

1. Mátrixaritmetika

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re és $1 \leq k \leq n$ -re legyen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k,n} &= (0 \quad \dots \quad 0 \quad \overbrace{1}^{\text{k-adik komp.}} \quad 0 \quad \dots \quad 0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \\ \mathbf{1}_n &= (1 \quad \dots \quad 1) \in \mathbb{R}^{1 \times n}. \end{aligned}$$

1.1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}$, $B^T = (3 \quad 1 \quad 4)$ és $C = (1 \quad 4 \quad 1)$. Határozza meg az alábbi műveletek eredményeit: $A \cdot B$, $B \cdot C$, $(A^T \cdot C^T)^T$ és $A - C^T \cdot B^T$.

1.2. Legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 5 \\ -5 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ és $C = (1 \quad -2 \quad 3)$.

- (a) Igaz-e, hogy A és B egymás inverzei?
- (b) Adja meg az $A \cdot X = C^T$ egyenlet megoldásait.

1.3. Milyen p és q valós számok esetén lesz az $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 7 & p \\ 2 & -4 & 8 & q \end{pmatrix}$ mátrix rangja r , ahol $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

1.4. Egy országgyűlési választáson a tizenöt szavazókörzetben hat jelöltre lehet szavazni. Az érvényes szavazatok megoszlását az $A = (a_{i,j})_{6 \times 15}$ mátrix tartalmazza, amelynek $a_{i,j}$ eleme azt mutatja meg, hogy az i -edik jelöltre a j -edik körzetben hányan szavaztak. Mit jelentenek a következő kifejezések:

- (a) $\mathbf{e}_{1,6} \cdot A \cdot \mathbf{1}_{15}^T$;
- (b) $\mathbf{1}_6 \cdot A \cdot \mathbf{e}_{5,15}^T$;
- (c) $AA^T, A^T A$.

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy a második jelöltre a hatodik körzetben leadott szavazatok száma hány százaléka az összes érvényes szavazatnak.

1.5. Egy áruházban tizenkét féle dobozos sört tartanak. 2010. júliusában regisztrálták a napi fogyást: az A mátrix i -edik sorának j -edik eleme azt jelenti, hogy 2010. júliusának i -edik napján hány darab fogyott a j -edik fajta sörből. A \mathbf{b} (sör)vektor a sörök egységárait tartalmazza. Milyen jelentést tulajdoníthatunk az alábbi kifejezéseknek?

- (a) $\mathbf{e}_{3,31} \cdot A \cdot \mathbf{b}^T$;
- (b) $\mathbf{1}_{31} \cdot A$;
- (c) $A \cdot \mathbf{1}_{12}$.

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy mennyi az ötödik fajta sör árbevétele egy hónap alatt.

1.6. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Adja meg az $(A+B^{-1}) \cdot A^T$ mátrixot és oldja meg a $B \cdot X = A$ mátrixegyenletet.

1.7. Adja meg a p valós szám értékét úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & p \end{pmatrix}$$

mátrix szinguláris legyen.

1.8. Adja meg a p valós szám értékét úgy, hogy a $\mathbf{b} = (1, 1, p)$ vektor előálljon az

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3), \quad \mathbf{a}_2 = (-2, -5, -5), \quad \mathbf{a}_3 = (0, -1, 1), \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_4 = (-2, -6, -4)$$

vektorok lineáris kombinációjaként.

1.9. Határozza meg mindazokat a p valós számokat, amelyekre az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ p & p & p+2 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható.