Házi feladatok

Matematikai struktúrák

2011/2012. őszi félév

A kitűzött Házi feladatok határidőre történő leadása a félév elfogadásának feltétele. **Kérem, hogy a megoldott feladatokat az alábbiaknak megfelelőlen lássák el sorszámmal, és a nevüket se felejtsék ráírni**.

I.

1. Feladat. Legyenek α és β az alábbi leképezések:

$$\alpha\colon \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\},\ x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor,$$
$$\beta\colon \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\},\ x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor.$$

Határozza meg mindazon $\gamma\colon \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$ leképezések számát, amelyekre az alábbi diagramm kommutatív:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \bullet \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

$(\alpha = \beta \circ \gamma)$

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Tegyük fel, hogy a $\gamma\colon \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$ leképezésre teljesül, hogy $\alpha = \beta \circ \gamma$. Ekkor teljesülnek az alábbiak:

$$4\alpha = 4(\beta \circ \gamma) = (4\beta)\gamma = 1\gamma,$$
$$3\alpha = 3(\beta \circ \gamma) = (3\beta)\gamma = 1\gamma,$$

azonban $4\alpha \neq 3\alpha$. Így nem létezik olyan γ leképezés, amelyre a diagramm kommutatív.

2. Feladat. Legyen ρ ekvivalenciareláció az A halmazon. Bizonyítsa be, hogy van olyan B halmaz és olyan $f\colon A \to B$ leképezés, amelyre $\rho = \mathrm{Ker}\,(f)$ teljesül.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Legyen $B = \{a\rho^\bullet : a \in A\}$, ahol $a\rho^\bullet = \{b \in A : (a,b) \in \rho\}$. Ekkor az

$$f\colon A \to B,\ a \mapsto a\rho^\bullet$$

leképezés magja éppen ρ, mivel tetszőleges $a, b \in A$ elemekre

$$(a,b) \in \mathrm{Ker}\,(f) \iff af = bf \iff a\rho^\bullet = b\rho^\bullet \iff (a,b) \in \rho,$$

azaz $\mathrm{Ker}\,(f) = \rho$.

A feladatok beadásának határideje: 2011. szeptember 20., 20:00.

II.

3. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy van-e egységelem az $(\mathbb{R}; h_{a,b})$ grupoidban, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ rögzített valós számok és $h_{a,b}(x,y) = ax + by$. Lehet-e az $(\mathbb{R}; h_{a,b})$ algebra csoport?

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Legyen $\mathbf{A}_{a,b} = (\mathbb{R}; h_{a,b})$. Tegyük fel, hogy $e \in \mathbb{R}$ egységelem az $\mathbf{A}_{a,b}$ algebrában. Ekkor tetszőleges x valós számra teljesül, hogy

$$h_{a,b}(x,e) = x \qquad \text{és} \qquad h_{a,b}(e,x) = x,$$

azaz

$$ax + be = x \qquad \text{és} \qquad ae + bx = x.$$

Így $x = 0$ esetén $be, ae = 0$, aminek következtében —$x = e$-re alkalmazva a fentieket— azt kapjuk, hogy esetén $e = ae + be = 0$. Ekkor minden x valós számra $ax = x$ és $bx = x$ teljesül, így csak $a = b = 1$ lehetséges. Ekkor $e = 0$ valóban egységelem lesz.

Összefoglalva a fentieket: a $h_{a,b}$ műveletre vonatkozóan pontosan akkor van egységelem, ha $a = b = 1$; ekkor az egységelem az $e = 0$ valós szám.

Definíciónk szerint az $(\mathbb{R}; h_{a,b})$ grupoid nem csoport.

4. Feladat. Legyen φ tetszőleges A-ból B-be menő leképezés. Mutassa meg, hogy $A^2 \supseteq \varphi \circ \varphi^{-1} = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

MEGOLDÁS. Mivel $\varphi \subseteq A \times B$, ezért $\varphi^{-1} \subseteq B \times A$ és így $\varphi \circ \varphi^{-1}$ létezik és részhalmaza az $A \times A = A^2$ halmaznak.

Legyen $a, b \in A$. Ekkor

$$\begin{aligned}(a, b) \in \varphi \circ \varphi^{-1} &\iff (\exists c \in B)((a, c) \in \varphi, (c, b) \in \varphi^{-1}) \\ &\iff (\exists c \in B)((a, c) \in \varphi, (b, c) \in \varphi) \\ &\iff (\exists c \in B)(a\varphi = c,\ b\varphi = c) \\ &\iff (a, b) \in \operatorname{Ker}(\varphi),\end{aligned}$$

azaz $\varphi \circ \varphi^{-1} = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

A feladatok beadásának határideje: 2011. szeptember 27., 20:00.

III.

5. Feladat. Legyen $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz, valamint legyen $a \wedge b = \text{ln.a.k.}(a, b)$ és $a \vee b = \text{lk.f.k.}(a, b)$ $(a, b \in L)$. Igazolja, hogy $(a \wedge b) \vee b = b$ és $(a \vee b) \wedge b = b$.

MEGOLDÁS. Mivel $a \wedge b$ alsó korlátja a, b-nek, ezért $a \wedge b \leqslant a, b$. Így $a \wedge b, b \leqslant b$, aminek következtében $(a \wedge b) \vee b \leqslant b$. Másrészt, $(a \wedge b) \vee b$ felső korlátja $a \wedge b, b$-nek, ezért $b \leqslant (a \wedge b) \vee b \leqslant b$. Azaz, az antiszimmetria miatt $\leqslant (a \wedge b) \vee b = b$. A másik egyenlőség hasonlóan igazolható.

6. Feladat. Legyenek α és β relációk az A halmazon. Igaz-e, hogy $(\alpha \circ \beta)^{-1} \subseteq \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$?

MEGOLDÁS. Legyen $a, b \in A$. Ekkor

$$\begin{aligned}(a, b) \in (\alpha \circ \beta)^{-1} &\Longrightarrow (b, a) \in \alpha \circ \beta \\ &\Longrightarrow (\exists c \in A)((b, c) \in \alpha,\ (c, a) \in \beta) \\ &\Longrightarrow (\exists c \in A)((c, b) \in \alpha^{-1},\ (a, c) \in \beta^{-1}) \\ &\Longrightarrow (\exists c \in A)((a, c) \in \beta^{-1},\ (c, b) \in \alpha^{-1}) \\ &\Longrightarrow (a, b) \in \beta^{-1} \circ \alpha^{-1},\end{aligned}$$

azaz $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$.

7. Feladat. Írja fel az $\mathbf{M}_3$ háló $\vee$ műveletének művelettáblázatát. (Az $\mathbf{M}_3$ hálót a 3. feladatsor 3. feladatában megtalálhatja.)

MEGOLDÁS. Az $\vee$ művelet táblázata az alábbi:

$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	1	1	1
b	b	1	b	1	1
c	c	1	1	c	1
1	1	1	1	1	1

A feladatok beadásának határideje: 2011. szeptember 27., 20:00.

IV.

8. Feladat. Rajzolja fel az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

(a) $(\{0, 1, 2, 3, 4\};\ \leqslant\ )$, $(\{0, 1, 2, 3, 4\};\ \geqslant\ )$;

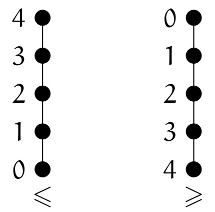
(b) $(\mathsf{P}(\{1, 2, 3\});\ \subseteq\ )$, $(\mathsf{P}(\{1, 2, 3\});\ \supseteq\ )$;

(c) $(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\};\ \subseteq\ )$.

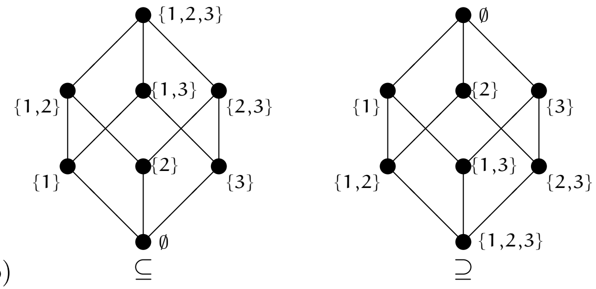
Melyek hálók a fentiek közül?

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ A Hasse-diagramok rendre a következők:

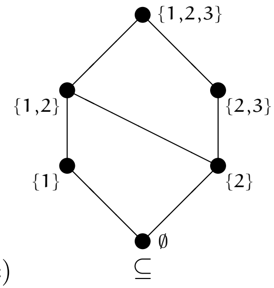
(a)



(b)



(c)



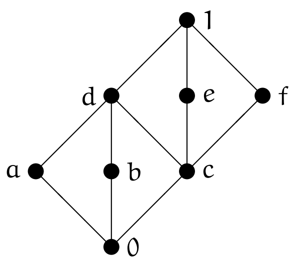
A fentiek mindegyike háló.

9. Feladat. Legyen $\mathbf{M}_{3,3} = (\{0, a, b, c, d, e, f, 1\};\ \wedge\ ,\ \vee\ )$ háló, ahol a $\vee$ művelet művelettáblázata a következő:

$\vee$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	a	b	c	d	e	f	1
a	a	a	d	d	d	1	1	1
b	b	d	b	d	d	1	1	1
c	c	d	d	c	d	e	f	1
d	d	d	d	d	d	1	1	1
e	e	1	1	e	1	e	1	1
f	f	1	1	f	1	1	f	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Rajzolja fel az $\mathbf{M}_{3,3}$ háló Hasse-diagramját és írja fel a $\wedge$ művelet művelettáblázatát.

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ Az $\mathbf{M}_{3,3}$ háló Hasse-diagramja:



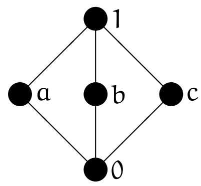
Az $\vee$ művelet művelettáblázata:

$\wedge$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	0	0	0	a
b	0	0	b	0	b	0	0	b
c	0	0	0	c	c	c	c	c
d	0	a	b	c	d	c	c	d
e	0	0	0	c	c	e	c	e
f	0	0	0	c	c	c	f	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

A feladatok beadásának határideje: 2011. október 4., 20:00.

V.

Legyen $\mathbf{M}_3$ az alábbi háló:



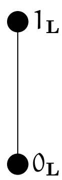
$\mathbf{M}_3$

10. Feladat. Határozza meg az $\mathbf{M}_3$ háló kongruenciáit és rajzolja fel a $\mathbf{Con}(\mathbf{M}_3)$ hálót.

$\boxed{\text{MEGOLDÁS.}}$ Először a főkongruenciákat határozzuk meg. Az előadáson elhangzottak és az a, b és c elemek szimmetriája miatt elegendő a $\Theta_{0,1}$, $\Theta_{0,a}$ és $\Theta_{a,1}$ főkongruenciákat leírni. Mivel a kongruenciaosztályok konvex részhálók, ezért $\Theta_{0,1} = 1_{M_3}$. Legyen $x \in \{b, c\}$. Ekkor $(0, a), (x, x) \in \Theta_{0,a}$ következtében $(x, 1) = (0 \vee x, a \vee x) \in \Theta_{0,a}$, azaz $(b, 1), (c, 1) \in \Theta_{0,a}$. Így $(0, 1) = (b \wedge c, 1 \wedge 1) \in \Theta_{0,a}$. Ebből pedig már következik, hogy $\Theta_{0,a} = 1_{M_3}$.

A $\Theta_{a,1} = 1_{M_3}$ egyenlőséget is hasonlóan kaphatjuk. Ha $x \in \{b, c\}$, akkor $(a, 1), (x, x) \in \Theta_{0,a}$ következtében $(0, x) = (a \wedge x, 1 \wedge x) \in \Theta_{0,a}$, azaz $(0, b), (0, c) \in \Theta_{0,a}$. Így $(0, 1) = (0 \vee 0, b \vee c) \in \Theta_{0,a}$. Ebből pedig már következik, hogy $\Theta_{a,1} = 1_{M_3}$.

Ezzel igazoltuk, hogy az $\mathbf{M}_3$ háló valamennyi, az egyenlőség relációtól különböző, főkongrueniája a teljes reláció. Így $\mathrm{Con}(\mathbf{M}_3) = \{0_{M_3}, 1_{M_3}\}$ és a $\mathbf{Con}(\mathbf{M}_3)$ háló az alábbi ábrán látható.



11. Feladat. Igaz-e, hogy az $\mathbf{M}_3$ háló moduláris, azaz tetszőleges $x, y, z \in M_3$ esetén, ha $x \leqslant z$, akkor $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$.

$\boxed{\text{MEGOLDÁS.}}$ Legyenek $a, b, c \in M_3$ olyan elemek, hogy $a \leqslant c$. Ha $a = c$, akkor a hálóműveletek abszorptivitása miatt

$$(a \vee b) \wedge a = a = a \vee (b \wedge a).$$

Ha $a \neq c$, akkor $a = 0$ vagy $c = 1$. Ha $a = 0$, akkor

$$(0 \vee b) \wedge c = b \wedge c = 0 \vee (b \wedge c),$$

ha $c = 1$, akkor

$$(a \vee b) \wedge 1 = a \vee b = a \vee (b \wedge 1).$$

Így az $\mathbf{M}_3$ háló moduláris.

A feladatok beadásának határideje: 2011. október 11., 20:00.

VI.

12. Feladat. Legyen $A = \{a, b, c, d\}$ és $\mathbf{A} = (A; *)$, ahol $*$ az alábbi kétváltozós művelet:

$*$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	b	a	d	b
c	a	c	d	c
d	c	b	c	c

Határozza meg az $\mathbf{A}$ algebra részalgebráinak $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ és kongruenciáinak $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ halmazát, majd rajzolja fel a $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A}); \subseteq)$ és $(\mathrm{Con}(\mathbf{A}); \subseteq)$ részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját.

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ algebra részuniverzumai. A művelettáblázatból leolvasható, hogy

$$\begin{aligned} \mathrm{Sg}^{\mathbf{A}}(a) = \mathrm{Sg}^{\mathbf{A}}(b) &= \{a, b\}, \\ \mathrm{Sg}^{\mathbf{A}}(c) = \mathrm{Sg}^{\mathbf{A}}(d) &= \{c, d\}, \\ \mathrm{Sg}^{\mathbf{A}}(a, c) = \mathrm{Sg}^{\mathbf{A}}(a, d) &= A. \end{aligned}$$

Így $\mathbf{A}$ részuniverzumai: $\emptyset$, $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ és A.

Az $\mathbf{A}$ algebra kongruenciái. Először a főkongruenciákat határozzuk meg:

$\Theta_{a,b}$: mivel

$$\begin{aligned} (c, c), (a, b) \in \Theta_{a,b} &\Longrightarrow (a, c) = (c * a, c * b) \in \Theta_{a,b}, \\ (c, c), (a, c) \in \Theta_{a,b} &\Longrightarrow (a, d) = (c * a, c * c) \in \Theta_{a,b}, \end{aligned}$$

ezért $\Theta_{a,b} = 1_A$.

$\Theta_{a,c}$: mivel

$$\begin{aligned} (a, a), (a, c) \in \Theta_{a,c} &\Longrightarrow (b, c) = (a * a, a * c) \in \Theta_{a,c}, \\ (b, b), (a, c) \in \Theta_{a,c} &\Longrightarrow (b, d) = (b * a, b * c) \in \Theta_{a,c}, \end{aligned}$$

ezért $\Theta_{a,c} = 1_A$.

$\Theta_{a,d}$: mivel

$$\begin{aligned} (a, a), (a, d) \in \Theta_{a,d} &\Longrightarrow (b, d) = (a * a, a * d) \in \Theta_{a,d}, \\ (c, c), (a, d) \in \Theta_{a,d} &\Longrightarrow (a, c) = (c * a, c * d) \in \Theta_{a,d}, \end{aligned}$$

ezért $\Theta_{a,b} = 1_A$.

$\Theta_{b,d}$: mivel

$$(a, a), (b, d) \in \Theta_{b,d} \Longrightarrow (a, d) = (a * b, a * d) \in \Theta_{b,d},$$

ezért $1_A = \Theta_{a,d} \subseteq \Theta_{b,d}$ miatt $\Theta_{b,d} = 1_A$.

$\Theta_{b,c}$: mivel

$$(b, b), (b, c) \in \Theta_{b,d} \Longrightarrow (a, d) = (b * b, b * c) \in \Theta_{b,d},$$

ezért $1_A = \Theta_{a,d} \subseteq \Theta_{b,c}$ miatt $\Theta_{b,c} = 1_A$.

$\Theta_{c,d}$: mivel

$$(b, b), (c, d) \in \Theta_{b,d} \Longrightarrow (d, b) = (b * c, b * d) \in \Theta_{c,d},$$

ezért $1_A = \Theta_{b,d} = \Theta_{d,b} \subseteq \Theta_{c,d}$ miatt $\Theta_{c,d} = 1_A$.

A fentiek azt mutatják, hogy $(x, y) \in A^2 \setminus 0_A$ esetén $\Theta_{x,y} = 1_A$. Így $\mathbf{A}$ egyszerű.

A feladatok beadásának határideje: 2011. október 18., 20:00.

VII.

13. Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi algebrák egyszerűek, azaz csak triviális kongruenciáik vannak.

(a) $(A; f)$, ahol $A \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és $f\colon A^3 \to A,\ f(a,b,c) = \begin{cases} a, & \text{ha } a = b, \\ c & \text{különben;} \end{cases}$

(b) $(\mathbb{R}; +\,,\,\cdot\,)$;

(c) $(\{a,b,c,d\}; *\,)$, ahol a $*$ kétváltozós művelet művelettáblázata a következő (a kipontozott helyek tetszőlegesen kitölthetők):

$*$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	a	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
c	b	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

$\boxed{\text{Megoldás.}}$ (a) Legyen $(a,b) \in A^2 \backslash 0_A$ és legyen c tetszőleges eleme A-nak. Ekkor $(a,b),(a,a),(c,c) \in \Theta(a.b)$ miatt $a = f(a,a,c)\,\Theta(a,b)\,f(b,a,c) = c$, azaz $c \in a\Theta(a,b)^\bullet$. Így $\Theta(a,b) = 1_A$. Ha $\alpha \neq 0_A$ kongruenciája az $(A; f)$ algebrának, akkor van olyan $(a,b) \in A^2 \setminus 0_A$, hogy $(a,b) \in \alpha$. Így $\Theta(a,b) \subseteq \alpha$ miatt $\alpha = 1_A$.

(b) Legyen $\alpha \neq 0_\mathbb{R}$ kongruenciája az $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ algebrának. Legyen $(a,b) \in \alpha \backslash 0_\mathbb{R}$ és legyen c tetszőleges valós szám. Mivel $(a,b), (-a,-a) \in \alpha$, ezért $(0, b-a) = (a+(-a), b+(-a)) \in \alpha$ és $b - a \neq 0$. Továbbá, $(0, b-a), (c/(b-a), c/b-a)) \in \alpha$ következtében $(0,c) = (0 \cdot c(b-a), (b-a) \cdot c/(b-a)) \in \alpha$. Azaz $0\alpha^\bullet = \mathbb{R}$, így $\alpha = 1_\mathbb{R}$.

(c) Vizsgáljuk meg a főkongruenciákat! (Ld.: 12. feladat.)

A feladatok beadásának határideje: 2011. október 25., 20:00.

Mindannyiuknak kellemes őszi szünetet kívánok!