Házi feladatok

Matematikai struktúrák

2011/2012. őszi félév

A kitűzött Házi feladatok határidőre történő leadása a félév elfogadásának feltétele. **Kérem, hogy a megoldott feladatokat az alábbiaknak megfelelőlen lássák el sorszámmal, és a nevüket se felejtsék ráírni**.

I.

1. Feladat. Legyenek α és β az alábbi leképezések:

$$\alpha\colon \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\},\ x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor,$$
$$\beta\colon \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\},\ x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor.$$

Határozza meg mindazon $\gamma\colon \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$ leképezések számát, amelyekre az alábbi diagramm kommutatív:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \bullet \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\
 & \bullet
\end{tikzcd}$$

$(\alpha = \beta \circ \gamma)$

2. Feladat. A 2. Feladatsor 2. feladata.

A feladatok beadásának határideje: 2011. szeptember 20., 20:00.

II.

3. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy van-e egységelem az $(\mathbb{R}; h_{a,b})$ grupoidban, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ rögzített valós számok és $h_{a,b}(x, y) = ax + by$. Lehet-e az $(\mathbb{R}; h_{a,b})$ algebra csoport?

4. Feladat. Legyen φ tetszőleges A-ból B-be menő leképezés. Mutassa meg, hogy $A^2 \supseteq \varphi \circ \varphi^{-1} = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

A feladatok beadásának határideje: 2011. szeptember 27., 20:00.

III.

5. Feladat. Legyen $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz, valamint legyen $a \wedge b = \text{ln.a.k.}(a, b)$ és $a \vee b = \text{lk.f.k.}(a, b)$ $(a, b \in L)$. Igazolja, hogy $(a \wedge b) \vee b = b$ és $(a \vee b) \wedge b = b$.

6. Feladat. Legyenek α és β relációk az A halmazon. Igaz-e, hogy $(\alpha \circ \beta)^{-1} \subseteq \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$?

7. Feladat. Írja fel az $\mathbf{M}_3$ háló $\vee$ műveletének művelettáblázatát. (Az $\mathbf{M}_3$ hálót a 3. feladatsor 3. feladatában megtalálhatja.)

A feladatok beadásának határideje: 2011. szeptember 27., 20:00.

IV.

8. Feladat. Rajzolja fel az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

(a) $(\{0,1,2,3,4\}; \leqslant)$, $(\{0,1,2,3,4\}; \geqslant)$;

(b) $(P(\{1,2,3\}); \subseteq)$, $(P(\{1,2,3\}); \supseteq)$;

(c) $(\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}; \subseteq)$.

Melyek hálók a fentiek közül?

9. Feladat. Legyen $\mathbf{M}_{3,3} = (\{0,a,b,c,d,e,f,1\}; \wedge, \vee)$ háló, ahol a $\vee$ művelet művelettáblázata a következő:

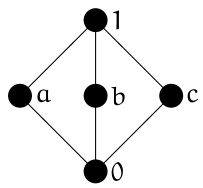
$\vee$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	a	b	c	d	e	f	1
a	a	a	d	d	d	1	1	1
b	b	d	b	d	d	1	1	1
c	c	d	d	c	d	e	f	1
d	d	d	d	d	d	1	1	1
e	e	1	1	e	1	e	1	1
f	f	1	1	f	1	1	f	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Rajzolja fel az $\mathbf{M}_{3,3}$ háló Hasse-diagramját és írja fel a $\wedge$ művelet művelettáblázatát.

A feladatok beadásának határideje: 2011. október 4., 20:00.

V.

Legyen $\mathbf{M}_3$ az alábbi háló:



$\mathbf{M}_3$

10. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{M}_3$ háló kongruenciáit és rajzolja fel a $\mathbf{Con}(\mathbf{M}_3)$ hálót.

11. Feladat. Igaz-e, hogy az $\mathbf{M}_3$ háló moduláris, azaz tetszőleges $x, y, z \in M_3$ esetén, ha $x \leqslant z$, akkor $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$.

A feladatok beadásának határideje: 2011. október 11., 20:00.

VI.

12. Feladat. Legyen $A = \{a,b,c,d\}$ és $\mathbf{A} = (A; *)$, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

$*$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	b	a	d	b
c	a	c	d	c
d	c	b	c	c

Határozza meg az $\mathbf{A}$ algebra részalgebráinak $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ és kongruenciáinak $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, majd rajzolja fel a $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A}); \subseteq)$ és $(\mathrm{Con}(\mathbf{A}); \subseteq)$ részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

A feladatok beadásának határideje: 2011. október 18., 20:00.

VII.

13. Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi algebrák egyszerűek, azaz csak triviális kongruenciáik vannak.

(a) $(A; f)$, ahol $A \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és $f\colon A^3 \to A$, $f(a, b, c) = \begin{cases} a, & \text{ha } a = b, \\ c & \text{különben;} \end{cases}$

(b) $(\mathbb{R}; +\,, \cdot\,)$;

(c) $(\{a, b, c, d\}; *\,)$, ahol a $*$ kétváltozós művelet művelettáblázata a következő (a kipontozott helyek tetszőlegesen kitölthetők):

$*$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	a	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
c	b	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

A feladatok beadásának határideje: 2011. október 25., 20:00.