbf{1}_6 \cdot A \cdot e_{5,15}^T$;
(c) AA^T, A^TA?

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy a második jelöltre a hatodik körzetben leadott szavazatok száma hány százaléka az összes érvényes szavazatnak.

3.2. Egy áruházban tizenkét féle dobozos sört tartanak. 2010. júliusában regisztrálták a napi fogyást: az A mátrix i-edik sorának j-edik eleme azt jelenti, hogy 2010. júliusának i-edik napján hány darab fogyott a j-edik fajta sörből. A b (sör)vektor a sörök egységárait tartalmazza. Milyen jelentést tulajdoníthatunk az alábbi kifejezéseknek?

(a) $e_{3,31} \cdot A \cdot b^T$;
(b) $\mathbf{1}_{31} \cdot A$;
(c) $A \cdot \mathbf{1}_{12}$.

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy mennyi az ötödik fajta sör árbevétele egy hónap alatt.

4. LP feladatok grafikus megoldása

4.1. Oldja meg grafikusan az alábbi feladatokat.

(a)

$$
\begin{array}{rcrcl}
2x_1 & + & 2x_2 & \geqslant & 2 \\
x_1 & - & x_2 & \leqslant & 4 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 7 \\
-2x_1 & + & x_2 & \leqslant & 1 \\
 & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2) \\
\hline
3x_1 & + & 2x_2 & \rightarrow & \max
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{rcrcl}
2x_1 & - & 2x_2 & \geqslant & -3 \\
x_1 & - & x_2 & \leqslant & 3 \\
x_1 & - & 2x_2 & \leqslant & 0 \\
2x_1 & + & x_2 & \geqslant & 5 \\
 & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2) \\
\hline
4x_1 & + & 2x_2 & \rightarrow & \min
\end{array}
$$

4.2. Adja meg grafikus úton az alábbi feladatok összes optimális megoldását.

$$
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & - & 2x_2 & \leqslant & 2 \\
 & & x_2 & \geqslant & 1 \\
2x_1 & + & x_2 & \geqslant & 6 \\
-2x_1 & + & x_2 & \leqslant & 0 \\
 & & x_i & \geqslant & 0 \ (i=1,2) \\
\hline
ax_1 & + & bx_2 & \rightarrow & \min,
\end{array}
$$

ahol

(a) $a=-5$, $b=10$;

(b) $a=4$, $b=2$;

(a) $a=-2$, $b=2$.

4.3. Az *MMVK* háromféle vegyi anyagot állít elő, amelyek a következők: A, B és C. Ezeket két gyártási folyamatban készítik: Ξ-ben és Ω-ban. Az Ξ folyamat költsége $4\,\frac{\$}{h}$, az Ω folyamat költsége pedig $1\,\frac{\$}{h}$. A folyamatok során az alábbi mennyiségeket állítják elő (egység/óra):

	A	B	C
Ξ gyárt. folyamat (egység/h)	3	1	1
Ω gyárt. folyamat (egység/h)	1	1	0

Az üzem vásárlóinak igénye az A, B és C termékekből rendre naponta legalább 10, 5 és 3 egység. Tervezzük meg a minimális költségű napi tervet.

4.4. János bácsi, aki egy 45 hektáros szántóföldön gazdálkodik, rozsot és kukoricát termeszt. A rozson 30 eFt, a kukoricán 45 eFt haszna van hektáronként. A mezőgazdasági tevékenység során János bácsi (teljesen szabályszerűen) falujabeli embereket foglalkoztat, illetve műtrágyát is használ az alábbi tálázat szerint:

	Rozs	Kukorica
Humán erőforrás (munkás/ha):	3	2
Műtrágya (tonna/ha):	2	4

A faluban 100 munkára fogható ember és János bácsi raktárában 120 tonna műtrágya van. Maximalizáljuk János bácsi profitját.

5. Elemi bázistranszformáció

5.1. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixok inverzét.

5.2. Határozza meg az $AX = B$ egyenletrendszer megoldásait, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Házi Feladat 2.

6.1. Négy gép felhasználásával kétféle terméket állítanak elő: Ξ-t és Ω-t. Az egyes termékek előállításához szükséges gépidők (órában) a következők:

	1. gép	2. gép	3. gép	4. gép
Ξ (egység/h)	1	4	2	1
Ω (egység/h)	2	3	3	2

Az 1., 2., 3., illetve 4. gépen az összes gépóra kapacitás (órában) rendre: 60, 180, 180, illetve 100, amelyek közül a másodikat teljesen ki akarjuk használni. Az Ξ, illetve Ω termék hozama darabonként 25£, illetve 45£. Az első termékre már beérkezett egy 30 darabos megrendelés. Szeretnénk elérni, hogy a hozam legalább 1 200£ legyen. Írjuk fel a maximális árbevételt biztosító termelési program matematikai modelljét és döntsük el, hogy tartható-e a terv.

6.2. Határozza meg az $XA = B$ és $AY = B$ egyenletrendszerek megoldásait ($X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, $Y \in \mathbb{Q}^{2\times 3}$), ahol

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 3 \\ -7 & -9 \end{pmatrix}.$$