1. Hozzárendelési feladat (tiltásokkal)

1.1. Legyen C az alábbi mátrixok valamelyike

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

valamint legyen $T_1 = \{x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{44}\}$ és $T_2 = \{x_{11}, x_{24}, x_{31}, x_{43}\}$. Határozzuk meg a $TH(C, T_1)$ és $TH(H, T_2)$ „tiltásos” hozzárendelési feladatok megoldásait.

1.2. Sándor, József és Benedek egy-egy asszisztenst keresnek az utóbbi időben megnövekedett feladatok ellátására. A meghírdetett interjúra öten jelentkeznek: Anna, Hanna, Panna, Bözsi és Pirike. Bizonyos okok miatt Sándor nem szeretne Pannával, Benedek pedig Pirikével együtt dolgozni. Az egyes munkákat az alábbi hatékonysággal tudnák a hölgyek végezni:

	Sándor	József	Benedek
Anna	11	8	13
Hanna	7	14	6
Panna	6	10	15
Bözsi	20	5	12
Pirike	9	9	18

Adjunk meg egy optimális felvételi stratégiát.

2. Szállítási feladat

Probléma: *Adott n darab feladóhely és m darab felvevőhely. Feladatunk az, hogy szállítsuk el a felvevő helyeken lévő anyagot a kívánt mennyiségben a felvevőhelyekre úgy, hogy a szállítással kapcsolatos költségek összege minimális legyen.*

Jelölések:

→ $n \in \mathbb{N}$ a feladóhelyek száma, egy-egy feladóhelyen azonos anyagféleség áll rendelkezésünkre,

→ a_i az i-edik feladóhelyen lévő anyag mennyisége,

→ $m \in \mathbb{N}$ a felvevőhelyek száma,

→ $C = (c_{i,j})_{n\times m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, ahol $c_{i,j}$ az egységnyi anyagmennyiségnek a szállításai költsége, ha a szállítás az i-edik feladóhelyről a j-edik felvevőhelyre $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$, a C mátrix a **költségmátrix**,

→ $X = (x_{i,j})_{n\times m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, ahol $x_{i,j}$ az i-edik feladóhelyről a j-edik felvevőhelyre szállítandó anyagmennyiséget jelöli. $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$.

Ekkor a fenti probléma a következőképpen formalizálható:

$$\begin{array}{c}
\sum_{t=1}^{m} x_{i,t} = a_i \ (i = 1, \dots, n) \\
\sum_{t=1}^{n} x_{t,j} = b_j \ (j = 1, \dots, m) \\
x_{i,j} \geqslant 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant m) \\
\hline
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{i,j} \to \min
\end{array}$$

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ és $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$, ekkor a fenti feladatot $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$-vel jelöljük.

2.1. Legyenek m és n tetszőleges természetes számok, a tetszőleges valós szám, valamint legyen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

és E_n az $n \times n$-es egységmátrix. Tekintsük az alábbi $A \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(mn)}$ mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{1}^T \\ E_n & E_n & E_n & \dots & E_n \end{pmatrix}.$$

Igazoljuk a következőket.

(a) Az A mátrix rangja $m + n - 1$.

(b) Legyen $1 \leqslant r \leqslant m + n$ tetszőleges természetes szám. Tegyük fel, hogy $1 \leqslant u < u + r - 1 \leqslant m + n$ és $1 \leqslant v < v + r - 1 \leqslant m + n$ $(u, v \in \mathbb{N})$, valamint legyen $b_{i,j} = A_{u+i-1, v+j-1}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant r)$. Mutassuk meg, hogy a $\det(b_{i,j})_{r\times r} \in \{-1, 0, 1\}$.

(c) tekintsük az A mátrix $m + n - 1$ számú független oszlopát. Az ezen oszlopvektorokból alkotott $B \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n-1)}$ mátrix bármely sorának elhagyásával kapott mátrix determinánsa nem 0.

2.2. Legyen $m = 5$, $n = 6$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és

$$H = \{(i, j) \in A \times B : \text{ln.k.o.}(i, j) < |i - j|\}.$$

Rajzoljuk fel a H-hoz tartozó cellagráfot és páros gráfot.

2.3. Legyen G egy cellagráf. Tekintsük G celláinak egy $c_1, \dots, c_k$ rendszere, valamint legyen $\{e_1, \dots, e_k\}$ a celláknak megfelelő élek rendszere $BP(G)$-ben.[1] Igazoljuk, hogy a $(c_1, c_2), (c_2, c_3), \dots, (c_{k-1}, c_k)$ élek rendszere a cellagráfban út [egyszerű út/hurok/egyszerű hurok], ha az $e_1, \dots, e_k$ élek rendszere $BP(G)$-ben út [egyszerű út/hurok/egyszerű hurok].

2.4. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^T = (4, 5),$$
$$\mathbf{b}^T = (3, 3, 3),$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

[1]A G cellagráfhoz tartozó páros gráfot $BP(G)$ jelöli.

2.5. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^T = (25, 26, 27, 32),$$
$$\mathbf{b}^T = (10, 20, 30, 30, 20),$$
$$C = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 8 & 5 & 13 \\ 8 & 22 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 7 & 11 & 17 & 4 \\ 15 & 18 & 5 & 20 & 19 \end{pmatrix}.$$

2.6. Határozzunk meg olyan vonalrendszert, amely az alábbi mátrix valamennyi 0-ját tartalmazza:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

2.7. Igazoljuk, hogy $m \times n$-es szállítási feladat esetén az összes különböző báziscella-rendszerek száma $m^{n-1} n^{m-1}$.

2.8. Legyen $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ olyan mátrix, amely minden oszlopában pontosan két egyest tartalmaz és sorai két csoportba sorolhatók oly módon, hogy minden oszlop egyesei különböző csoportba tartozó sorokban vannak. Igazoljuk, hogy A unimodális, azaz minden négyzetes részének determinánsa -1, 0 vagy 1.

2.9. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix permutációmátrix, ha minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-est tartalmaz és a többi elem 0. Bizonyítsuk be, hogy az összes permutáció-mátrixok mint vektorok által kifeszített altér dimenziója $(n-1)^2 + 1$.

2.10. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan mátrix, amelynek minden sorában és minden oszlopában pontosan r darab 1-est tartalmaz és a többi elem 0. Bizonyítsuk be, hogy A előáll r darab permutációmátrix összegeként.

2.11. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^T = (3, 5, 4), \ \mathbf{b} = (2, 4, 2, 2, 2),$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.12. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^T = (25, 25, 50), \ \mathbf{b} = (15, 20, 30, 35),$$
$$C = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 2 & 7 & 6 \\ 9 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.13. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^T = (17, 23, 25, 15), \ \mathbf{b} = (20, 20, 16, 13, 11),$$
$$C = \begin{pmatrix} 9 & 23 & 7 & 12 & 10 \\ 28 & 9 & 17 & 11 & 25 \\ 17 & 13 & 6 & 25 & 14 \\ 16 & 21 & 19 & 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

2.14. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\mathbf{a}^T = (45, 70, 30, 100), \ \mathbf{b} = (50, 20, 10, 35, 15, 50),$$
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 8 & 9 & 7 \\ 14 & 13 & 10 & 9 & 20 & 21 \\ 15 & 11 & 13 & 25 & 8 & 12 \\ 9 & 19 & 12 & 8 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$