

1. Szükséges definíciók

Az \mathbb{R}^n euklideszi tér K részhalmaza **konvex**, ha valahányszor $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in K$ és $\lambda \in [0, 1]$, mindannyiszor $\lambda \cdot \underline{v}_1 + (1 - \lambda) \cdot \underline{v}_2 \in K$.

Az \mathbb{R}^n euklideszi tér $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorainak

$$\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{v}_k$$

lineáris kombinációja ($\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$) **konvex lineáris kombináció**, ha $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$ és $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$.

1.1. Konvex halmaz zárt a konvex lineáris kombinációk képzésére.

Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, $\underline{v} \in K$. Azt mondjuk, hogy \underline{v} **extremális pontja** K -nak, ha $\underline{v} \neq \lambda \cdot \underline{v}_1 + (1 - \lambda) \cdot \underline{v}_2$, ahol $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in K$ és $\lambda \in (0, 1)$. Jelölés: $\text{Ext}(K)$ a K halmaz extremális pontjainak halmaza.

Az \mathbb{R}^n euklideszi tér S részhalmazát **affin altérnek** nevezzük, ha van olyan $U \leq \mathbb{R}^n$ altér és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyekre $S = U + \underline{v}$ teljesül.

1.2. Legyenek U_1 és U_2 alterek \mathbb{R}^n -ben, valamint legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^n$. Mutassa meg, hogy ha $U_1 + \underline{v}_1 = U_2 + \underline{v}_2$, akkor $U_1 = U_2$. Igaz-e, hogy $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$?

1.3. Igazolja, hogy ha S_1 és S_2 affin alterek \mathbb{R}^n -ben, akkor $S_1 \cap S_2$ is affin altér.

Az S **affin altér dimenziója** legyen az U altér dimenziója.

Az \mathbb{R}^n euklideszi tér P részhalmaza **konvex poliéder**, ha vannak olyan $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vektorok és a_1, \dots, a_k valós számok, hogy

$$P = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{v}_1^T \underline{x} \leq a_1, \dots, \underline{v}_k^T \underline{x} \leq a_k \}.$$

A korlátos konvex poliédereket **konvex politópoknak** nevezzük.

Legyen $B = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$B^{\leq} = \{ \alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{v}_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0 \text{ valós számok} \}.$$

A P konvex politóp **szimplex**, ha $\text{Ext}(P) = \dim(P) + 1$.

1.4. Vajon mi lesz a P poliéder dimenziója?

2. Konvex poliéderek

2.1. Legyen $K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ és } x + y \leq 1 \}$. Határozza meg a K halmaz extremális pontjait.

2.2. Legyen

$$K = \left\{ \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} : \alpha_1, \dots, \alpha_4 \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_4 = 1 \right\}.$$

Határozza meg a K halmaz extremális pontjait.

2.3. Legyen

$$K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}.$$

Hány dimenziós affin altere \mathbb{R}^4 -nek K ?

2.4. Mutassa meg, hogy a

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n \leq 1, x_1, \dots, x_n \geq 0\}$$

halmaz n -dimenziós szimplex.

2.5. Legyen $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0 \text{ és } x, y, z \geq 0\}$. Írja fel K -t $B^<$ alakban.

2.6. Legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ és $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : A \cdot \underline{x}^T \leq \underline{0}^T\}$. Igaz-e, hogy ha $\underline{x} \in K$, akkor $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 19 \end{pmatrix}^T \cdot \underline{x}^T \leq 0$?

2.7. Legyen

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y - 5z \leq -3, 5x - 4y - 3z \leq 4, -4x - 3y - 7z \geq -30 \text{ és } x, y, z \geq 0\},$$

és tekintsük az $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x - 2y - 3z$ leképezést. Határozza meg a

$$\min_{(x,y,z) \in K} f(x, y, z) \quad \text{és} \quad \max_{(x,y,z) \in K} f(x, y, z)$$

értékeket.

3. Házi Feladatok 1.

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re és $1 \leq k \leq n$ -re legyen

$$\mathbf{e}_{k,n} = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \overbrace{1}^{\text{k-adik komp.}} \quad 0 \quad \dots \quad 0) \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

$$\mathbf{1}_n = (1 \quad \dots \quad 1) \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

3.1. Egy országgyűlési választáson a tizenöt szavazókörzetben hat jelöltre lehet szavazni. Az érvényes szavazatok megoszlását az $A = (a_{i,j})_{6 \times 15}$ mátrix tartalmazza, amelynek $a_{i,j}$ eleme azt mutatja meg, hogy az i -edik jelöltre a j -edik körzetben hányan szavaztak. Milyen jelentést tulajdoníthatunk a következő kifejezések:

- (a) $\mathbf{e}_{1,6} \cdot A \cdot \mathbf{1}_{15}^T$;
- (b) $\mathbf{1}_6 \cdot A \cdot \mathbf{e}_{5,15}^T$;
- (c) $AA^T, A^T A$?

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy a második jelöltre a hatodik körzetben leadott szavazatok száma hány százaléka az összes érvényes szavazatnak.

3.2. Egy áruházban tizenkét féle dobozos sört tartanak. 2010. júliusában regisztrálták a napi fogyást: az A mátrix i -edik sorának j -edik eleme azt jelenti, hogy 2010. júliusának i -edik napján hány darab fogyott a j -edik fajta sörből. A \mathbf{b} (sör)vektor a sörök egységárait tartalmazza. Milyen jelentést tulajdoníthatunk az alábbi kifejezéseknek?

- (a) $\mathbf{e}_{3,31} \cdot A \cdot \mathbf{b}^T$;
- (b) $\mathbf{1}_{31} \cdot A$;
- (c) $A \cdot \mathbf{1}_{12}$.

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy mennyi az ötödik fajta sör árbevétele egy hónap alatt.

4. LP feladatok grafikus megoldása

4.1. Oldja meg grafikusán az alábbi feladatokat.

(a)

$$\begin{array}{rcl}
 2x_1 & + & 2x_2 \geq 2 \\
 x_1 & - & x_2 \leq 4 \\
 x_1 & + & 2x_2 \leq 7 \\
 -2x_1 & + & x_2 \leq 1 \\
 & & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2) \\
 \hline
 3x_1 & + & 2x_2 \rightarrow \max
 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl}
 2x_1 & - & 2x_2 \geq -3 \\
 x_1 & - & x_2 \leq 3 \\
 x_1 & - & 2x_2 \leq 0 \\
 2x_1 & + & x_2 \geq 5 \\
 & & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2) \\
 \hline
 4x_1 & + & 2x_2 \rightarrow \min
 \end{array}$$

4.2. Adja meg grafikus úton az alábbi feladatok összes optimális megoldását.

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & - & 2x_2 \leq 2 \\
 & & x_2 \geq 1 \\
 2x_1 & + & x_2 \geq 6 \\
 -2x_1 & + & x_2 \leq 0 \\
 & & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2) \\
 \hline
 ax_1 & + & bx_2 \rightarrow \min,
 \end{array}$$

ahol

(a) $a = -5$, $b = 10$;

(b) $a = 4$, $b = 2$;

(a) $a = -2$, $b = 2$.

4.3. Az *MMVK* háromféle vegyi anyagot állít elő, amelyek a következők: A, B és C. Ezeket két gyártási folyamatban készítik: Ξ -ben és Ω -ban. Az Ξ folyamat költsége $4 \frac{\$}{h}$, az Ω folyamat költsége pedig $1 \frac{\$}{h}$. A folyamatok során az alábbi mennyiségeket állítják elő (egység/óra):

	A	B	C
Ξ gyárt. folyamat (egység/h)	3	1	1
Ω gyárt. folyamat (egység/h)	1	1	0

Az üzem vásárlóinak igénye az A, B és C termékekből rendre naponta legalább 10, 5 és 3 egység. Tervezzük meg a minimális költségű napi tervet.

4.4. János bácsi, aki egy 45 hektáros szántóföldön gazdálkodik, rozst és kukoricát termeszt. A rozson 30 eFt, a kukoricán 45 eFt haszna van hektáronként. A mezőgazdasági tevékenység során János bácsi (teljesen szabályszerűen) falujabeli embereket foglalkoztat, illetve műtrágyát is használ az alábbi táblázat szerint:

	Rozs	Kukorica
Humán erőforrás (munkás/ha):	3	2
Műtrágya (tonna/ha):	2	4

A faluban 100 munkára fogható ember és János bácsi raktárában 120 tonna műtrágya van. Maximalizáljuk János bácsi profitját.

5. Elemi bázistranszformáció

5.1. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixok inverzét.

5.2. Határozza meg az $AX = B$ egyenletrendszer megoldásait, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Házi Feladat 2.

6.1. Négy gép felhasználásával kétféle terméket állítanak elő: Ξ -t és Ω -t. Az egyes termékek előállításához szükséges gépidők (órában) a következők:

	1. gép	2. gép	3. gép	4. gép
Ξ (egység/h)	1	4	2	1
Ω (egység/h)	2	3	3	2

Az 1., 2., 3., illetve 4. gépen az összes gépóra kapacitás (órában) rendre: 60, 180, 180, illetve 100, amelyek közül a másodikat teljesen ki akarjuk használni. Az Ξ , illetve Ω termék hozama darabonként $25\mathcal{L}$, illetve $45\mathcal{L}$. Az első termékre már beérkezett egy 30 darabos megrendelés. Szeretnénk elérni, hogy a hozam legalább $1200\mathcal{L}$ legyen. Írjuk fel a maximális árbevételt biztosító termelési program matematikai modelljét és döntsük el, hogy tartható-e a terv.

6.2. Határozza meg az $XA = B$ és $AY = B$ egyenletrendszerek megoldásait ($X \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$, $Y \in \mathbb{Q}^{2 \times 3}$), ahol

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 3 \\ -7 & -9 \end{pmatrix}.$$