1. Algebrai testbővítések

1.1. Jelölje R a $\mathbb{Z}$ vagy $\mathbb{Q}$ halmazok valamelyikét, és legyen $R[\xi] = \{a + b\xi \mid a, b \in R\}$, ahol $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ egy másodfokú valós együtthatós polinom egyik gyöke. A másik gyököt jelölje ξ'. Mutassa meg, hogy

(a) $R[\xi]$ elemeinek $a + b\xi$ $(a, b \in R)$ alakban való előállítása egyértelmű;
(b) $R[\xi] = R[\xi']$;
(c) $\mathbb{Z}[\xi]$ gyűrű és $\mathbb{Q}[\xi]$ számtest (a szokásos összeadásra és szorzásra).

1.2. Határozza meg a

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}$;
(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}$;
(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}$;

testbővítések fokát.

1.3. Legyenek $p_1, \ldots, p_n$ páronként különböző prímszámok $(n \in \mathbb{N})$. Mutassa meg, hogy a

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}$$

testbővítés foka 2^n. Adjon meg bázist a $\mathbb{Q}$ feletti $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ vektortérben.

1.4. Határozza meg az $\alpha = 1+i$, $\beta = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ és $\gamma = 1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ komplex számok $\mathbb{Q}$ feletti minimálpolinomját.

1.5. Legyenek K olyan test melynek karakterisztikája nem 2, valamint legyen az L test K testbővítése. Mutassa meg, hogy ha u és v az L test olyan elemei, amelyekre $u^2, v^2 \in K$ és $u^2 \neq v^2$ teljesül, akkor $K(u, v) = K(u+v)$.

1.6. Tegyük fel, hogy $[L : K]$ prímszám. Mik lesznek az $L : K$ testbővítés közbülső testei?

1.7. Tegyük fel, hogy K_1 és K_2 az $L : K$ testbővítés olyan közbülső testei, amelyekre $L = K(K_1, K_2)$. Mutassa meg, hogy $[L : K] \leqslant [K_1 : K] \cdot [K_2 : K]$.

1.8. Legyen az $L : K$ testbővítés n-edfokú $(n \in \mathbb{N})$. Tetszőleges $\alpha \in L$-re legyen T_α a következő leképezés:

$$T_\alpha \colon L \to L, \ \beta \mapsto \alpha\beta.$$

Mutassa meg, hogy

(a) a T_α leképezés a K feletti L vektortér lineáris transzformációja;
(b) az L test izomorf a $K^{n\times n}$ mátrixgyűrű egy résztestével;
(c) $m_{\alpha,K} \mid \det(xI - T_\alpha)$.

A fentiek felhasználásával határozza meg a $\gamma = 2 + 3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4}$ valós szám $\mathbb{Q}$ feletti minimálpolinomját.

1.9. Mutassa meg, hogy az $f = x^3 + 3x + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben. Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ az f polinom gyöke. Fejezze ki az α^{-1} és $(1+\alpha)^{-1}$ elemeket az 1, α és α^2 elemek racionális együtthatós lineáris kombinációjaként.

1.10. Legyen az L test a K test véges testbővítése, valamint α algebrai elem K felett. Tegyük fel, hogy $[K(\alpha) : K]$, $[L : K]$ relatív prímek. Mutassa meg, hogy $m_{\alpha,L} \in K[x]$.

1.11. Bizonyítsa be, hogy ha $[L:K]$ prímszám, akkor az $L:K$ testbővítés egyszerű.

1.12. Az $L:K$ tesbővítésre teljesül, hogy $L = K(u,v)$, ahol $u, v \in L$ és

$$\text{ln.k.o.}\,(\text{gr}_{u,K}, \text{gr}_{v,K}) = 1.$$

Bizonyítsa be, hogy $[L:K] = \text{gr}_{u,K} \cdot \text{gr}_{v,K}$.

1.13. Legyen L a K test testbővítése. Mutassa meg, hogy ha az $u \in L$ elemre $[K(u):K]$ páratlan, akkor $K(u^2) = K(u)$.

1.14. Legyen K megszámlálhatóan végtelen test és $L:K$ algebrai testbővítés. Mutassa meg, hogy L is megszámlálhatóan végtelen. Mutassuk meg, hogy vannak olyan valós számok, amelyek transzcendensek a racionális számok teste felett.

1.15. Legyen $L:K$ testbővítés, $\alpha \in L$ transzcendens elem K felett és $f \in K[x]$ nem konstans polinom. Mutassa meg, hogy

(a) $f(\alpha)$ transzcendens K felett;
(b) ha $\beta \in L$-re $f(\beta) = \alpha$ teljesül, akkor β is transzcendens K felett.

1.16. Legyenek a és b olyan komplex számok, amely transzcendensek $\mathbb{Q}$ felett. Igaz-e, hogy $a \pm b$, $a \cdot b$, a/b, a^b is transzcendens $\mathbb{Q}$ felett?

1.17. Tegyük fel, hogy $K(\alpha,\beta):K$ olyan testbővítést, ahol $\alpha \notin K$ algebrai elem, míg β transzcendens K felett. Mutassa meg, hogy $K(\alpha,\beta):K$ nem egyszerű.

1.18. Tegyük fel, hogy $L:K$ algebrai testbővítés, és legyen $\tau\colon L \to L$ olyan injektív homomorfizmus, amelyre $\tau(\alpha) = \alpha$ teljesül tetszőleges $\alpha \in K$ esetén. Mutassa meg, hogy τ izomorfizmus.

1.19. Tegyük fel, hogy α transzcendens elem a K test felett. Mutassa meg, hogy ha $\beta \in K(\alpha) \setminus K$, akkor $K(\alpha):K(\beta)$ bővítés véges és β transzcendens K felett. Ha $\beta = f(\alpha)/g(\alpha)$ ($f, g \in K[x]$, $\text{ln.k.o.}\,(f,g) \sim 1$), akkor $[K(\alpha):K(\beta)] = \max(f^*, g^*)$.

1.20. Legyen K olyan test, melynek karakterisztikája nem 2, valamint tegyük fel, hogy az L testre $[L:K] = 2$ teljesül. Legyen

$$S(L) = \left\{a \in K^\times \mid a \text{ egy } L\text{-beli elem négyzete}\right\}.$$

Mutassa meg, hogy $S(L)$ részcsoport $K^\times$-ban.[1]

1.21. Legyenek L, L' és K olyan testek, amelyekre $\text{char}(K) \neq 2$ és $[L:K] = [L':K] = 2$. Mutassa meg, hogy pontosan akkor van olyan $\varphi\colon L \to L'$ izomorfizmus, amely fixen hagyja K elemeit, ha $S(L) = S(L')$.

1.22. Legyenek p páratlan prímszám. Mutassa meg, hogy izomorfiától eltekintve egyetlen p^2-elemű test van.

1.23. Legyen $\alpha = \sqrt[3]{2}e^{2\pi i/3}$. Igazolja, hogy a -1 egész szám nem áll elő $\mathbb{Q}(\alpha)$-beli elemek négyzetének összegeként.

1.24. Legyen R tetszőleges $\mathbb{C}$-t tartalmazó integritástartomány. Bizonyítsa be, hogy ha R véges dimenziós vektortér $\mathbb{C}$ felett, akkor $R = \mathbb{C}$.

1.25. Legyen $L:K$ algebrai testbővítés, valamint legyen R olyan gyűrű, amelyre $K \subseteq R \subseteq L$ teljesül. Mutassa meg, hogy R test.

1.26. Legyen K test, x határozatlan és $y = \dfrac{x^3}{x+1} \in K(x)$. Határozza meg az $m_{x,K(y)}$ polinomot.

1.27. Adja meg a $\mathbb{Q}(x)$ test olyan K algebrai testbővítését, amelyben az $y^2 - \dfrac{x^3}{x^2+1} \in \mathbb{Q}(x)[y]$ polinomnak van gyöke.

[1]Tetszőleges L testre $L^\times$ jelöli a test multiplikatív csoportját, azaz $L^\times = (L \setminus \{0\}; \cdot)$.

2. Algebrai és transzcendens számok

2.1. Legyenek α és β algebrai számok, amelyek összege racionális szám. Mutassa meg, hogy $\mathrm{gr}_{\alpha,\mathbb{Q}} = \mathrm{gr}_{\beta,\mathbb{Q}}$.

Azt mondjuk, hogy az α algebrai szám *algebrai egész szám*, ha $m_{\alpha,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}[x]$.

2.2. Van-e nemtriviális megoldása az $x^n + y^n = z^n$ Fermat-egyenletnek ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) az algebrai egészek körében? (Az x, y, z megoldás nemtriviális, ha $xyz \neq 0$.)

2.3. Bizonyítsa be, hogy az $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ valós szám nem másodfokú algebrai szám.

2.4. Azt mondjuk, hogy az α algebrai egész szám *Pisot-szám*, ha α egész szám vagy ha α valamennyi — α-tól különböző — konjugáltjának abszolút értéke 1-nél kisebb. Bizonyítsa be, hogy végtelen sok legalább másodfokú Pisot-szám létezik.

2.5. Bizonyítsa be, hogy ha α Pisot-szám, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \|\alpha^n\| = 0.$$

(Tetszőleges x valós számra $\|x\| = \min\{\{x\}, 1 - \{x\}\}$.)

2.6. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.

(a) A valós algebrai számok sűrűn helyezkednek el a valós számegyenesen.
(b) Az algebrai számok sűrűn helyezkednek el a komplex számsíkon.
(c) A valós algebrai egész számok sűrűn helyezkednek el a valós számegyenesen.
(d) Az algebrai egész számok sűrűn helyezkednek el a komplex számsíkon.
(e) Az n-edfokú valós algebrai számok sűrűn helyezkednek el a valós számegyenesen ($n \in \mathbb{N}$).
(f) Az n-edfokú algebrai számok sűrűn helyezkednek el a komplex számsíkon ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$).

3. Irreducibilis polinomok

3.1. Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ legalább elsőfokú, primitív polinom. Ha létezik olyan p prímszám, amelyre $p \mid a_1, \ldots, a_n$, $p \nmid a_0$ és $p^2 \nmid a_n$, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

3.2. Mutassa meg, hogy van olyan $f = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$ irreducibilis főpolinom, hogy az

$$f_{\to s} = \sum_{k=1}^{n} a_k (x - s)^k \in \mathbb{Z}[x]$$

polinomok ($s \in \mathbb{Z}$) egyikére sem alkalmazható a Schönemann–Eisenstein-tétel.

3.3. Mutassa meg, hogy tetszőleges p prímszámra az $x^n - p$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben.

3.4. Bizonyítsa be, hogy $[\mathbb{A} \cap \mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$.

3.5. Legyen $H = \left\{ \sqrt[p]{2} \mid p \text{ prímszám} \right\}$. Mutassa meg, hogy ha H' véges részhalmaza H-nak, akkor a H'-beli elemek lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.

3.6. Igazolja, hogy az

(a) $x^5 - 4x + 2$,
(b) $x^4 - 4x + 2$

polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}(i)$ felett.

3.7. Legyen p tetszőleges prímszám. Mutassa meg, hogy az $x^p + x^{p-1} + \cdots + x + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

3.8. Legyen $\vartheta = \dfrac{2\pi}{7}$. Határozza meg a $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$ és a $2\cos\vartheta$ komplex számok minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett.

3.9. Igazolja, hogy ha egy n-edfokú $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom ($n \geqslant 1$) legalább $2\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ egész helyen ± 1 értéket vesz fel, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ (s így $\mathbb{Q}$) felett.

3.10. Igazolja, hogy az

(a) $x^5 + 9x^4 + 30x^3 + 2x + 3$,
(b) $x^n - px + p^2$ (p prímszám, $n > 3$)

polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}$ felett.

3.11. Legyen n természetes szám. Mutassa meg, hogy a $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \in \mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis.

3.12. Legyen p prímszám és a olyan egész szám, amely nem osztható p-vel. Mutassa meg, hogy az $x^p - x + a$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

3.13. Legyenek a és b tetszőleges egész számok. Bizonyítsa be, hogy az $f = x^4 + \overline{a}x^2 + \overline{b}^2$ polinom nem irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett (p tetszőleges prímszám).

3.14. Legyen $g \in \mathbb{Z}[x]$ tetszőleges k-adfokú polinom ($k \in \mathbb{N}$), és legyenek $d_0 < d_1 < \cdots < d_k$ egészek. Igazolja, hogy van olyan $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, amelyre $|g(d_i)| \geqslant k!/2^k$.

3.15. Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ tetszőleges n-edfokú polinom ($n \in \mathbb{N}$), és legyen $m = [(n+1)/2]$. Tegyük fel, hogy vannak olyan különböző $a_1, \ldots, a_n$ egészek, amelyekre $0 < |f(a_i)| < m!/2^m$. Bizonyítsa be, hogy az f polinom irreducibilis.

3.16. Legyen $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + \varepsilon p \in \mathbb{Z}[x]$, ahol $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ és p prímszám. Igazolja, hogy ha $p > 1 + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$, akkor f irreducibilis.