1. Hozzárendelési feladat

Probléma: *Adott n dolgozó és ugyanennyi munka. Az egyes dolgozók a munkákat különböző költséggel tudják elvégezni. Osszuk szét a munkákat a dolgozók között úgy, hogy minden dolgozó pontosan egy munkát kapjon és a munkavégzés költsége minimális legyen.*

Jelölések:

- → $n \in \mathbb{N}$ (a dolgozók és a munkák száma),
- → $C = (c_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ahol c_{ij} a j-edik munka költsége, ha az i-edik dolgozó hajtja végre ($1 \leqslant i, j \leqslant n$), a C mátrix a **költségmátrix**,
- → $X = (x_{ij})_{n\times n} \in \{0,1\}^{n\times n}$, ahol $x_{ij} = 1$ pontosan akkor teljesül, ha a j-edik munkát az i-edik dolgozó végzi el ($1 \leqslant i, j \leqslant n$).

Ekkor a fenti probléma a következőképpen formalizálható:

$$\begin{array}{c} \sum_{t=1}^{n} x_{it} = 1 \ (i = 1, \ldots, n) \\ \sum_{t=1}^{n} x_{tj} = 1 \ (j = 1, \ldots, n) \\ \hline \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \end{array}$$

A fenti feladat a C **költségmátrixú hozzárendelési feladat**, amelyet $H(C)$-vel jelölünk.

1.1. Legyen $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg a $H(C)$ hozzárendelési feladat megoldását.

1.2. Legyenek C és D tetszőleges $\mathbb{R}^{m\times n}$-beli mátrixok. Azt mondjuk, hogy $C = (c_{ij})$ és $D = (d_{ij})$ ekvivalensek (jel.: $C \sim D$), ha vannak olyan α_i, β_j valós számok, amelyekre $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ teljesül minden (i, j) indexpárra ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$). Mutassuk meg, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció.

1.3. Ha a $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok ekvivalensek, akkor a $H(C)$ és $H(D)$ hozzárendelési feladatok optimális megoldásai megegyeznek.

1.4. Legyen $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tegyük fel, hogy előállítottunk egy olyan $C^{(0)}, \ldots, C^{(k)}$ ($k < n$) mátrixsorozatot, amely az alábbi tulajdonságokkal bír:

(1) $C \sim C^{(0)}$,

(2) $C^{(t)} \sim C^{(t+1)}$ ($t = 0, \ldots, k-1$),

(3) $C^{(t)} \geqslant 0$ ($t = 0, \ldots, k$),

(4) $C^{(k)}$-ban ki van jelölve egy n-elemű független 0-rendszer.

Legyen

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } C^{(k)}_{ij} \text{ eleme a független } 0\text{-rendszernek,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $X \in \{0,1\}^{n\times n}$ optimális megoldása $H(C)$-nek.

1.5. Határozzuk meg az alábbi $C \in \mathbb{R}^{4\times4}$ mátrixban kijelölhető összes független 0-rendszert:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.6. Határozzuk meg a $H(C)$ hozzárendelési feladat optimális megoldását, ahol

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.7. Határozzuk meg a $H(C)$ hozzárendelési feladat optimális megoldását, ahol

$$C \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right\}.$$